

سما
SAMA

مذكرات سما

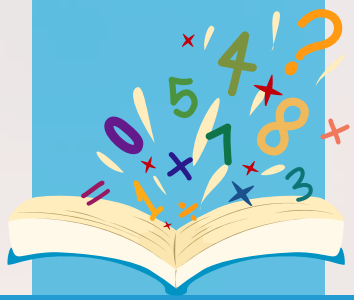
الرياضيات

أسئلة

10

الصف العاشر

المرحلة الثانوية



الفصل الدراسي الأول
2027 - 2026



www.samakw.com
samakw_net
60084568 /50855008/97442417
حولي مجمع بيروت الدور الأول

1-1 دالة القيمة المطلقة
Absolute Value Function

فكرة الدرس:

التعرف على دالة القيمة المطلقة، وتمثيلها بيانيًّا، والتعرف على خواص دالة القيمة المطلقة، واستخدام هندسة التحويلات لرسم بعض دوال القيمة المطلقة.

تعلمنا فيما سبق:

إن القيمة المطلقة لعدد حقيقي تعبر عن بُعد هذا العدد عن الصفر على خط الأعداد.

المصطلحات:

1. القيمة المطلقة Absolute Value
2. الدالة Function
3. المجال Domain
4. رأس المنحنى Vertex
5. التمثيل البياني Graph
6. المدى Range
7. محور التماثل Axis of Symmetry

مسألة الدرس:

في معرض العلوم بالمدرسة صمم أحمد وزملاؤه تجربة باستخدام شعاع الليزر ومرآة مستوية، لوحظ أن شعاع الليزر انطلق من المصدر واصطدم بالمرآة عند النقطة $(0\ ,\ 0)$ ثم انعكس ليصيب الهدف.

المطلوب: **كتابة قاعدة الدالة الناتجة من انعكاس شعاع الليزر.**

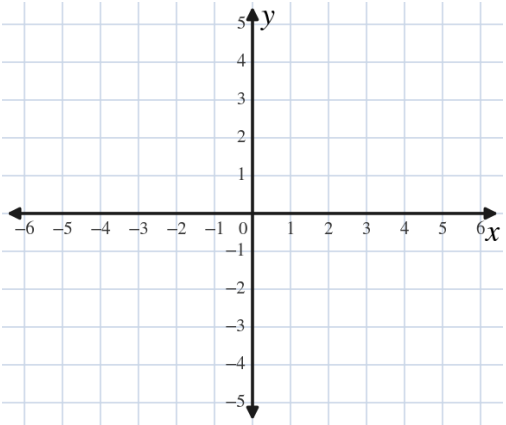
انتبه:

سنرمز لمحور السينات بـ x (x-axis) ولمحور الصادات بـ y (y-axis).

والآن: ارسم كلًّا من الدوال التالية:

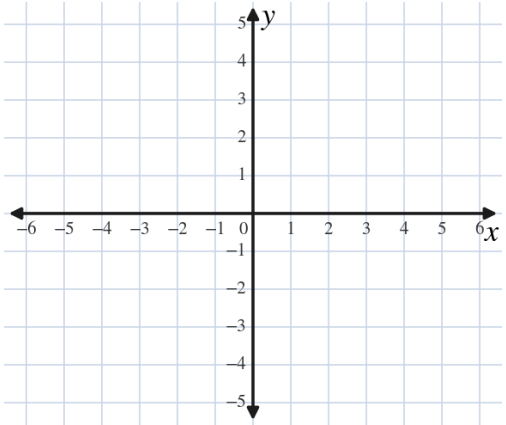
a $y_1 = x : x \geq 0$

x	0		
y	0		



b $y_2 = -x : x < 0$

x			0
y			0



الدائرة المفرغة عند $x = 0$ في الجدول (b) تعني أن 0 لا ينتمي لمجال الدالة y_2

🔁 **أعد تعريف الدالة:** $y_3 = |x|$

❓ **وما علاقة y_3 بكلٍّ من y_1 , y_2 ؟**

.....

.....

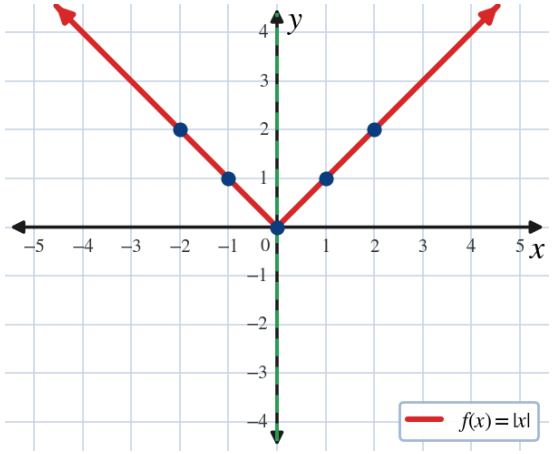
.....

⭐ **مما سبق: فإن الصورة الأساسية لدالة القيمة المطلقة هي:**

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = |x|$$

والتي مكوناتها هي: 1. المجال $\mathbb{R}$ 2. المجال المقابل $\mathbb{R}$ 3. قاعدة اقترانها $f(x) = |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \therefore f(x) = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$



x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

ℹ️ **معلومة: محور التماثل**

هو خط يقسم التمثيل البياني إلى جزأين متطابقين تمامًا (يحوّل التمثيل البياني إلى نفسه).

🔎 **نستنتج أن:**

1. تمثيل الدالة $y = |x|$ بيانيًّا ينتج من اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية (رأس المنحنى) وهي نقطة الأصل ويشبهان الحرف V .
2. رأس المنحنى هو $(0\ ,\ 0)$ وعنده توجد أصغر قيمة للدالة.
3. متماثلة حول محور الصادات $(x = 0)$ نسميها فيما بعد دالة زوجية.
4. مدى الدالة هو $[0\ ,\ \infty)$

📌 **ومن التعريف: إذا كانت $a,\ b,\ x \in \mathbb{R}$ فإن:**

1. $$|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

2. $$|x + a| = \begin{cases} x + a & : x \geq -a \\ -x - a & : x < -a \end{cases}$$

3. $$|ax + b| = \begin{cases} ax + b & : x \geq \dfrac{-b}{a} \\ -ax - b & : x < \dfrac{-b}{a} \end{cases} \qquad (a > 0)$$

📌 خواص القيمة المطلقة:

1. $|x| \geq 0$
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$

📝 ملحوظات هامة:

1. $|a|^2 = a^2$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$

⚠️ انتبه:

مجال دالة القيمة المطلقة هو $\mathbb{R}$ ما لم يذكر غير ذلك.

📈 رسم بيان دالة القيمة المطلقة باستخدام رأس المنحنى ومحور التماثل

✏️ مثال (1)

ارسم بيان الدالة: $f(x) = |2x + 4|$

✅ الحل:

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

أولًا: باستخدام محور التماثل لرسم بيان الدالة نضع:

$2x + 4 = 0$

$\therefore 2x = -4 \Rightarrow x = -2$

$f(-2) = |2(-2) + 4| = 0$

$\therefore$ تسمى النقطة $(-2\ ,\ 0)$ رأس المنحنى

نكون جدولًا بأخذ قيمتين لـ x على يمين $x = -2$:

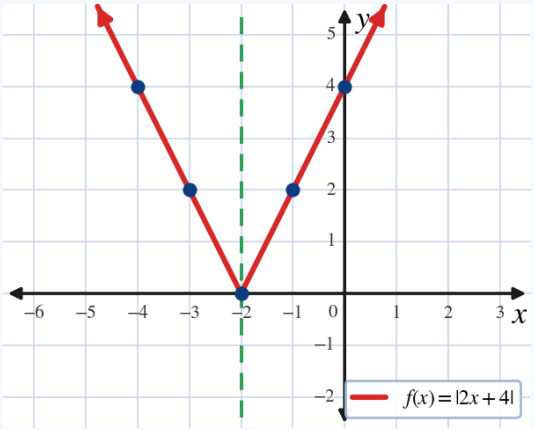
$f(-1) = |2(-1) + 4| = 2$

$f(0) = |2(0) + 4| = 4$

ومن التماثل حول المستقيم $x = -2$ نوجد قيمتين لـ x على يساره:

$f(-3) = f(-1) = 2\ ,\ f(-4) = f(0) = 4$

x	-4	-3	-2	-1	0
y	4	2	0	2	4



🔎 نلاحظ أن: رأس المنحنى هو $(-2\ ,\ 0)$ ومحور التماثل هو $x = -2$ ومنحنى الدالة مفتوح للأعلى.

🧮 يمكن الاستعانة بالآلة الحاسبة لإيجاد قيم $f(x)$

✏️ تابع مثال (1)

ثانيًا: باستخدام إعادة تعريف القيمة المطلقة:

نضع $2x+4=0$

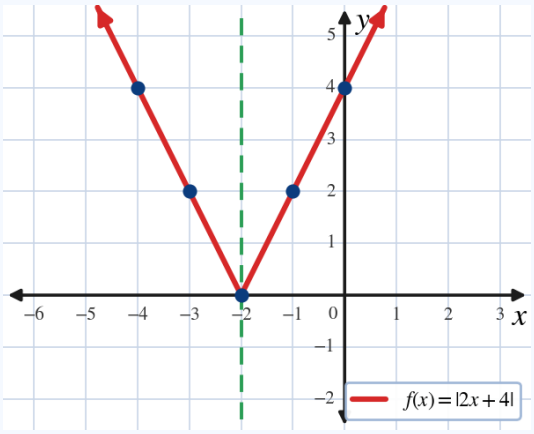
$$2x=-4 \Rightarrow x=-2$$

$$f(x)=\begin{cases} 2x+4 & : x \geq -2 \\ -2x-4 & : x < -2 \end{cases}$$

– نكون جدولًا من إعادة تعريف القيمة المطلقة:

$$f(-1)=2(-1)+4=2\,,\quad -1>-2$$
$$f(-3)=-2(-3)-4=2\,,\quad -3<-2$$

x	0	-1	-2	-3	-4
y	4	2	0	2	4



مما سبق نلاحظ:

$f(x)=|2x+4|+0$ ، بفرض أن: $a=2\,,\ b=4\,,\ c=0$

1. رأس المنحنى هو $\left(\dfrac{-b}{a}\,,\ c\right)=(-2\,,\ 0)$

2. معادلة محور التماثل هي $x=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-4}{2}=-2$

3. مدى الدالة هو $[c\,,\ \infty)=[0\,,\ \infty)$

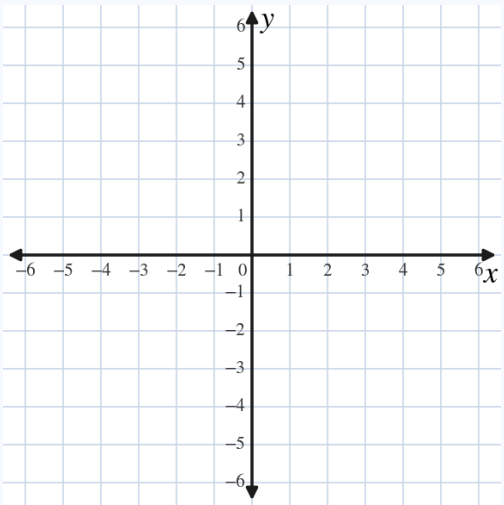
انتبه:

عند رسم بيان أي دالة اكتب مجال الدالة أولًا.

تحقق من فهمك (1)

ارسم بيان الدالة: $f(x)=|3x+6|$

x					
y					



تعميم:

الصورة القياسية لدوال القيمة المطلقة: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\ f(x)=|ax+b|+c$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$ ، ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$

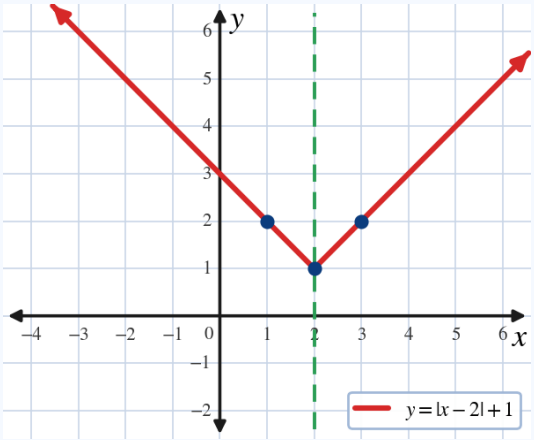
1. رأس المنحنى هو النقطة $\left(\frac{-b}{a}\ ,\ c\right)$
2. معادلة محور التماثل هي $x = \frac{-b}{a}$
3. مدى الدالة هو $[c\ ,\ \infty)$
4. مدى الدالة يتغير إذا كانت الدالة على الصورة $f(x) = -|ax + b| + c$ ويصبح $(-\infty\ ,\ c]$ حيث منحنى الدالة في هذه الحالة يكون مفتوحًا للأسفل.

✏️ مثال (2)

أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كلٍّ من الدوال التالية ثم ارسم بيان كلٍّ منها:

a $y = |x - 2| + 1$ **b** $y = -|2x + 3|$

✅ **الحل:** **a** $y = |x - 2| + 1$



مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

بفرض أن $a = 1\ ,\ b = -2\ ,\ c = 1$

رأس المنحنى هو $\left(\frac{-b}{a}\ ,\ c\right) = (2\ ,\ 1)$

معادلة محور التماثل هي $x = \frac{-b}{a} = \frac{2}{1} = 2$

مدى الدالة هو $[c\ ,\ \infty) = [1\ ,\ \infty)$

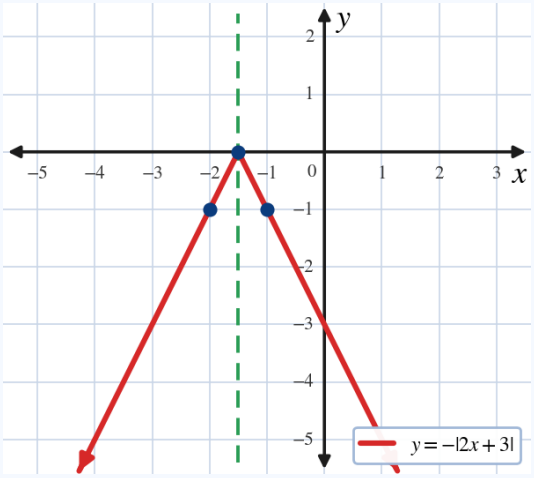
نضع جدول قيم الأزواج المرتبة $(x\ ,\ y)$ يتضمن رأس منحنى الدالة:

x	1	2	3
y	2	1	2

🔎 نلاحظ أن: عند رأس المنحنى $(2\ ,\ 1)$ توجد أصغر قيمة للدالة.

✏️ تابع مثال (2)

b $y = -|2x + 3|$



مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

بفرض أن $a = 2\ ,\ b = 3\ ,\ c = 0$

رأس المنحنى هو $\left(\frac{-b}{a}\ ,\ c\right) = \left(\frac{-3}{2}\ ,\ 0\right)$

معادلة محور التماثل هي $x = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{2}$

مدى الدالة هو $(-\infty\ ,\ c] = (-\infty\ ,\ 0]$

– نضع جدول قيم الأزواج المرتبة $(x\ ,\ y)$ يتضمن رأس منحنى الدالة:

x	-2	$\frac{-3}{2}$	-1
y	-1	0	-1

🔎 نلاحظ أن: عند رأس المنحنى $\left(\frac{-3}{2}\ ,\ 0\right)$ توجد أكبر قيمة للدالة.

🧠 تذكَّر!

نضع $f(x) = |ax + b| + c$ ،

$ax + b = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{-b}{a}$

رأس المنحنى هو $\left(\frac{-b}{a}\ ,\ c\right)$ ، $f\left(\frac{-b}{a}\right) = c$

🔍 ملحوظة:

الإشارة السالبة خارج القيمة المطلقة لا تؤثر على نقطة رأس المنحنى، ومنحنى الدالة يكون مفتوحًا للأسفل.

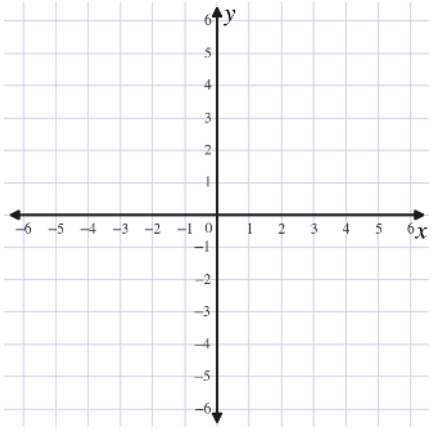
🎯 تحقق من فهمك (2)

أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كلٍّ من الدوال التالية ثم ارسم بيان كلٍّ منها:

a $f(x) = |x + 1| + 3$ **b** $f(x) = -|x + 1|$ **c** $g(x) = \left|\frac{1}{2}x + 1\right|$ **d** $f(x) = 1 - |x - 2|$

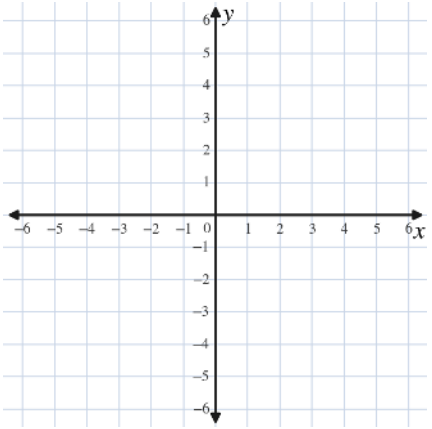
a $f(x) = |x + 1| + 3$

x			
y			



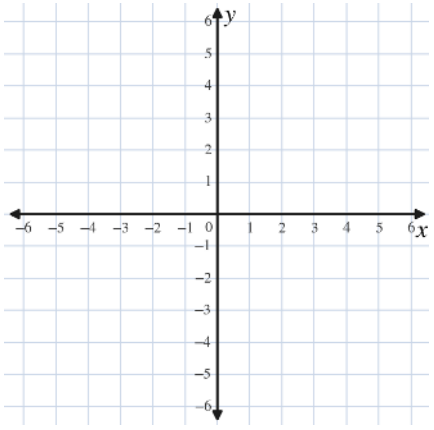
b $y = -|x + 1|$

x			
y			



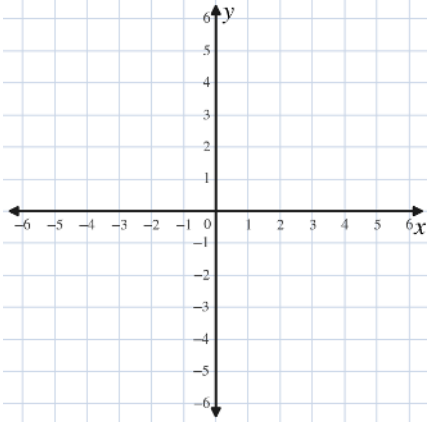
c $g(x) = \left|\frac{1}{2}x + 1\right|$

x			
y			



d $f(x) = 1 - |x - 2|$

x			
y			



رسم بيان دوال القيمة المطلقة باستخدام بعض التحويلات الهندسية
Graph of Absolute Value Function using some Geometric Transformations

التحويلات الهندسية لمنحنى الدالة الأساسية $f(x) = |x|$

1 الانسحاب في اتجاه محور السينات (إزاحة أفقية)

معلومة:
الدالة الأساسية هي دالة المرجع
$g(x) = |x|$

استكشف

ارسم بيان الدالة: $f(x) = |x + 3|$

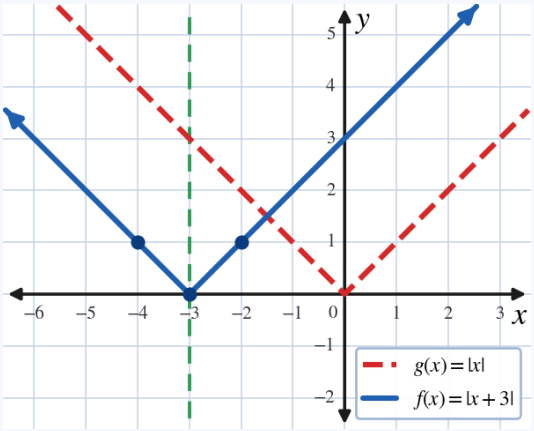
الحل: مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

1 - **لإيجاد صفر المطلق** نضع $f(x) = 0$
$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ وهو محور التماثل

2 - **نكون جدول القيم**

x	-4	-3	-2
y	1	0	1

3 - **نرسم الدالة**



4 - **نلاحظ أن:** بيان الدالة $f(x) = |x + 3|$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بمقدار ثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات (جهة اليسار) ⬅

ملحوظة:

معامل x هو الواحد دائمًا في الدالة الأساسية. تذكّر:

$$|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

مثال (3)

ارسم بيان كلٍّ من الدالة $f(x) = |x - 1|$ **باستخدام التحويلات الهندسية**

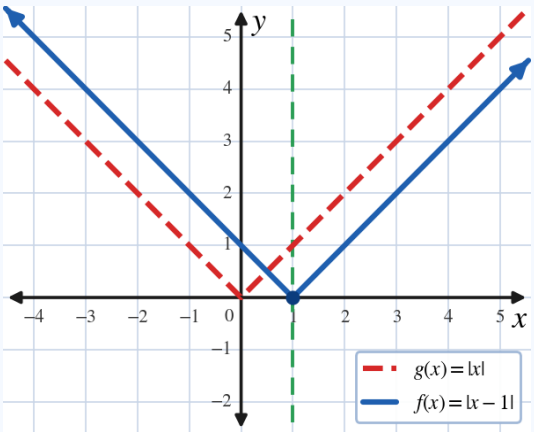
الحل: مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

1 - **لإيجاد صفر المطلق** نضع $f(x) = 0$
$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ وهو محور التماثل

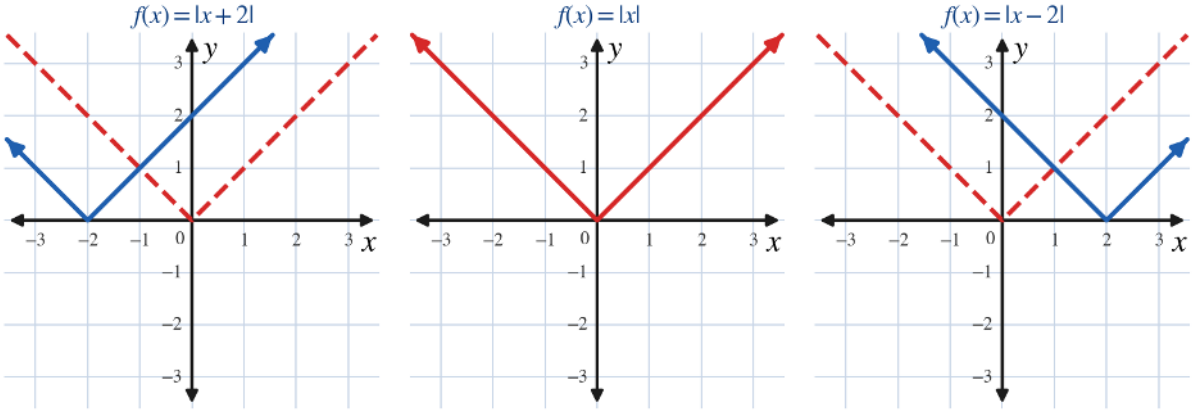
2 - **نكون جدول القيم لدالة المرجع** $g(x) = |x|$

x	-1	0	1
y	1	0	1

3 - **نرسم الدالة** بإزاحة مقدارها وحدة واحدة جهة اليمين ➡



📋 ملخص: الإزاحة الأفقية



رأس المنحنى $(2\ ,\ 0)$ إزاحة أفقية وحدتان يمينًا ➡️

الدالة الأساسية، رأس المنحنى $(0\ ,\ 0)$

رأس المنحنى $(-2\ ,\ 0)$ إزاحة أفقية وحدتان يسارًا ⬅

⭐ تعميم:

يكون منحنى الدالة $f(x) = |x + a|$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ وبإزاحة أفقية مقدارها $|a|$ وحدة في الاتجاه:

1 – الموجب لمحور السينات (جهة اليمين) ➡️ عندما $a < 0$

2 – السالب لمحور السينات (جهة اليسار) ⬅ عندما $a > 0$

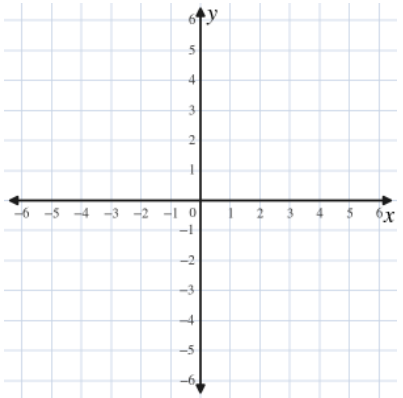
🎯 تحقق من فهمك (3)

لكلٍّ من الدوال التالية حدد مسافة الانسحاب، ثم ارسم بيان كلٍّ منها مستخدمًا الإزاحة لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

a $f(x) = |x - 3|$ **b** $y = |x + 2|$ **c** $f(x) = |x - 3.5|$ **d** $y = |x - 1.5|$

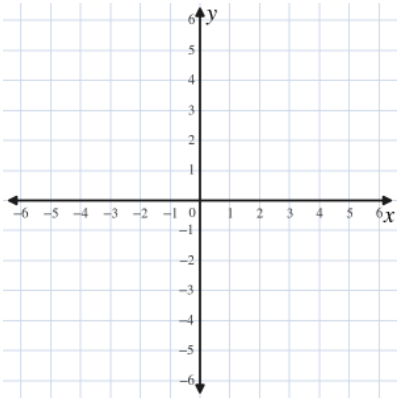
a $f(x) = |x - 3|$

x			
y			



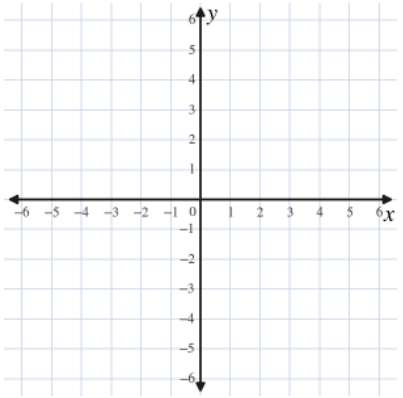
b $y = |x + 2|$

x			
y			



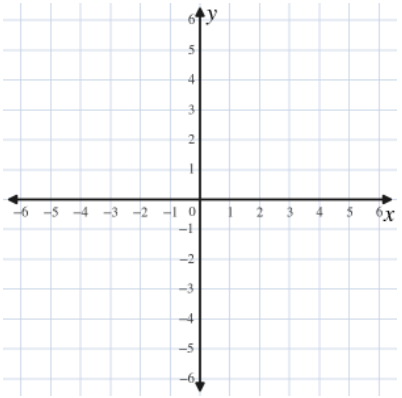
c $f(x) = |x - 3.5|$

x			
y			



d $y = |x - 1.5|$

x			
y			



2 الانسحاب في اتجاه محور الصادات (إزاحة رأسية)

استكشف

ارسم بيان الدالة: $f(x) = |x| - 1$

الحل:

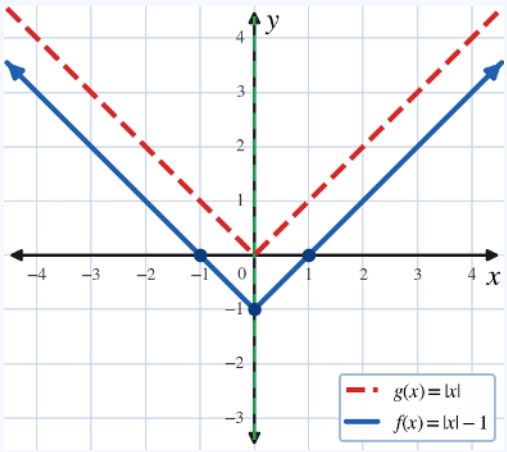
1 – **لإيجاد صفر المطلق** نلاحظ أن صفر المطلق هو $x = 0$ وهي معادلة محور التماثل، رأس المنحنى $(0\,,\ -1)$

2 – **نكون جدول القيم**

x	-1	0	1
y	0	-1	0

3 – **نرسم الدالة**

4 – **نلاحظ أن:** بيان الدالة $f(x) = |x| - 1$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بمقدار وحدة واحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات رأسيًا (للأسفل) ⬇



مثال (4)

ارسم بيان الدالة $f(x) = |x| + 2$ **باستخدام التحويلات الهندسية**

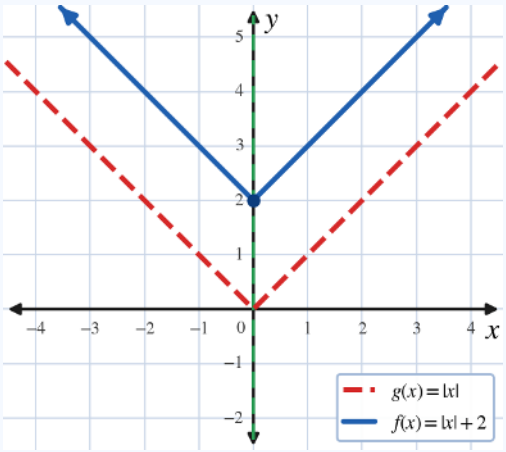
الحل:

1 – **لإيجاد صفر المطلق** نلاحظ أن صفر المطلق هو $0 = x$ وهي معادلة محور التماثل، رأس المنحنى $(0\ ,\ 2)$

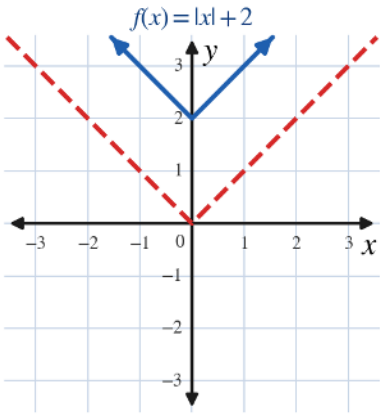
2 – **نكون جدول القيم** لدالة المرجع:

x	-1	0	1
y	1	0	1

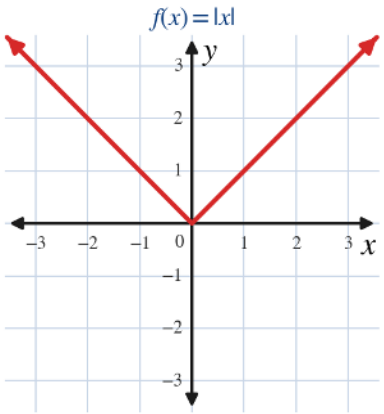
3 – **نرسم الدالة**: بيان الدالة $f(x) = |x| + 2$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بمقدار وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور الصادات رأسيًا (للأعلى) ⬆️



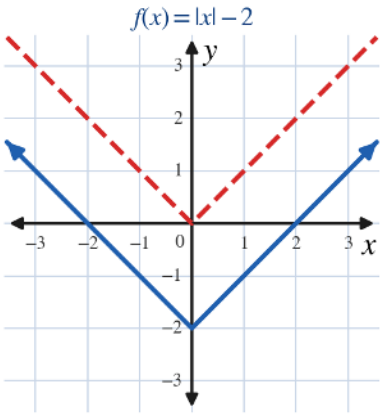
📋 ملخص: الإزاحة الرأسية



رأس المنحنى $(0\ ,\ -2)$ إزاحة رأسية وحدتان لأسفل ⬇



الدالة الأساسية، رأس المنحنى $(0\ ,\ 0)$



رأس المنحنى $(0\ ,\ 2)$ إزاحة رأسية وحدتان لأعلى ⬆

⭐ **تعميم:**

يكون منحنى الدالة $f(x) = |x| + a$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ وبإزاحة رأسية مقدارها $|a|$ وحدة في الاتجاه:

1. الموجب لمحور الصادات (**رأسيًا للأعلى**) ⬆ عندما $a > 0$
2. السالب لمحور الصادات (**رأسيًا للأسفل**) ⬇ عندما $a < 0$

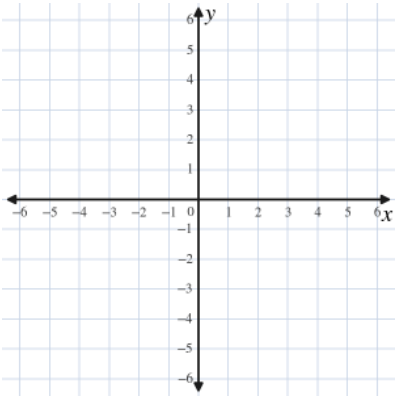
🎯 تحقق من فهمك (4)

ارسم بيان كلٍّ من الدوال التالية باستخدام التحويلات الهندسية والدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

a $f(x) = |x| + 3$ **b** $y = |x| - 2$ **c** $f(x) = |x| - 2.5$ **d** $y = |x| - 1$

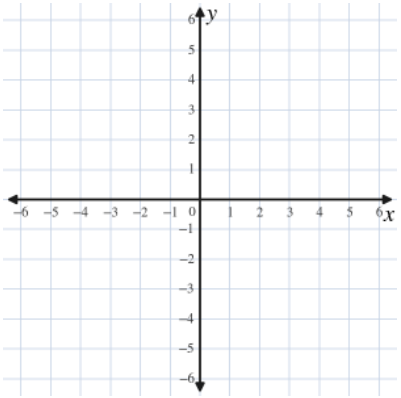
a $f(x) = |x| + 3$

x			
y			



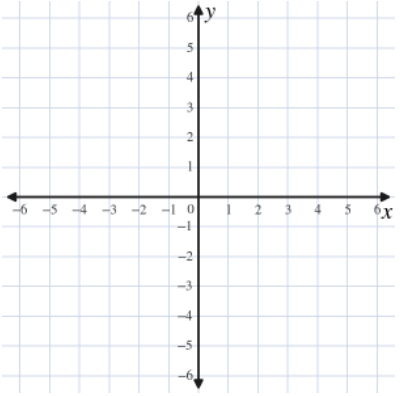
b $y = |x| - 2$

x			
y			



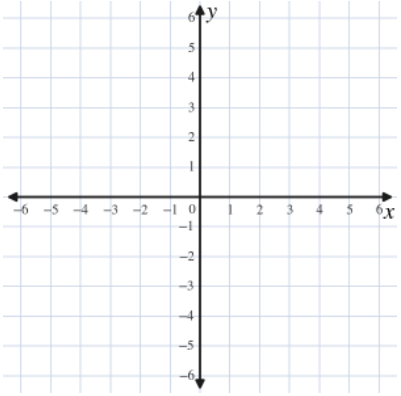
c $f(x) = |x| - 2.5$

x			
y			



d $y = |x| - 1$

x			
y			

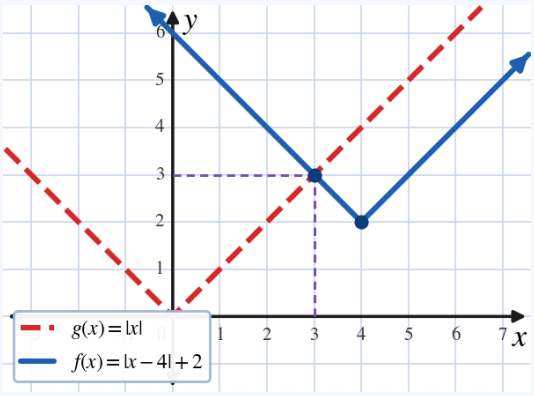


3 الانسحاب المركب: إزاحة أفقية تليها إزاحة رأسية لمنحنى الدالة $f(x) = |x|$

مثال (5)

ارسم بيان كل دالة مما يلي باستخدام دالة المرجع والإزاحة: **a** $f(x) = |x - 4| + 2$ **b** $f(x) = |x + 3| - 1$

الحل: **a** $f(x) = |x - 4| + 2$



بيان الدالة $f(x) = |x-4| + 2$ يمكن الحصول عليه بإزاحة لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

1 – لإيجاد صفر المطلق أربع وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات (إزاحة أفقية) ➡️

2 – إزاحة وحدتين للأعلى في الاتجاه الموجب لمحور الصادات (إزاحة رأسية) ⬆️

3 – نرسم الدالة.

4 – ملحوظة: نقطة تقاطع منحنى الدالة $f(x)$ مع الدالة الأساسية $g(x)$ هي $(3\ ,\ 3)$

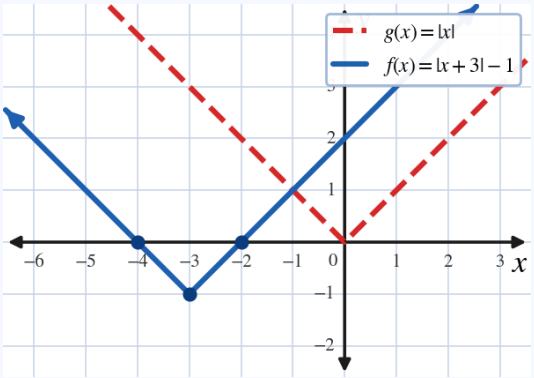
❓ **اذكر ما تعبر عنه هذه النقطة؟**

.....

.....

✏️ تابع مثال (5)

b $f(x) = |x+3| - 1$



بيان الدالة $f(x) = |x+3| - 1$ يمكن الحصول عليه بإزاحة لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

1 – ثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات (إزاحة أفقية) ⬅️

2 – إزاحة وحدة واحدة للأسفل في الاتجاه السالب لمحور الصادات (إزاحة رأسية) ⬇️

3 – نرسم الدالة.

🔍 ملحوظة: منحنى الدالة $f(x) = |x+3| - 1$ يقطع محور السينات عند $x = -4\ ,\ x = -2$

⭐ تعميم:

منحنى الدالة $f(x) = |x+a| + b$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بإزاحة:

1 – أفقية (**محور السينات**) مقدارها $|a|$ مع مراعاة الاتجاه يمينًا أو يسارًا ↔️

2 – رأسية (**محور الصادات**) مقدارها $|b|$ مع مراعاة الاتجاه للأعلى أو للأسفل ↕️

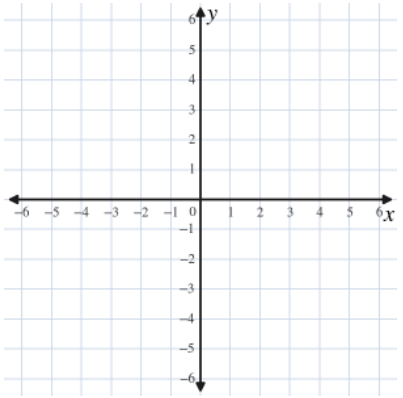
🎯 تحقق من فهمك (5)

ارسم بيان الدوال التالية باستخدام دالة المرجع والإزاحة:

a $f(x) = |x+3| + 2$ **b** $y = |x-2| - 1$ **c** $f(x) = |x+2| - 2$ **d** $y = |x-1| + 3$

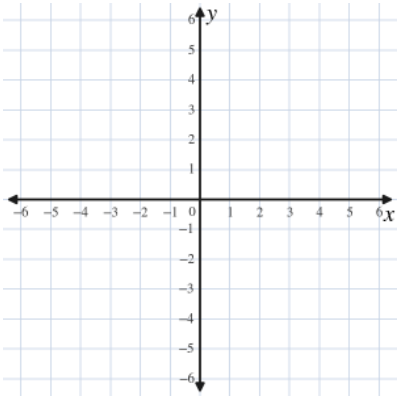
a $f(x) = |x + 3| + 2$

x			
y			



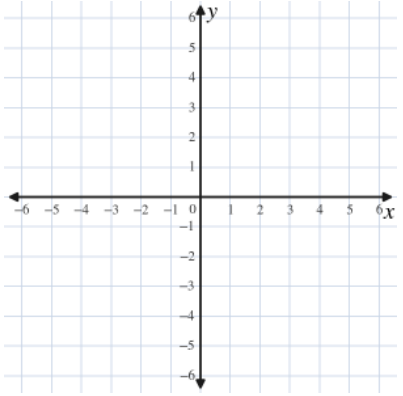
b $y = |x - 2| - 1$

x			
y			



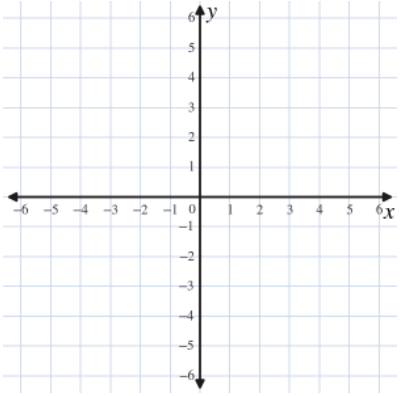
c $f(x) = |x + 2| - 2$

x			
y			



d $y = |x - 1| + 3$

x			
y			



استخدام النماذج

صمم مهندس مظلة مدخل مبنى على شكل حرف V ، ويمكن تمثيل شكلها بالدالة $y = |x|$ ثم عدّل المظلة بإزاحة 3 وحدات إلى اليمين و 4 وحدات إلى الأعلى.

المطلوب:

a اكتب الدالة الجديدة.

b حدِّد إحداثيات رأس المنحنى.

c ارسم الدالة الجديدة.

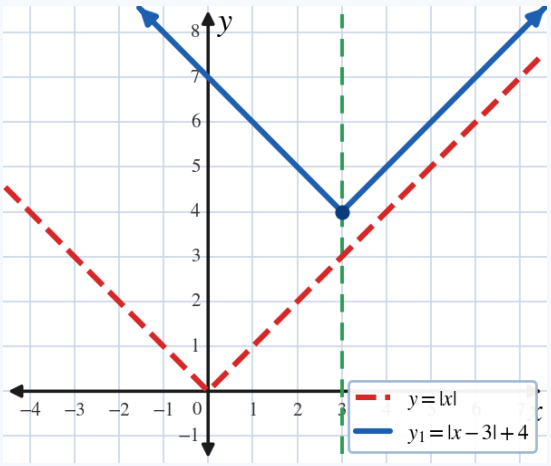
الحل:

a ∵ الدالة $y = |x|$ ثم تحريكها 3 وحدات إلى اليمين، 4 وحدات إلى الأعلى

∴ الدالة الجديدة هي: $y_1 = |x - 3| + 4$

b إحداثيات رأس المنحنى هو $(3\ ,\ 4)$

c التمثيل البياني للدالة الجديدة ⬅



تذكَّر!

رأس دالة القيمة المطلقة $f(x) = |ax + b| + c$ هو $\left(\frac{-b}{a}\ ,\ c\right)$

الانعكاس في محور السينات للدالة الأساسية $g(x) = |x|$

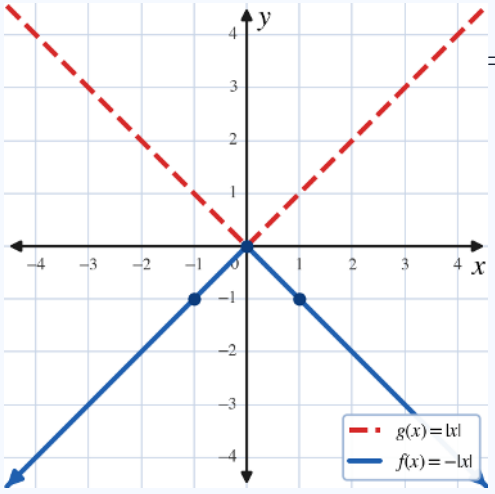
استكشف

ارسم بيان دالة: $f(x) = -|x|$

الحل:

$$= \begin{cases} -(x) & : x \geq 0 \\ -(-x) & : x < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} -x & : x \geq 0 \\ x & : x < 0 \end{cases}$$

x	-1	0	1
y	-1	0	-1



نلاحظ أن: بيان الدالة $f(x) = -|x|$ هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

⭐ **تعميم:**

• **إذا كانت** $f(x) = -|x+b|$, $g(x) = |x|$ **يجب مراعاة ترتيب التحويلات الهندسية لرسم بيان الدالة** $f(x)$ **:**

1 – انعكاس في محور السينات أولًا للدالة الأساسية.

2 – إزاحة أفقية (يمينًا أو يسارًا).

3 – إزاحة رأسية (للأعلى أو للأسفل).

4 – تحديد الرأس للمنحنى ومحور التماثل.

⚠️ **انتبه:**

$$|a-x| = |x-a|$$
$$\sqrt{x^2} = |x|$$
$$|-x| = |x|$$
$$|-ax| = |ax|$$
$$\sqrt{(x+a)^2} = |x+a|$$

✏️ **مثال (6)**

ارسم بيانيًّا منحنى الدالة $f(x) = -|x+1|+2$ **مستخدمًا منحنى الدالة الأساسية** $g(x) = |x|$

✅ **الحل:**

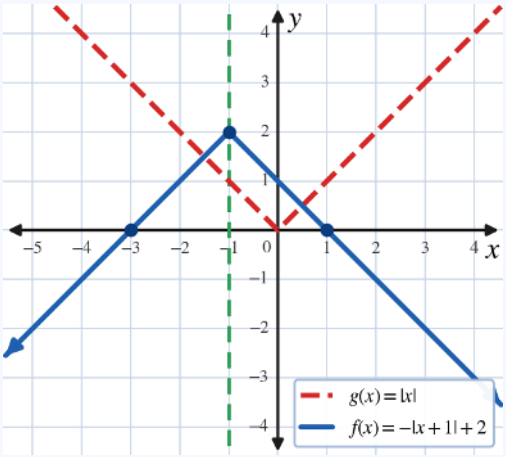
بيان الدالة $f(x) = -|x+1|+2$ يمكن الحصول عليه بـ :

1 – انعكاس لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ 🪞

2 – ثم إزاحة أفقية مقدارها وحدة واحدة لجهة اليسار ⬅

3 – ثم إزاحة رأسية مقدارها وحدتان للأعلى ⬆️

🔍 ملحوظة: منحنى الدالة $f(x) = -|x+1|+2$ يقطع محور السينات عند $x = 1$, $x = -3$



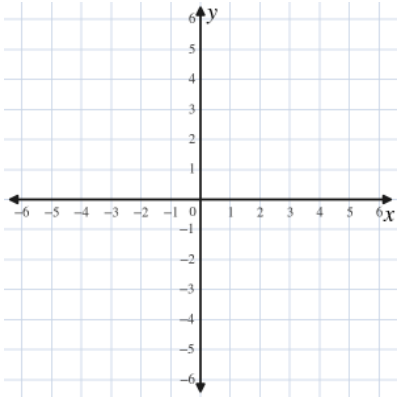
🎯 **تحقق من فهمك (6)**

ارسم بيانيًّا كلًّا من الدوال التالية مستخدمًا بيان منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ **:**

a $f(x) = -|x-2|+3$ b $f(x) = -|x+1|-2$ c $f(x) = -|x-1|-1$ d $f(x) = -|x+2|+1$

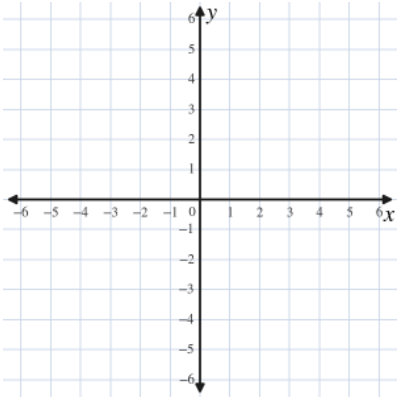
a $f(x) = -|x-2|+3$

x			
y			



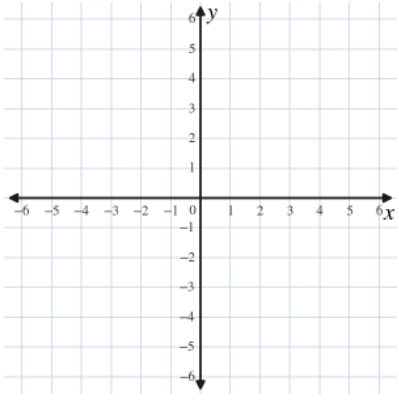
b $f(x) = -|x+1|-2$

x			
y			



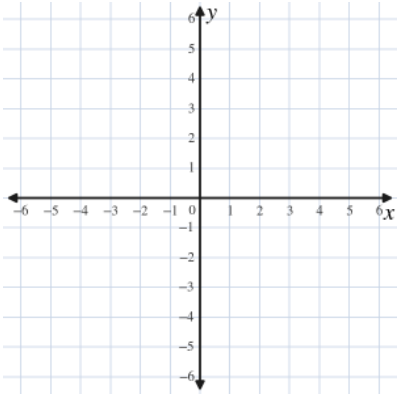
c $f(x) = -|x-1|-1$

x			
y			



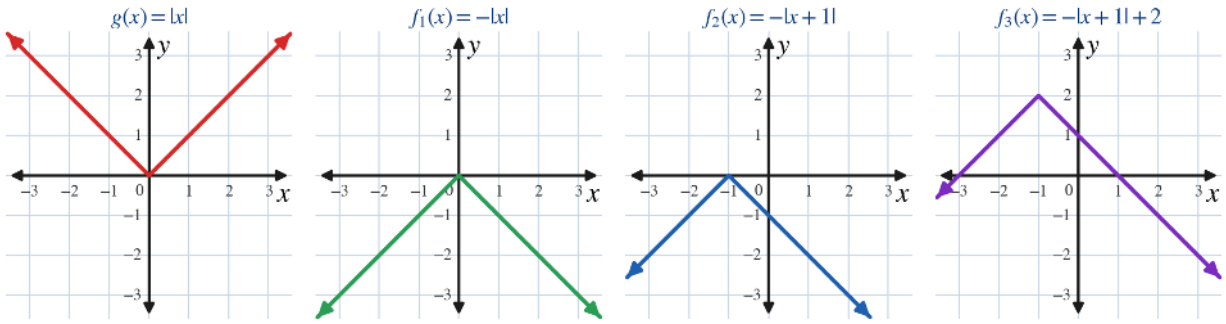
d $f(x) = -|x+2|+1$

x			
y			



🤔 **فكِّر معي: هل يمكن رسم بيان الدالة $f(x) = |2x-4|+3$ باستخدام التحويلات الهندسية؟**

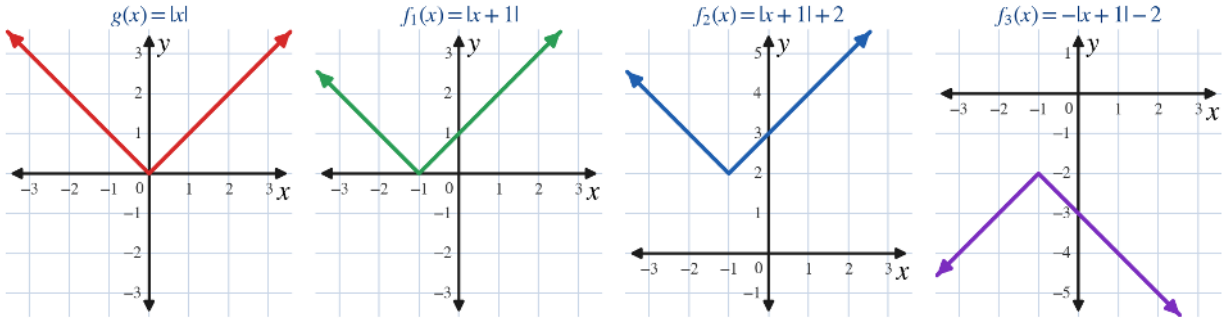
من منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ نحصل على منحنى الدالة $f(x) = -|x+1|+2$ كالتالي:



من منحنى الدالة الأساسية — الانعكاس في محور السينات — إزاحة أفقية وحدة واحدة لليسار — إزاحة رأسية وحدتان للأعلى

❓ سؤال: هل يمكن أن نعكس الترتيب بإجراء الإزاحة الرأسية أو الإزاحة الأفقية قبل إجراء الانعكاس في محور السينات؟

بالطبع لا يمكننا؛ لأننا سوف نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب، وسيكون على الصورة التالية:



من منحنى الدالة الأساسية — إزاحة أفقية وحدة واحدة لليسار — إزاحة رأسية وحدتان للأعلى — الانعكاس في محور السينات

وهذا المنحنى ستكون معادلته $f(x) = -|x + 1| - 2$ ، ويمكننا التحقق: بإعادة تعريف القيمة المطلقة ثم رسم بيان الدالة، أو تحديد الرأس ومحور التماثل وفتحة بيان الدالة.

أتدرب وأحل المسائل

أولًا – البنود الموضوعية:

■ **في البنود من (1-5) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:**

(1) بيان الدالة $f(x)=|x|$ ينطبق على بيان الدالة $g(x)=x$ (a) (b)

(2) بيان الدالة $f(x)=|x|$ هو انعكاس لبيان الدالة $g(x)=-|x|$ حول محور السينات (a) (b)

(3) بيان الدالة $f(x)=|x-4|+2$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان الدالة $g(x)=|x|$ في الاتجاه المحدد 4 وحدات جهة اليمين ووحدتان للأعلى (a) (b)

(4) محور التماثل للدالة $f(x)=|x-3|$ هو $x=3$ (a) (b)

(5) مدى الدالة $f(x)=|x+3|-3$ هو $[-3\,,\,\infty)$ (a) (b)

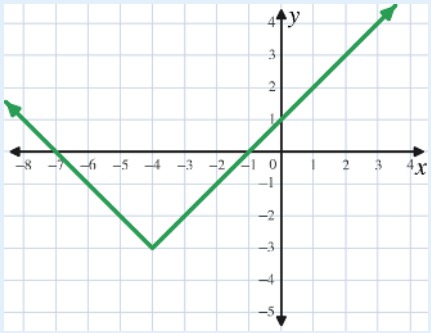
■ **في البنود من (1-2) اختر الإجابة الصحيحة:**

(1) أي من الدوال التالية رأس منحناها $(-3\,,\,2)$:

(a) $y=|x+3|+2$ (b) $y=|x-3|+2$

(c) $y=|x+3|-2$ (d) $y=|x-3|-2$

(2) أي من قواعد الدوال التالية تمثل منحنى الدالة المرسوم:



(a) $y=|x-4|-3$

(b) $y=|x-4|+3$

(c) $y=|x+4|+3$

(d) $y=|x+4|-3$

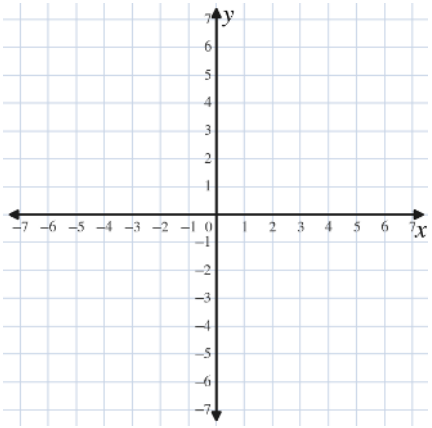
ثانيًا – أسئلة المقال:

(1) مثِّل بيانيًّا فيما يلي كلًّا من الدوال التالية ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها:

(a) $g(x)=|-3x|$ (b) $h(x)=|x+4|$ (c) $f(x)=2|x-4|-6$ (d) $f(x)=2|x|$ (e) $g(x)=|x|+3$

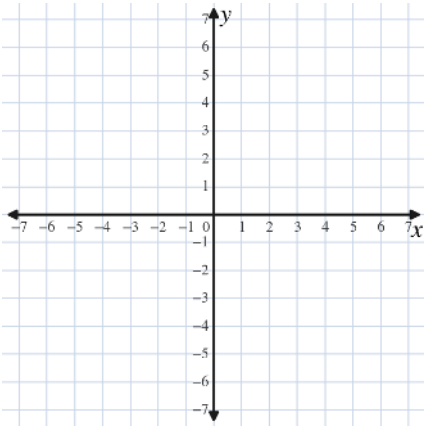
a $g(x) = |-3x|$

x			
y			



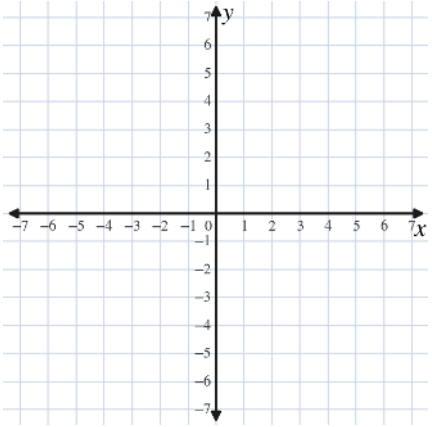
b $h(x) = |x + 4|$

x			
y			



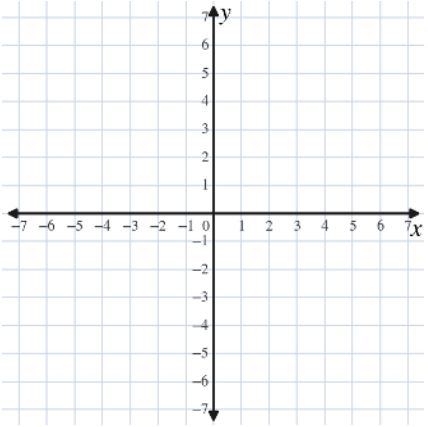
c $f(x) = 2|x - 4| - 6$

x			
y			



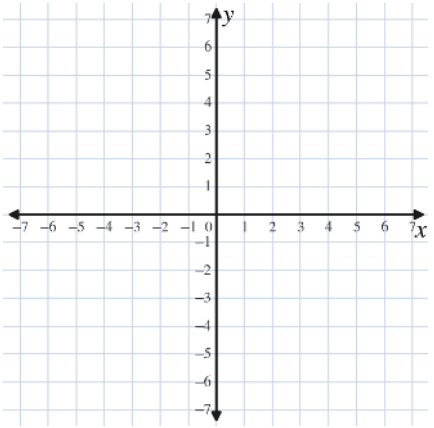
d $f(x) = 2|x|$

x			
y			



e $g(x) = |x| + 3$

x			
y			

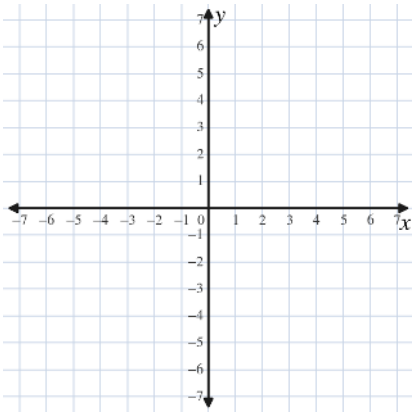


(2) ارسم بيانيًّا كلًّا من الدوال التالية مستخدمًا التحويلات الهندسية للدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

a $f(x) = |x + 5|$ **b** $h(x) = |x - 2|$ **c** $h(x) = |x| - 2$ **d** $h(x) = -|x + 3|$ **e** $f(x) = |1 - x| + 2$ **f** $f(x) = -|x - 4| + 3$

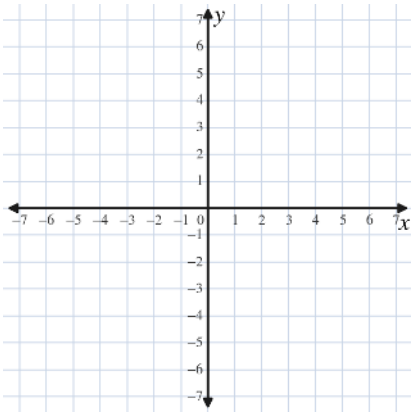
a $f(x) = |x + 5|$

x			
y			



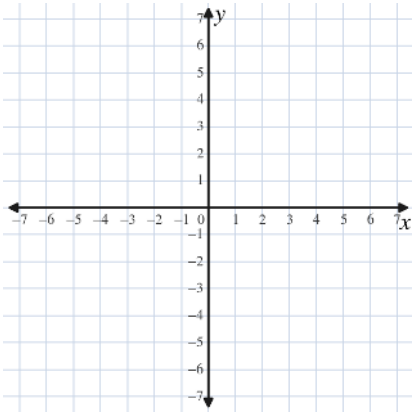
b $h(x) = |x - 2|$

x			
y			



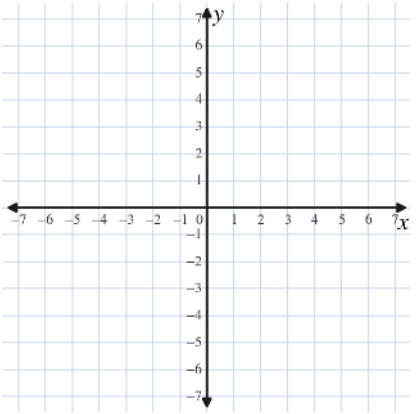
c $h(x) = |x| - 2$

x			
y			



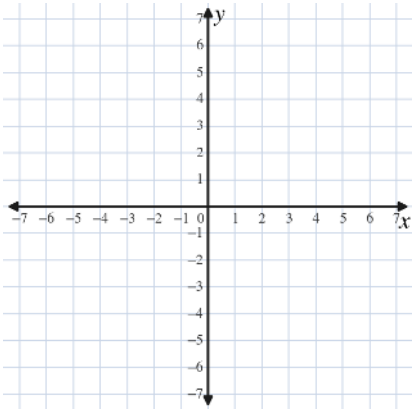
d $h(x) = -|x + 3|$

x			
y			



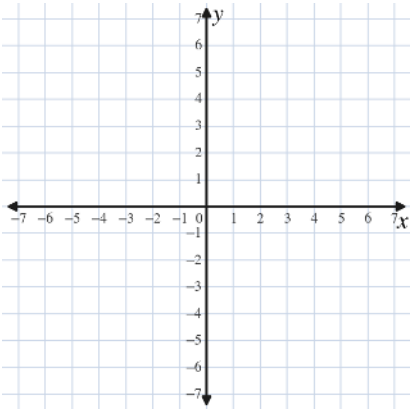
e $f(x) = -|x - 4| + 3$

x			
y			



f $f(x) = |1 - x| + 2$

x			
y			



(3) ارسم بيانيًّا كلًّا من الدالتين على نفس المستوى الإحداثي، ثم أوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطعهما:

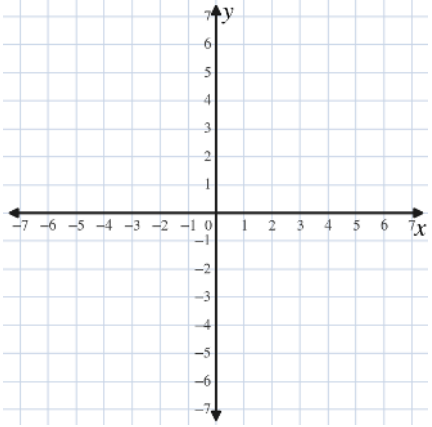
a $f(x) = |x - 2|\ ,\ g(x) = -|x - 1| + 3$

b $f(x) = |x - 3|\ ,\ g(x) = 3 - |x|$

c $f(x) = |x - 2| - 3\ ,\ g(x) = 4 - |x - 2|$

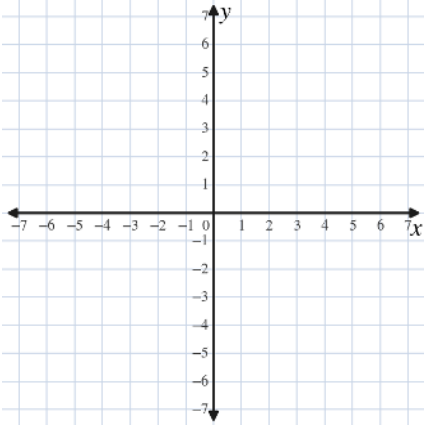
a $f(x) = |x-2|\ ,\ g(x) = -|x-1| + 3$

x			
y			



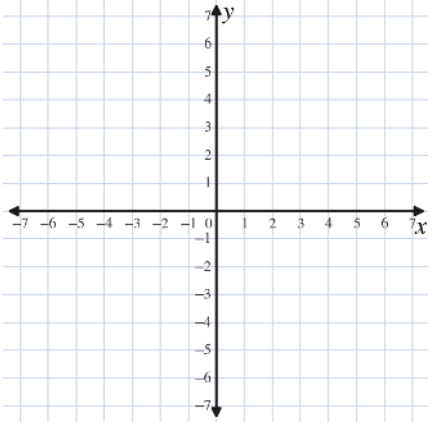
b $f(x) = |x-3|\ ,\ g(x) = 3 - |x|$

x			
y			



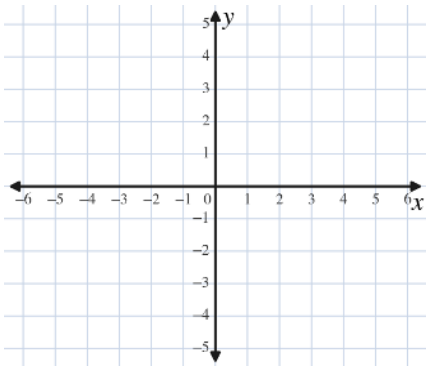
c $f(x) = |x-2| - 3\ ,\ g(x) = 4 - |x-2|$

x			
y			



مهارات تفكير عليا

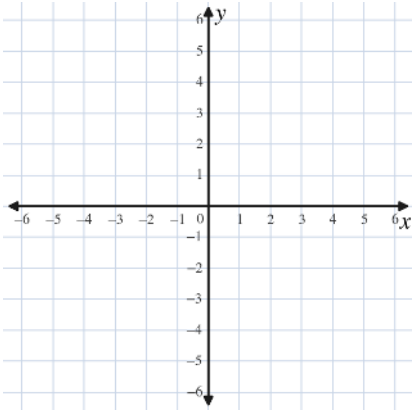
■ **ارسم بيان الدالة:** $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$



■ **مثِّل كل دالة مما يلي بيانيًّا، ثم حدِّد كلًّا من مجالها ومداها:**

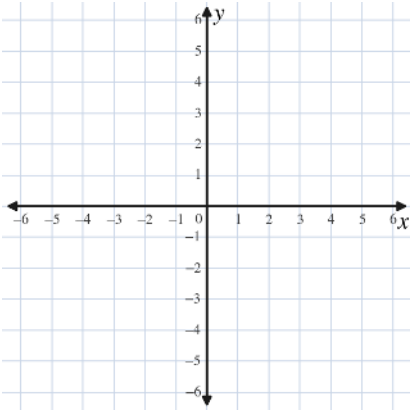
a $f(x) = 3 - |2x|$

x			
y			



b $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

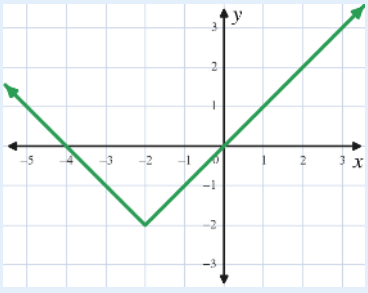
x			
y			



■ **اختر الإجابة الصحيحة:**

المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = |x+2| - 2$ ومحور السينات تساوي ..... وحدة مربعة

a 2 **b** 3 **c** 5 **d** 4



🌟 **بالتوفيق يا بطل! راجع القواعد قبل حل التمارين** 💪

1-2 حل معادلة القيمة المطلقة
Solving Absolute Value Equations

فكرة الدرس:

حل معادلة القيمة المطلقة جبريًّا على الصورة:

1. $|ax+b|=|cx+d|$ 2. $|ax+b|=cx+d$

المصطلحات:

1. معادلة القيمة المطلقة Absolute Value Equation
2. مجموعة الحل Solution Set (S.S.)

تعلمنا فيما سبق:

- حل معادلات من الدرجة الأولى.
- حل معادلات تربيعية.
- حل معادلات القيمة المطلقة.

ملحوظة:

مجموعة حل المعادلة ويرمز لها بالرمز S.S. هي مجموعة جميع قيم المتغيرات التي تجعل المعادلة صحيحة.

مسألة الدرس:

أراد حمد أن يشتري كرة قدم للمباراة التي ستقام في ملعب المدرسة فلنساعد حمدًا لإيجاد الكرة المناسبة، علمًا بأن الكتلة المثالية لكرة القدم هي $430\ g$ ، ويسمح أن تزيد أو تنقص عن هذه الكتلة بمقدار $20\ g$.

1. ما أكبر كتلة يمكن أن تكون لكرة القدم؟

.....

2. ما أقل كتلة يمكن أن تكون لكرة القدم؟

.....

3. اكتب معادلة قيمة مطلقة تمثل الموقف.

.....

معادلات القيمة المطلقة (Absolute Value Equation)

معادلة القيمة المطلقة: هي معادلة تتضمن تعبيرًا جبريًّا داخل رمز القيمة المطلقة. ومن تعريف القيمة المطلقة فيمكن تحويل معادلة القيمة المطلقة إلى معادلتين مرتبطتين بها لا تحتويان على رمز القيمة المطلقة، وذلك بجعل العبارة التي داخل القيمة المطلقة موجبًا مرة وسالبًا مرة أخرى.

مفهوم أساسي « حل معادلات القيمة المطلقة »

لحل المعادلة $|ax+b|=c$ حيث $c \geq 0$ نحل المعادلتين المرتبطتين بها وهما:

إما $ax+b=c$

أو $ax+b=-c$

حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=c\ ,\ c\geq 0$

📌 **تعلمنا فيما سبق أن حل معادلة القيمة المطلقة:**

1 $|x|=A$
إذا كان $A>0$ ، فإن للمعادلة حلان هما:
$x=A$ or $x=-A$
$S=\{-A\ ,\ A\}$

2 $|x|=0$
إذا كان $A=0$ ، فإن للمعادلة حل وحيد وهو:
$x=0\ ,\ S=\{0\}$

3 $|x|=A$
إذا كان $A<0$ ، فإن للمعادلة ليس لها حل:
$S=\emptyset$

✏️ **مثال توضيحي**

أوجد مجموعة الحل لكلٍّ من المعادلات التالية: **a** $|x-3|=2$ **b** $|3x+2|=0$ **c** $|5x+2|=-4$

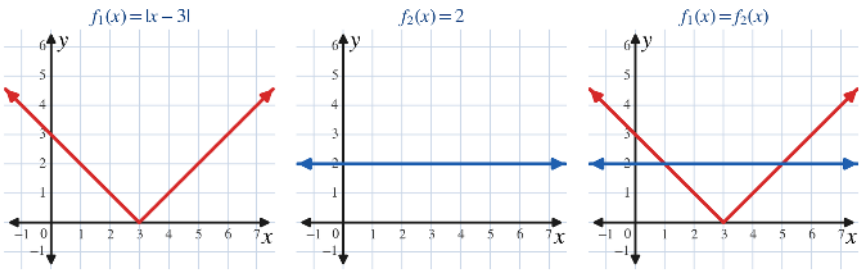
✅ **الحل:**

a $|x-3|=2$
$\because\ |x-3|=2$
إما $x-3=2$ أو $x-3=-2$
$\therefore\ x=5 \qquad x=1$
$\therefore\ S.S.=\{1\ ,\ 5\}$

b $|3x+2|=0$
$\therefore\ 3x+2=0$
$3x=-2$
$x=\dfrac{-2}{3}$
$\therefore\ S.S.=\left\{\dfrac{-2}{3}\right\}$

c $|5x+2|=-4$
$\because\ -4<0$
القيمة المطلقة لا تكون سالبة
$\therefore\ S.S.=\emptyset$

📊 **من المثال التوضيحي (a) بيانيًّا:**



نقطتا التقاطع عند $x=1$ و $x=5$ وهما حلا المعادلة 👌

🧠 **تذكَّر!**

1. إذا كان $|x|=x$ فإن $x\geq 0$ ، $x\in[0\ ,\ \infty)$
2. إذا كان $|x|=-x$ فإن $x\leq 0$ ، $x\in(-\infty\ ,\ 0]$

⚠️ **انتبه:**

$|a|=|b|\Leftrightarrow a=b$ or $a=-b$
$|a|=|b|\Leftrightarrow a^2=b^2$

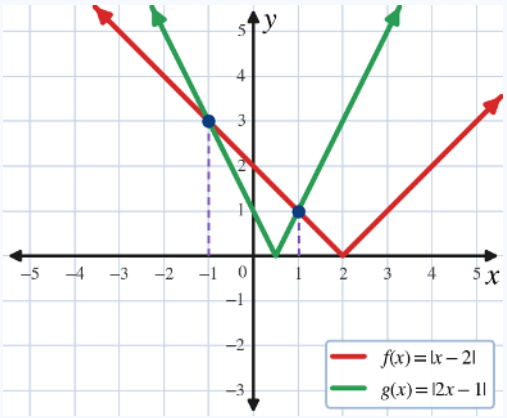
📌 **خواص القيمة المطلقة: لكل $a\ ,\ b\in\mathbb{R}$ فإن:**

1. $|a|\geq 0$
2. $|a+b|\leq|a|+|b|$
3. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$
4. $|x-a|=|a-x|$
5. $\dfrac{|a|}{|b|}=\left|\dfrac{a}{b}\right|\ ,\ b\neq 0$
6. $|x|=|-x|$
7. $|a|^n=a^n$ حيث n عدد زوجي
8. $\sqrt{x^2}=|x|$ لأي عدد حقيقي x

أولًا: حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=|cx+d|$

نشاط

1. ارسم بيان الدالة $f(x)=|x-2|$ وبيان الدالة $g(x)=|2x-1|$ على نفس المستوى الإحداثي، مستخدمًا إحداثيِّي رأس المنحنى ومحور التماثل في كلٍّ منهما:



x		2	
$f(x)$		0	

x		?	
$g(x)$		0	

2. من الرسم أوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين $f(x)$, $g(x)$: $x_1=$ ..... $x_2=$ .....

3. تسمى مجموعة الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين .....

أي أن: مجموعة حل المعادلة $|x-2|=|2x-1|$ هي { ..... ، ..... }

وهذه الطريقة تسمى **الطريقة البيانية** لحل المعادلة $|x-2|=|2x-1|$

مثال (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-2|=|2x-1|$

الحل الأول (باستخدام خواص القيمة المطلقة)

نعلم أن $|a|=|b| \Leftrightarrow a=\pm b$ ، أي أن أحد المقدارين $=\pm$ المقدار الآخر

$\because |x-2|=|2x-1|$

إما

$$x-2=+(2x-1)$$
$$x-2=2x-1$$
$$x-2x=2-1$$
$$-x=1$$
$$x=-1$$

أو

$$x-2=-(2x-1)$$
$$x-2=-2x+1$$
$$x+2x=2+1$$
$$3x=3$$
$$x=1$$

$\therefore S.S.=\{-1\ ,\ 1\}$

الحل الآخر (بتربيع الطرفين)

$$\because |x-2|=|2x-1|$$

$\therefore (\lvert x-2\rvert)^2=(\lvert 2x-1\rvert)^2$	بتربيع الطرفين
$x^2-4x+4=4x^2-4x+1$	بفك التربيع
$4x^2-4x+1-x^2+4x-4=0$	جعل المعادلة صفرية
$3x^2-3=0$	بجمع الحدود المتشابهة
$3(x^2-1)=0$	نحلل
$3(x-1)(x+1)=0$	بقسمة الطرفين على 3

خواص الضرب في الأعداد الحقيقية:

إما

$$x-1=0$$
$$x=1$$

أو

$$x+1=0$$
$$x=-1$$

$\therefore S.S. = \{-1\ ,\ 1\}$

تذكّر!

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

انتبه:

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{1} \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

تذكّر!

إذا كان $|a| = |b|$ فإن $|a|^2 = |b|^2$

تحقق من فهمك (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x - 1| = |x + 2|$

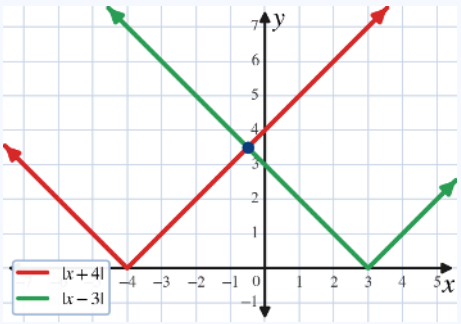
ملحوظة: سوف تقتصر دراستنا على الحل الجبري والذي يعتمد على خواص القيمة المطلقة أو بعض العمليات الجبرية.

مثال (2)

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي: a $|x + 4| = |x - 3|$ b $|2y + 1| = |3y + 4|$

الحل: a $|x + 4| = |x - 3|$ **(باستخدام خواص القيمة المطلقة)**

نعلم أن $|a| = |b| \Leftrightarrow |a| = \pm |b|$



إما

$x + 4 = x - 3$

$x - x = -4 - 3$

$0x = -7$

عبارة خاطئة، لا يوجد حل

أو

$x + 4 = -(x - 3)$

$x + 4 = -x + 3$

$x + x = -4 + 3$

$2x = -1$

$x = \dfrac{-1}{2}$

$\therefore S.S. = \left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$

b $|2y + 1| = |3y + 4|$ **(بتربيع الطرفين)**

$\because (|2y + 1|)^2 = (|3y + 4|)^2$ بتربيع الطرفين

$4y^2 + 4y + 1 = 9y^2 + 24y + 16$ بفك التربيع

$9y^2 + 24y + 16 - 4y^2 - 4y - 1 = 0$ جعل المعادلة صفرية

$5y^2 + 20y + 15 = 0$ بجمع الحدود المتشابهة

$5(y^2 + 4y + 3) = 0$ نحلل

$5(y + 1)(y + 3) = 0$ $(\div 5\ ،\ 5 \neq 0)$

إما

$y + 1 = 0$

$y = -1$

أو

$y + 3 = 0$

$y = -3$

$\therefore S.S. = \{-3\,,\ -1\}$

⚠️ **انتبه:**

يمكنك حل المعادلة باستخدام: • خواص القيمة المطلقة. • تربيع الطرفين. وهذا ما يسمى بالحل الجبري.

🎯 تحقق من فهمك (2)

أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات التالية:

a $|y-4| = |2y-5|$

b $|2x-3| = |x+1|$

c $|3y+1| = |y-2|$

d $|x-4| = |2x-5|$

ثانيًا: حل المعادلة على الصورة $|ax+b| = cx+d$

✏️ مثال (3)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-3| = 3x-1$

✅ **الحل:**

$\because$ القيمة المطلقة دائمًا غير سالبة

$\therefore$ يجب أن يكون $3x-1 \geq 0$ وهذا ما نسميه **شرط الحل**

$$3x \geq 1 \ \Rightarrow\ x \geq \frac{1}{3} \qquad \therefore x \in \left[\frac{1}{3}\,,\ \infty\right)$$

∴ نقبل كل قيم x التي أكبر من أو تساوي $\frac{1}{3}$ أي أن مجموعة التعويض هي $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

إما

$$x - 3 = +(3x - 1)$$
$$x - 3 = 3x - 1$$
$$x - 3x = 3 - 1$$
$$-2x = 2$$
$$x = -1$$
$$-1 \notin \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$$

∴ $x = -1$ ليس حلاً للمعادلة ❌

أو

$$x - 3 = -(3x - 1)$$
$$x - 3 = -3x + 1$$
$$x + 3x = 3 + 1$$
$$4x = 4$$
$$x = 1$$
$$1 \in \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$$

∴ $x = 1$ حلاً للمعادلة ✅

$$\therefore S.S. = \{1\}$$

🧠 تذكَّر!

1. $|x| = c\,,\ c \geq 0$ دائمًا. 2. $c > 0$ .3 $cx + d \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-d}{c}$ شرط الحل هو ما يسمى بمجموعة التعويض (مجال الدالة).

4. $(a > 0)$

$$|ax + b| = \begin{cases} ax + b & : x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax + b) & : x < \frac{-b}{a} \end{cases}$$

🎯 تحقق من فهمك (3)

أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات التالية:

a $|2x - 1| = x + 2$

b $|2x + 5| = x + 5$

✏️ مثال (4)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية: **a** $|4x + 2| = 1 - 2x$ **b** $|x + 4| + 2x + 3 = 0$

✅ **الحل:** **a** $|4x + 2| = 1 - 2x$

$1-2x \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -1 \Rightarrow x \leq \frac{-1}{-2} \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$ ∴ نوجد شرط الحل:

$\therefore x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

إما

$$\begin{aligned} 4x+2 &= 1-2x \\ 4x+2x &= 1-2 \\ 6x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{6} \end{aligned}$$

$\frac{-1}{6} \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

أو

$$\begin{aligned} 4x+2 &= -1+2x \\ 4x-2x &= -1-2 \\ 2x &= -3 \\ x &= \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

$\frac{-3}{2} \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

$\therefore S.S. = \left\{\frac{-3}{2}, \frac{-1}{6}\right\}$

b $|x+4|+2x+3=0$

$|x+4| = -2x-3$

$-2x-3 \geq 0 \Rightarrow -2x \geq 3 \Rightarrow x \leq \frac{-3}{2}$ $\therefore x \in \left(-\infty, \frac{-3}{2}\right]$ ∴ نوجد شرط الحل:

إما

$$\begin{aligned} x+4 &= -2x-3 \\ x+2x &= -3-4 \\ 3x &= -7 \\ x &= \frac{-7}{3} \end{aligned}$$

نتحقق من شرط الحل

$\frac{-7}{3} \in \left(-\infty, \frac{-3}{2}\right]$

حل ✅

أو

$$\begin{aligned} x+4 &= 2x+3 \\ x-2x &= 3-4 \\ -x &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

نتحقق من شرط الحل

$1 \notin \left(-\infty, \frac{-3}{2}\right]$

مرفوض ❌

$\therefore S.S. = \left\{\frac{-7}{3}\right\}$

⚠ انتبه:

إذا كانت $c<0$, $a>b$ فإن $a \cdot c < b \cdot c$

⚠ انتبه:

$|4x+2| = \left|\frac{1}{4}\right| \cdot |4x+2| = \left|x+\frac{1}{2}\right|$

⚠ انتبه:

$|3-x| = |x-3|$, $|x-3| = 3|x-3|$

$\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$, $\sqrt{4x+4}$

$x^2 = |x|^2$

🎯 تحقق من فهمك (4)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $|2\ell - 3| = |4\ell - 1|$

b $|3x - 1| + 4x - 13 = 0$

استخدام النماذج

يقع منزل سعد بين مدرسته والنادي الرياضي في منطقته كما في الشكل. وتوجد هذه المواقع الثلاثة على خط مستقيم يمر بحديقة الأحمدي، تبعد المدرسة عن الحديقة $2\ km$ ويبعد النادي الرياضي عن الحديقة $7\ km$ في الاتجاه المعاكس،

كم يبعد منزل سعد عن الحديقة إذا كان البعد بين المنزل والنادي الرياضي ضعف البعد بين المنزل والمدرسة؟

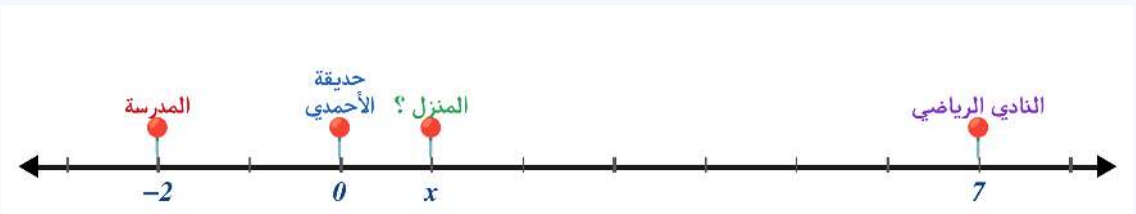


📍 من معالم بلادي: حديقة الأحمدي

تعد حديقة الأحمدي من أبرز المعالم في محافظة الأحمدي، وتتميز بمساحاتها الخضراء وتصميمها الجميل، وتعد من أقدم الحدائق المنظمة في الكويت.



✅ الحل:



ليكن x موقع منزل سعد على خط الأعداد:

البعد بين المنزل والمدرسة: $|x-(-2)| = |x+2|$

البعد بين المنزل والنادي الرياضي: $|7-x| = |x-7|$

$\therefore |x-7| = 2|x+2|$

$|x-7| = |2x+4|$ (خواص القيمة المطلقة)

إما

$$x-7 = 2x+4$$
$$x-2x = 4+7$$
$$-x = 11$$
$$x = -11$$

مرفوضة، لماذا؟

أو

$$x-7 = -(2x+4)$$
$$x-7 = -2x-4$$
$$x+2x = -4+7$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

✅

.....

.....

∴ يبعد منزل سعد عن الحديقة $1\ km$ في اتجاه النادي الرياضي 🏠

🧠 تذكَّر!

$\forall\, a\,,\, b \in \mathbb{R}$

$|a-b| = |b-a|$

$|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$

⚠️ انتبه:

$2|A| = |2| \cdot |A| = |2A|$

💪 أهمية الرياضة في حياة المتعلم

تساعد الرياضة على تحسين صحته الجسدية وزيادة نشاطه وتركيزه داخل الصف، كما تعزز ثقته بنفسه وتنمي لديه روح التعاون والانضباط.

أتدرب وأحل المسائل

أولًا – البنود الموضوعية:

■ **في البنود من (1-7) ظلِّل دائرة الإجابة الصحيحة:**

(1) حل المعادلة $|2x-1| = x+3$ هو:

a $x = 1$ b $x = 2$ c $x = -1$ d لا يوجد حل

(2) حل المعادلة $|x+2| = x+2$ هو:

a $x = -2$ b $x \in (-2, \infty)$ c $x \in [-2, \infty)$ d $\emptyset$

(3) حل المعادلة $|x-3| = |x+1|$ هو:

a $x = \pm 1$ b $x = -1$ c $x = 1$ d $x = 2$

(4) مجموعة حل المعادلة $|x-3| = |3-x|$ هي:

a $\{3\}$ b $\{-3, 3\}$ c $\mathbb{R}$ d $\emptyset$

(5) حل المعادلة $|x-4| = |4-x|$ هو:

a $x = -4$ b $x = 4$ c $\mathbb{R}$ d لا يوجد حل

(6) حل المعادلة $|2x-3| = |x+3|$ هو:

a $x = 0, x = 6$ b $x = -5, x = 0$ c $x = 5, x = 6$ d $x = \pm 6$

(7) مجموعة حل المعادلة $|x-2| + x = 2$ هي:

a $\emptyset$ b $(-\infty, 2)$ c $(-\infty, 2]$ d $\{2\}$

ثانيًا – أسئلة المقال:

■ **أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:**

a $|x-2| = |x+4|$

b $|x-4| = |x+2|$

c $|4-5x|+|3x+1|=0$

d $|x-3|=2x-1$

e $|2y+3|=3y-2$

f $|x-1|=5x+10$

g $|2i-3|=4i-1$

h $|3y-7|=2y-5$

i $\frac{1}{2}|8x-2| = x+2$

j $|x+4|+23 = 17$

k $|2x+6| = x-3$

مهارات تفكير عليا

(1) حل المعادلة مستخدمًا خواص القيمة المطلقة: $(x+5)^2 = 9$

(2) أوجد مجموعة حل المعادلتين التاليتين:

a $|3x-9|-|3-x|=10$

b $\sqrt{x^2-2x+1}+x=5$

(3) اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كانت مجموعة حل المعادلة $|x-a|=b$ هي $\{5\,,\,11\}$ فإن $(a\,,\,b)=$

a $(-8\,,\,3)$ **b** $(-3\,,\,8)$ **c** $(8\,,\,3)$ **d** $(3\,,\,8)$

📋 **خلاصة البند 2-1 (طرق الحل)**

① $\lvert ax+b\rvert=c$	② $\lvert ax+b\rvert=\lvert cx+d\rvert$	③ $\lvert ax+b\rvert=cx+d$
$c>0$: حلان $ax+b=\pm c$	إما $ax+b=cx+d$	① شرط الحل $cx+d\geq 0$
$c=0$: حل واحد	أو $ax+b=-(cx+d)$	② نحل الحالتين
$c<0$: $S.S.=\emptyset$	أو بتربيع الطرفين	③ نقبل ما يحقق الشرط فقط ✅

🌟 **تذكّر: لا تنسَ شرط الحل عندما يكون الطرف الآخر متغيرًا** 💡

1-3 حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد «جبريًّا وبيانيًّا»

Solving a Quadratic Equation in one Variable Algebraically and Graphically

فكرة الدرس:

حل المعادلة التربيعية باستخدام القانون – بيانيًّا.

المصطلحات:

1. المميز Discriminant 2. القانون العام Quadratic Formula

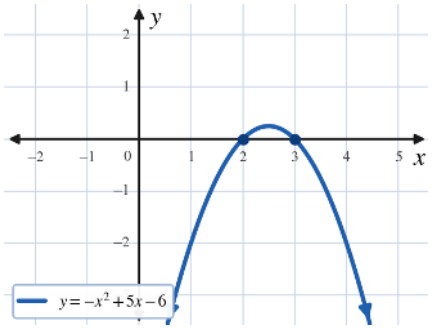
فيما سبق تعلمنا:

– التمثيل البياني للدالة.

– حل المعادلة التربيعية: باستخدام التحليل، وباستخدام إكمال المربع.

مسألة الدرس:

في الشكل المقابل يُمثِّل الماء الخارج من النافورة منحنى قطع مكافئ، ويمكن تمثيل هذا المسار بالدالة التربيعية: $y = -x^2 + 5x - 6$



1. أوجد الإحداثيات السينية لنقطتي تقاطع المنحنى مع المحور السيني؟

.....

.....

2. أوجد إحداثيات الرأس (أعلى نقطة للمنحنى)؟

.....

.....

مفاهيم أساسية:

1. الدالة الثابتة: $f(x) = c\ ,\ c \in \mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الصفرية) وتمثيلها البياني يكون خطًّا مستقيمًا أفقيًّا يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات عند القيمة c .

2. الدالة الخطية: $f(x) = ax + b\ ,\ a \neq 0\ ,\ a, b \in \mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الأولى) وتمثيلها البياني على شكل خط مستقيم.

3. الدالة التربيعية: $f(x) = ax^2 + bx + c\ ,\ a \neq 0\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الثانية) تمثل قطعًا مكافئًا مفتوحًا للأعلى إذا كانت $a > 0$ ، ومفتوحًا للأسفل إذا كانت $a < 0$.

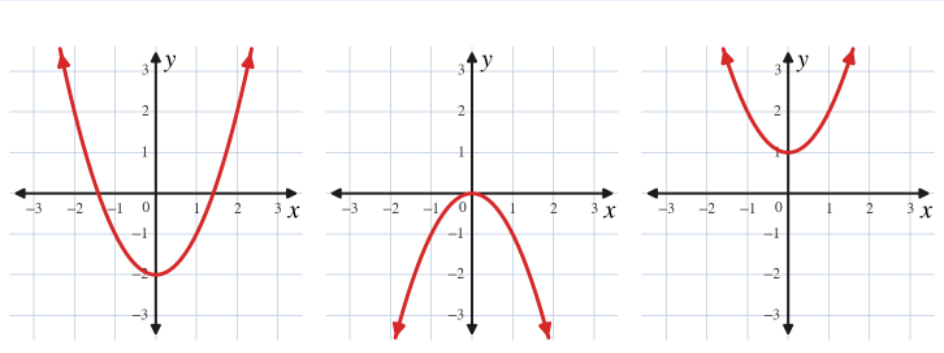
تذكَّر!

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

📈 حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (المعادلة التربيعية) بيانيًّا

📌 لحل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بيانيًّا نتبع الخطوات التالية:

1. ضع المعادلة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0$
2. افرض أن: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، ثم ارسم منحنى الدالة f
3. عيّن نقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات فتكون الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع هي حلول المعادلة $f(x) = 0$



المنحنى يقطع محور السينات في نقطتين، يوجد حلان مختلفان للمعادلة في $\mathbb{R}$

عدد الحلول = 2

المنحنى يقطع محور السينات في نقطة واحدة، يوجد حلان حقيقيان متساويان في $\mathbb{R}$

عدد الحلول = 1 مكرر

المنحنى لا يقطع محور السينات، لا يوجد حل للمعادلة في $\mathbb{R}$

عدد الحلول = 0

🔍 ملحوظة:

الدالة التربيعية تسمى (دالة القطع المكافئ) تتغير فتحة القطع المكافئ للأسفل إذا كان المعامل الرئيسي لها عددًا سالبًا.

🔍 ملحوظة:

مجموعة الحل هي: الإحداثيات السينية لتقاطع المنحنى مع محور السينات.

✏️ مثال (1)

أوجد بيانيًّا مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعينًا بالفترة الموضحة:

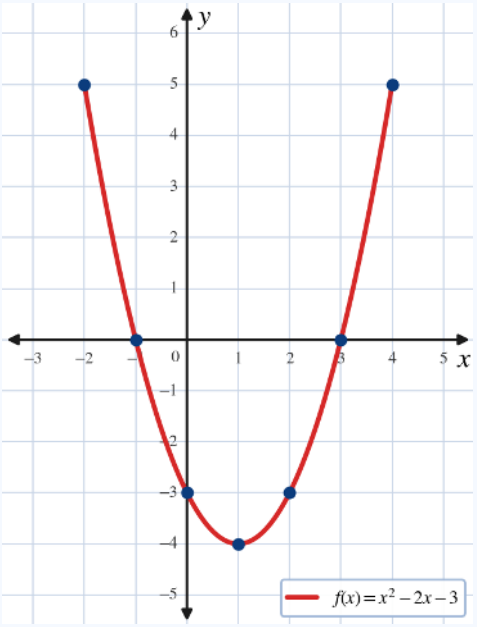
a $x^2 - 2x - 3 = 0\ ,\ [-2\ ,\ 4]$ **b** $-x^2 - 4x - 4 = 0\ ,\ [-4\ ,\ 0]$ **c** $x^2 + 2 = 0\ ,\ [-2\ ,\ 2]$

✅ الحل:

a $x^2 - 2x - 3 = 0\ ,\ [-2\ ,\ 4]$

نفرض أن $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ، ونكون جدول القيم:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5



من الرسم:

نلاحظ أن الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات هي $x = -1\ ,\ x = 3$

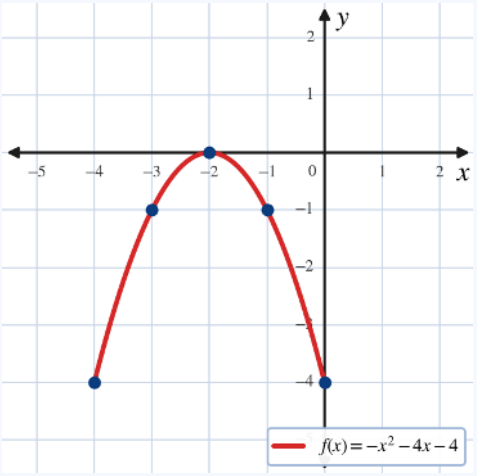
وبالتالي فإن مجموعة الحل هي:

$\therefore S.S. = \{-1\ ,\ 3\}$

b $-x^2 - 4x - 4 = 0\ ,\ [-4\ ,\ 0]$

نفرض أن $f(x) = -x^2 - 4x - 4$ ، ونكون جدول القيم:

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	-4	-1	0	-1	-4



من الرسم:

نلاحظ أن الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات هي $x = -2$

وبالتالي فإن مجموعة الحل هي:

$\therefore S.S. = \{-2\}$

c $x^2 + 2 = 0\ ,\ [-2\ ,\ 2]$

نفرض أن $f(x) = x^2 + 2$ ، ونكون جدول القيم:

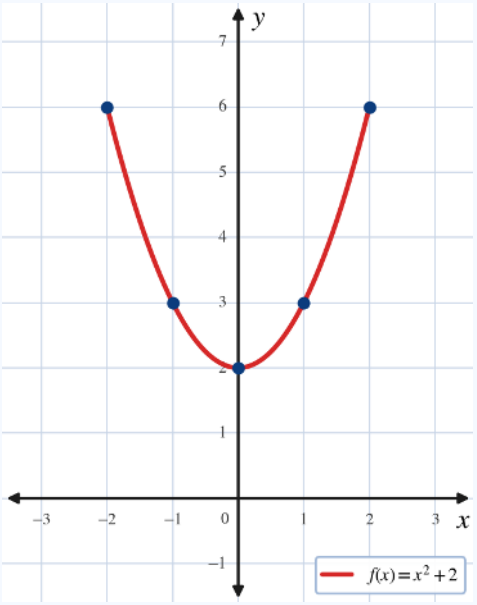
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	6	3	2	3	6

من الرسم:

نلاحظ أن المنحنى لا يقطع محور السينات نهائيًّا

وبالتالي فإن مجموعة الحل هي:

$\therefore S.S. = \emptyset$



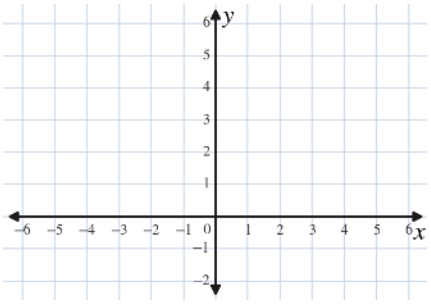
⚠ انتبه:

الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات هي التي عندها $f(x) = 0$

🎯 تحقق من فهمك (1)

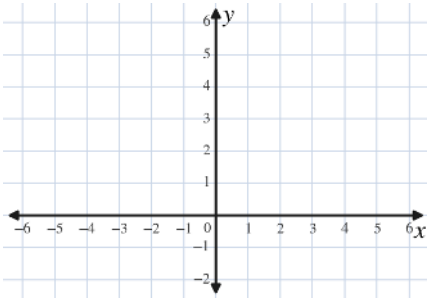
أوجد بيانيًّا مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعينًا بالفترة الموضحة:

a $x^2 - 6x + 8 = 0\ ,\ [1\ ,\ 5]$



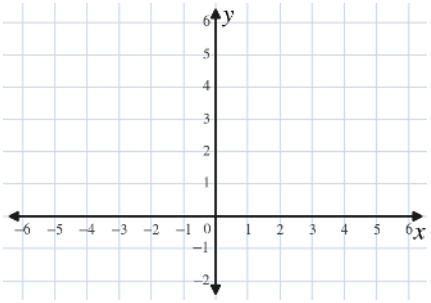
x					
$f(x)$					

b $x^2 + 4x + 4 = 0\ ,\ [-4\ ,\ 0]$



x					
$f(x)$					

c $x^2 + 4x + 5 = 0\ ,\ [-4\ ,\ 0]$



x					
$f(x)$					

.....

.....

.....

.....

📚 **تعلمنا سابقًا:** إيجاد حل المعادلة التربيعية باستخدام التحليل إلى عاملين وباستخدام إكمال المربع، ولكن يوجد قانون عام لحل المعادلة التربيعية. والآن سنقوم باستنتاج القانون العام لحل أي معادلة تربيعية.

🔬 استنتاج القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

$$ax^2 + bx + c = 0\ ,\ a \neq 0\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

إضافة المعكوس الجمعي لـ c للطرفين $\quad ax^2 + bx = -c$

قسمة الطرفين على a $\quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

بإكمال المربع $\quad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

بتحليل الطرف الأيمن $\quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

بتوحيد المقام $\quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $\quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\ ,\ b^2 - 4ac \geq 0$

بطرح $\frac{b}{2a}$ من الطرفين $\quad x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

⭐ القانون العام لحل المعادلات التربيعية في متغير واحد وهو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ,\ b^2 - 4ac \geq 0\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R}\ ,\ a \neq 0$$

يُسمى المقدار $b^2 - 4ac$ **مميّز المعادلة التربيعية**، ويرمز له بالرمز Δ ويقرأ (دلتا)، والمميز هو الذي يميّز نوع الجذرين ويحدد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة بدون حلها، أي أن: $\Delta = b^2 - 4ac$

📊 نوع الجذرين حسب إشارة المميز:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
فإن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان	فإن للمعادلة جذران حقيقيان متساويان	فإنه لا يوجد للمعادلة جذور حقيقية
عدد الحلول = 2	**عدد الحلول = 1 (مكرر)**	**عدد الحلول = 0**

⚠️ انتبه:

المعادلة التربيعية مثل القفل له مفتاح ثابت، والقانون العام هو المفتاح الذي يفتح أي معادلة تربيعية مهما كانت صعبة 🔑، وهو خطة إنقاذ ثابت لحل المعادلة التربيعية التي يستحيل حلها بالتحليل.

🧠 تذكَّر! المربع الكامل:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ، $\sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt{(x+a)^2} = |x+a|$ ،

$|x+a| = c\ ,\ c > 0 \therefore x + a = \pm c$

✏️ مثال (2)

حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة: a $4x^2 - 4x - 3 = 0$ b $2x^2 - 4x + 2 = 0$ c $x^2 + 2x + 3 = 0$

✅ الحل:

a $4x^2 - 4x - 3 = 0$

$a = 4\ ,\ b = -4\ ,\ c = -3$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4(4)(-3)$

$= 64$

$\therefore \Delta > 0$

∴ عدد الحلول = 2

b $2x^2 - 4x + 2 = 0$

$a = 2\ ,\ b = -4\ ,\ c = 2$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4(2)(2)$

$= 0$

$\therefore \Delta = 0$

∴ عدد الحلول = 1 (مكرر)

c $x^2 + 2x + 3 = 0$

$a = 1\ ,\ b = 2\ ,\ c = 3$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (2)^2 - 4(1)(3)$

$= -8$

$\therefore \Delta < 0$

∴ عدد الحلول = 0

🎯 تحقق من فهمك (2)

حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة:

a $2x^2 - 7x - 4 = 0$

b $x^2 - 10x + 25 = 0$

c $3x^2 - 2x + 2 = 0$

d $x^2 = 15$

e $x^2 - x = 0$

f $2x^2 - 8x + 8 = 0$

مثال (3)

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون: a $x^2 - x - 5 = 0$ b $x^2 - 8 = 0$ c $x^2 - 6x + 9 = 0$ d $x^2 = x + 1$

الحل:

a $x^2 - x - 5 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:** $a = 1\ ,\ b = -1\ ,\ c = -5$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-5) = 21$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{21}}{(2)(1)}$$

إما

$$x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

أو

$$x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$$

$$\therefore S.S. = \left\{ \frac{1 + \sqrt{21}}{2}\ ,\ \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \right\}$$

b $x^2 - 8 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:** $a = 1\ ,\ b = 0\ ,\ c = -8$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-8) = 32$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{32}}{(2)(1)}$$

إما

$$x = \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}$$

أو

$$x = \frac{-\sqrt{32}}{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\therefore S.S. = \{ 2\sqrt{2} \ , \ -2\sqrt{2} \ \}$$

c $x^2 = x + 1$

نضع المعادلة في الصورة العامة فتصبح: $x^2 - x - 1 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:** $a = 1 \ , \ b = -1 \ , \ c = -1$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

∴ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{(2)(1)}$$

إما

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

أو

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore S.S. = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \ , \ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$$

d $x^2 - 6x + 9 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:** $a = 1 \ , \ b = -6 \ , \ c = 9$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 0$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta = 0$

∴ للمعادلة حلان حقيقيان متساويان هما:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{(2)(1)} \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$\therefore S.S. = \{3\}$$

⚠️ انتبه:

توضع المعادلة دائمًا على الصورة العامة $ax^2+bx+c=0$ ثم نوجد قيمة Δ فإن: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

⚠️ انتبه:

في المعادلة التربيعية إذا كانت $b=0$ فإن: $x=\dfrac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x^2-8=0 \Rightarrow x^2=8$

$|x|=2\sqrt{2} \Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$

ℹ️ معلومة:

العدد الذهبي يساوي $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$ تقريبًا ✨

🎯 تحقق من فهمك (3)

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون:

a $x^2-4x+2=0$

b $4x^2-5x+1=0$

c $x^2-2x+1=0$

d $x^2-6x+8=0$

✏️ مثال (4)

حل المعادلة التالية باستخدام القانون: $x^2-3x=0$

✅ الحل:

$x^2 - 3x = 0$

1. الصورة العامة للمعادلة
2. نوجد قيم a , b , c — $a = 1\ ,\ b = -3\ ,\ c = 0$
3. نوجد المميز Δ — $\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(0) = 9$
4. نحدد نوع الجذرين — $\therefore \Delta > 0$
5. نوجد الجذرين باستخدام القانون — $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9}}{2}$

∴ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما:

إما

$$x = \frac{3 + \sqrt{9}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3$$

أو

$$x = \frac{3 - \sqrt{9}}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

$\therefore S.S. = \{0\ ,\ 3\}$

⚠️ انتبه:

إذا كانت $\Delta = 0$ فإن حل المعادلة هو $x = \dfrac{-b}{2a}$

🔍 ملحوظة:

إذا كان معامل x^2 عدد سالب فإن منحنى الدالة التربيعية يكون مفتوحًا للأسفل.

🎯 تحقق من فهمك (4)

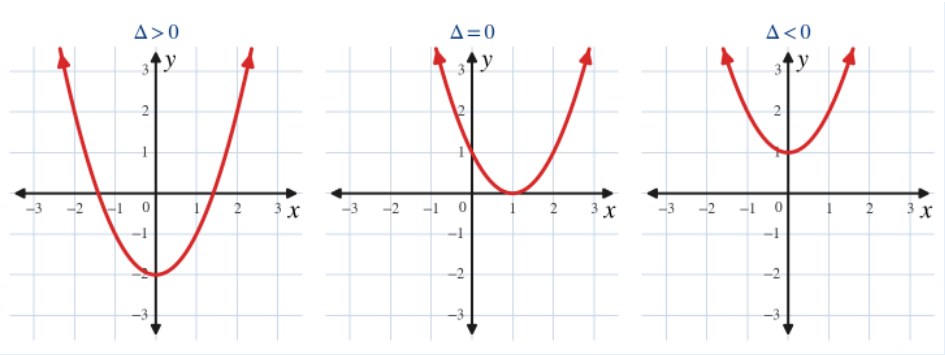
حل المعادلتين التاليتين باستخدام القانون:

a $x^2 + 7x + 10 = 0$

b $2x^2 - 5x - 52 = 0$

⭐ تعميم: للدالة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ **حيث** $a, b, c \in \mathbb{R}\ ,\ a \neq 0$

$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
المميز: موجب	المميز: صفر	المميز: سالب
عدد الحلول: حلان حقيقيان مختلفان	عدد الحلول: حلان حقيقيان متساويان	عدد الحلول: لا يوجد حلول حقيقية



✏️ مثال (5)

عددان فرديان متتاليان مجموع مربعيهما 34 فما العددان؟

✅ **الحل:**

نفرض أن العدد الفردي الأول $= x$ ∴ العدد الفردي الثاني $= x + 2$

∵ مجموع مربعي العددين $= 34$

$$(x)^2 + (x+2)^2 = 34$$
$$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 34 = 0$$
$$2x^2 + 4x - 30 = 0$$
$$2(x^2 + 2x - 15) = 0$$
$$2 \neq 0\ ,\ \therefore x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$(x-3)(x+5) = 0$$

إما

$x - 3 = 0$
$x = 3$

العدد الفردي الأول 3

العدد الفردي الثاني 5

أو

$x + 5 = 0$
$x = -5$

العدد الفردي الأول −5

العدد الفردي الثاني −3

∴ **العددان الفرديان هما** $5\ ,\ 3$ **أو** $-3\ ,\ -5$

❓ **هل يمكن الحل بطريقة أخرى؟**

.....

.....

⚠️ **انتبه: إذا كان العدد هو x فإن:**

- ضعف العدد $= 2x$
- ثلاثة أمثال العدد $= 3x$
- العدد الذي يليه $= x + 1$
- مربع العدد $= x^2$
- عدد فردي فإن العدد الفردي الذي يليه هو $x + 2$
- عدد زوجي فإن العدد الزوجي الذي يليه هو $x + 2$

🎯 تحقق من فهمك (5)

a أوجد عددين زوجيين متتاليين مجموع مربعيهما 100

b مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار $3\ cm$ ومساحته $40\ cm^2$ أوجد بعدي المستطيل.

🔍 **ملحوظة:**

الأبعاد لا يمكن أن تكون قيمها بالسالب.

استخدام النماذج

ملعب كرة القدم في استاد جابر الدولي في الكويت مستطيل الشكل، إذا كان عرض الملعب x مترًا، وكان طوله يزيد عن عرضه بمقدار 37 مترًا، فإذا علمت أن مساحة الملعب 7140 مترًا مربعًا: أوجد عرض الملعب وطوله؟

✅ **الحل:**

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

مساحة الملعب
$$x(x+37)=7140$$

تحويل المساحة إلى الصورة العامة للدالة التربيعية
$$x^2+37x-7140=0$$

نستخدم القانون العام
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-37\pm\sqrt{(37)^2-4(1)(-7140)}}{2(1)}=\frac{-37\pm\sqrt{29929}}{2}=\frac{-37\pm173}{2}$$

إما
$$x=\frac{-37+173}{2}=68$$
✅ (مقبولة)

أو
$$x=\frac{-37-173}{2}=-105$$
❌ (مرفوضة)

عرض الملعب هو 68 مترًا ⇐ $68+37=105$

∴ **طول الملعب يساوي 105 مترًا** ⚽

أتدرب وأحل المسائل

أولًا – البنود الموضوعية:

■ **في البنود من (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:**

(1) جذرا المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ هما جذران حقيقيان متساويان (a) (b)

(2) المعادلة $x^2 - 4x + 4 = 0$ لها جذران حقيقيان متساويان (a) (b)

(3) جذرا المعادلة $x^2 + 9 = 0$ هما $3\ ,\ -3$ (a) (b)

■ **في البنود من (1-7) اختر الإجابة الصحيحة:**

(1) المعادلة $x^2 - 6x + 9 = 0$

(a) لها جذران حقيقيان مختلفان
(b) لها جذران حقيقيان متساويان
(c) ليس لها جذور حقيقية
(d) ليس أيًا مما سبق

(2) المعادلة $x^2 + 4x + 5 = 0$

(a) لها جذران حقيقيان مختلفان
(b) لها جذران حقيقيان متساويان
(c) ليس لها جذور حقيقية
(d) ليس أيًا مما سبق

(3) جذرا المعادلة $x^2 - 3x - 4 = 0$ هما:

(a) $-1\ ,\ 4$
(b) $1\ ,\ 4$
(c) $-2\ ,\ 2$
(d) $-1\ ,\ 3$

(4) حل المعادلة $x^2 = 9$ هو:

(a) 3
(b) -3
(c) ± 3
(d) لا يوجد حل

(5) جذرا المعادلة $2x^2 - 7x + 3 = 0$ هما:

(a) $\frac{1}{2}\ ,\ 3$
(b) $1\ ,\ 3$
(c) $2\ ,\ 3$
(d) $1\ ,\ \frac{3}{2}$

(6) حل المعادلة $x^2 - 25 = 0$ هو:

(a) 5
(b) -5
(c) ± 5
(d) لا يوجد حل

(7) المعادلة التي مجموع جذريها يساوي 5 فيما يلي:

(a) $(x + 1)(x + 4) = 0$
(b) $x(x - 5) = 0$
(c) $(x - 1)(x + 6) = 0$
(d) $(x - 5)(x + 1) = 0$

ثانيًا – أسئلة المقال:

(1) أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية باستخدام القانون العام:

a $x^2 - 3x - 10 = 0$

b $2x^2 - 5x - 3 = 0$

c $\frac{1}{2}x^2 - 3 = 0$

d $3x^2 + x - 2 = 0$

(2) أوجد نوع الجذرين للمعادلتين التاليتين ثم تحقق باستخدام القانون:

a $x^2 - 4x - 5 = 0$

b $2x^2 - 4x + 2 = 0$

(3) أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $\frac{1}{2}x(x+6)=8$

b $2x(x+1)=2$

(4) ثلاثة أعداد موجبة متتالية مربع أكبرهم يساوي مجموع مربعي العددين الآخرين، أوجد هذه الأعداد.

(5) عددان زوجيان متتاليان مجموع مربعيهما يزيد عن حاصل ضربهما بمقدار 28 ، فما العددان؟

مهارات تفكير عليا

■ **اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:**

(1) إذا كانت المعادلة $x^2-6x-k=0$ لها جذران حقيقيان متساويان فإن قيمة k هي 3 **a** **b**

■ **في البنود من (2-5) اختر الإجابة الصحيحة:**

(2) إذا كانت المعادلة $x^2 - kx + 4 = 0$ ليس لها جذور حقيقية فإن k تحقق:

a $k^2 > 16$ b $k^2 = 16$ c $k^2 < 16$ d $k > 16$

(3) مجموعة حل المعادلة $x^2 = 2 - |x|$ هي:

a $\{1\,,\ -1\}$ b $\{2\,,\ -2\}$ c $\{1\,,\ -2\}$ d $\{-1\,,\ 2\}$

(4) مجموعة حل المعادلة $x^2 - 2|x| = 8$ هي:

a $\{2\,,\ -2\}$ b $\{4\,,\ -4\}$ c $\{2\,,\ 4\}$ d $\emptyset$

(5) إذا كانت $|x| > x$ ، $x^2 + 2x - 3 = 0$ فإن $2x + 4$ تساوي:

a -2 b 2 c 6 d 8

(6) أوجد قيمة k بحيث يكون للمعادلة التالية جذران حقيقيان متساويان: $x^2 + kx + 4 = 0$

(7) حُلَّ كلًّا من المعادلتين التاليتين:

a $x^2 - 3|x| - 28 = 0$

b $|x-3|^2 - |x-3| - 6 = 0$

⚠ **انتبه:**

مربع العدد x هو x^2 ، وضعف العدد x هو $2x$

📋 **خلاصة البند 1-3**

① الحل البياني

الحلول = الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات

② المميز

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

موجب: حلان ، صفر: حل مكرر ، سالب: لا حلول

③ القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

🌟 **رتّب المعادلة على الصورة العامة أولًا ثم احسب المميز** 💡

1-4 إيجاد مجموع وناتج ضرب جذري معادلة تربيعية – تكوين المعادلة التربيعية بمعلومية جذريها

Sum and Product of Roots of a Quadratic Equation – Forming a Quadratic Equation

فكرة الدرس:

– إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين من معادلة تربيعية.

– تكوين المعادلة التربيعية بمعلومية جذريها.

المصطلحات:

1. مجموع الجذرين Sum of the Roots 2. حاصل ضرب الجذرين Product of the Roots

تعلمنا فيما سبق:

كيفية إيجاد جذري المعادلة التربيعية في متغير واحد بعدة طرق: التحليل – إكمال المربع – القانون العام لحل المعادلة التربيعية – بيانيًا.

مسألة الدرس:

إذا علمت أن جذري المعادلة: $x^2 - 5x + 6 = 0$ هما $m = 3$, $\ell = 2$ فأجب عن الأسئلة التالية:

1. أوجد مجموع جذري المعادلة.
2. أوجد ناتج ضرب جذري المعادلة.
3. أوجد: $a =$ ..... ، $b =$ ..... ، $c =$ .....
4. أوجد: $\frac{-b}{a} =$ ..... ، $\frac{c}{a} =$ .....
5. هل توجد علاقة بين مجموع جذري المعادلة ومعاملات حدودها؟
6. هل توجد علاقة بين ناتج ضرب جذري المعادلة ومعاملات حدودها؟

.....

.....

تذكَّر! الصورة العامة:

$ax^2 + bx + c = 0$ ، a معامل x^2 ، b معامل x ، c الحد الثابت

أولًا: إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين للمعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بدون حلها

مما سبق: ∵ جذرا المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هما:

$$x_2 = m = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_1 = \ell = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

فإن:

① $x_1 + x_2 = \ell + m = \frac{-b}{a}$ (مجموع الجذرين) ② $x_1 \cdot x_2 = \ell \cdot m = \frac{c}{a}$ (حاصل ضرب الجذرين)

$$x_1 - x_2 = \ell - m = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \ , \ |\ell - m| = \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| \ ③$$

🏋 تدرب: أكمل الجدول التالي

المعادلة	المعاملات	مجموع الجذرين	حاصل ضرب الجذرين
$2x^2 + 5x - 12 = 0$	$a = 2 \ , \ b = 5 \ , \ c = -12$	$\frac{-5}{2}$	$\frac{-12}{2} = -6$
$3x^2 = 23x - 30$	$a = \quad , b = \quad , c =$		
$(2x - 3)(x + 2) = 0$	$a = \quad , b = \quad , c =$		
$2x^2 + x - 6 = 0$	$a = \quad , b = \quad , c =$		
$ax^2 + bx + c = 0 \ , \ a = 1$	$a = \quad , b = \quad , c =$		

⚠ انتبه:

- يجب وضع المعادلة في الصورة العامة.
- استخرج قيم كل من a, b, c .
- التأكد من حفظ قانون مجموع جذري المعادلة وناتج ضربهما.
- دائمًا نرمز لجذري المعادلة بالرمز $\ell \ , \ m$

🧠 تذكَّر!

- مجموع جذري المعادلة التربيعية هو $\frac{-b}{a}$
- حاصل ضرب جذري المعادلة هو $\frac{c}{a}$

🤔 فكِّر معي: إذا علمت أن $\ell \ , \ m$ هما جذرا المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ أوجد: $\ell \cdot m \ , \ \ell + m$ في الحالتين التاليتين:

(a) عندما $a = b$ (b) عندما $a = c$

.....

.....

.....

✏ مثال (1)

إذا كان حاصل ضرب جذرا المعادلة $2x^2 - 3x + c = 0$ يساوي -1 أوجد قيمة c .

✅ الحل:

من المعادلة نوجد: $a = 2 \ , \ b = -3 \ , \ c = c$

بفرض أن $\ell \ , \ m$ هما جذري المعادلة فإن ناتج ضرب الجذرين: $\ell \cdot m = \frac{c}{a}$

$$\therefore \ -1 = \frac{c}{2} \ \Rightarrow \ \therefore c = -2$$

🔍 ملحوظة:

تستخدم قانون حاصل ضرب الجذرين.

🎯 تحقق من فهمك (1)

إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $3x^2 + 10x - c = 0$ **يساوي** $\frac{-8}{3}$ **أوجد قيمة** c **.**

✏️ مثال (2)

إذا كان مجموع جذري المعادلة: $2x^2 + bx - 5 = 0$ **هو** $\frac{3}{2}$ **، فأوجد قيمة** b **.**

✅ الحل:

من المعادلة نوجد: $a = 2\ ,\ b = b\ ,\ c = -5$

∵ مجموع جذري المعادلة هو: $\ell + m = \frac{3}{2}$

$$\therefore \frac{-b}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-b}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow -b = 3 \Rightarrow \therefore b = -3$$

🔍 ملحوظة:

تستخدم قانون مجموع الجذرين.

🎯 تحقق من فهمك (2)

إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $ax^2 - 5x + 2 = 0$ **يساوي** $\frac{3}{2}$ **أوجد قيمة** a **، ثم حل المعادلة.**

⚠️ انتبه:

عندما $c = a$ في المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ فإن $\ell \cdot m = 1$ والجذرين أحدهما نظير ضربي للآخر.

مثال (3)

إذا كان ℓ , m هما جذري المعادلة $2x^2 - 8x + 5 = 0$ ، فأوجد القيم العددية لكل مما يلي: a $\ell^2 + m^2$ b $\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m}$ c $\ell - m$

الحل:

من المعادلة نوجد: $a = 2$, $b = -8$, $c = 5$ ، $\ell \cdot m = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$, $\ell + m = \frac{-b}{a} = 4$

a $\ell^2 + m^2$
$= (\ell + m)^2 - 2\ell \cdot m$
$= (4)^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right) = 11$

b $\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m}$
$= \frac{m + \ell}{\ell \cdot m} = \frac{4}{\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{8}{5}$

c $\ell - m$
$= \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| = \left|\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}\right|$
$= \left|\frac{\sqrt{(-8)^2 - 4(2)(5)}}{2}\right| = \left|\frac{2\sqrt{6}}{2}\right| = \sqrt{6}$

انتبه:

1. $(\ell + m)^2 = \ell^2 + m^2 + 2\ell m$
2. $\ell^2 + m^2 = (\ell + m)^2 - 2\ell m$
3. $\ell - m = \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|$
4. $(\ell - m)^2 = (\ell + m)^2 - 4\ell m$
5. $\ell^3 + m^3 = (\ell + m)[(\ell + m)^2 - 3\ell m]$
6. $xy + xz = x(y + z)$
7. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

تحقق من فهمك (3)

إذا علمت أن جذري المعادلة $x^2 - 7x + 9 = 0$ هما ℓ , m ، فأوجد قيمة كل من: a $\ell + m$ b $\ell \cdot m$ c $\ell^2 + m^2$

ثانيًا: إيجاد المعادلة التربيعية إذا عُلِم جذراها

استكشف

بفرض أن ℓ , m هما جذرا المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

1. أوجد: $\ell + m =$ ..... = مجموع الجذرين

2. أوجد: ..... $= \ell \cdot m =$ حاصل ضرب الجذرين

3. من المعادلة التربيعية قسِّم طرفي المعادلة على a : .....

4. قارن بين النتائج في ①، ②، ③ ماذا تلاحظ؟ .....

تكون المعادلة على الصورة: $x^2 - (\ldots\ldots)x + (\ldots\ldots) = 0$ ⬅ يعبر عن ..... ، .....

⭐ تعميم:

إذا كان ℓ , m هما جذرا المعادلة التربيعية فإن المعادلة التربيعية تكون على الصورة:

$$x^2 - (\ell + m)\,x + (\ell \cdot m) = 0$$

حيث $(\ell + m)$ ⬅ مجموع الجذرين ، $(\ell \cdot m)$ ⬅ حاصل ضرب الجذرين

✏️ مثال (4)

كوِّن معادلة تربيعية في متغير واحد والتي جذراها -3 , 4 بطريقتين مختلفتين.

✅ الحل:

الطريقة الأولى: ليكن ℓ , m هما جذرا المعادلة التربيعية:

مجموع الجذرين $\ell + m = (-3) + 4 = 1$

ناتج الضرب $\ell \cdot m = (-3) \cdot (4) = -12$

والمعادلة التربيعية تكون على الصورة:

$$x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) = 0$$
$$x^2 - (1)x + (-12) = 0$$
$$x^2 - x - 12 = 0$$

الحل الآخر: عندما يكون ℓ , m هما جذرا المعادلة فإن المعادلة تكون على الصورة:

$$(x - \ell)(x - m) = 0$$
$$(x - (-3))(x - 4) = 0$$
$$(x + 3)(x - 4) = 0$$
$$x^2 - 4x + 3x - 12 = 0$$
$$x^2 - x - 12 = 0$$

ℹ️ معلومة:

المعادلة التربيعية على الصورة: $(x - \ell)(x - m) = 0$ جذراها ℓ , m

🔍 ملحوظة:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

🎯 تحقق من فهمك (4)

أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها معلومان في الحالات التالية: (a) 3 , 5 (b) 4 , $\frac{-1}{3}$ (c) 2 , -2

a $3\,,\,5$

b $4\,,\,\dfrac{-1}{3}$

c $2\,,\,-2$

🤔 **فكِّر معي: هل المعادلة التربيعية التي جذراها $3\,,\,-3$ هي معادلة تربيعية وحيدة؟**

ملحوظة هامة جدًّا (بصورة عامة): إذا كان جذرا المعادلة التربيعية هما $m\,,\,\ell$ فإنه يوجد عدد غير منتهٍ من المعادلات والتي لها الجذران نفسهما ويمكن كتابتها على الصورة العامة:

$$k[x^2-(\ell+m)x+(\ell\cdot m)]=0\ ,\ k\in\mathbb{R}^*$$

فمثلًا: حل المعادلة $x^2-5x+6=0$ هو نفس حل المعادلات التالية: $2(x^2-5x+6)=0$ ، $3(x^2-5x+6)=0$ وهكذا ....

🔍 **ملحوظة:**

1. $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$
2. $a\cdot b=0\Leftrightarrow a=0 \text{ or } b=0$

🧠 **تذكَّر!**

المعادلة التربيعية في متغير واحد تسمى: معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد.

✏️ **مثال (5)**

كوِّن المعادلة التربيعية التي جذراها: **a** $\dfrac{4}{3}\,,\,\dfrac{3}{4}$ **b** $5\sqrt{3}\ ,\ -5\sqrt{3}$

✅ **الحل:**

a لتكن $m\,,\,\ell$ هما جذرا المعادلة فإن:

مجموع الجذرين $\ell+m=\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{25}{12}$

حاصل ضرب الجذرين $\ell\cdot m=\left(\dfrac{4}{3}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)=1$

∴ المعادلة التربيعية هي:

$$x^2-(\ell+m)x+(\ell\cdot m)=0$$
$$x^2-\left(\frac{25}{12}\right)x+1=0$$
$$\therefore 12x^2-25x+12=0$$

b لتكن $m\,,\,\ell$ هما جذرا المعادلة فإن:

$$\ell+m=5\sqrt{3}+\left(-5\sqrt{3}\right)=0$$
$$\ell\cdot m=\left(5\sqrt{3}\right)\cdot\left(-5\sqrt{3}\right)=-75$$

∴ المعادلة التربيعية هي:

$$x^2-(\ell+m)x+(\ell\cdot m)=0$$
$$x^2-0x+(-75)=0$$
$$x^2-75=0$$

⚠️ **انتبه:**

إذا كانت $\ell+m=0$ فإن: $m\,,\,\ell$ نظير جمعي للآخر ، إذا كانت $\ell\cdot m=1$ فإن: $m\,,\,\ell$ نظير ضربي للآخر ، $a=c$

تحقق من فهمك (5)

كوِّن المعادلة التربيعية التي جذراها: $3\sqrt{2}\ ,\ -3\sqrt{2}$

ثالثًا: تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة أخرى

مثال (6)

إذا كان $m\ ,\ \ell$ هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2-3x-1=0$ كوِّن المعادلة التربيعية التي جذراها $2m\ ,\ 2\ell$

الحل:

من المعادلة المعلومة:

$$a=2\ ,\ b=-3\ ,\ c=-1$$

$$\ell+m=\frac{-b}{a}=\frac{-(-3)}{2}=\frac{3}{2}\ ,\ \ell\cdot m=\frac{c}{a}=\frac{-1}{2}$$

مجموع جذري المعادلة المطلوبة

$$2\ell+2m=2(\ell+m)=2\left(\frac{3}{2}\right)=3$$

حاصل ضرب جذري المعادلة المطلوبة

$$2\ell\cdot 2m=4(\ell\cdot m)=4\left(\frac{-1}{2}\right)=-2$$

المعادلة التربيعية هي:

$$x^2-(2\ell+2m)x+(2\ell\cdot 2m)=0$$

$$x^2-3x-2=0$$

تحقق من فهمك (6)

إذا كان $m\ ,\ \ell$ هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2+15x-8=0$ كوِّن المعادلة التربيعية التي جذراها: $2m\ ,\ 2\ell$

ملحوظة هامة: في المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ إذا علمت أن $m\ ,\ \ell$ هما جذرا المعادلة:

1. عند $b=0$ فإن $\ell+m=0$ والجذرين أحدهما نظير جمعيٌّ للآخر.
2. عند $c=a$ فإن $\ell\cdot m=1$ والجذرين أحدهما نظير ضربيٌّ للآخر.

أتدرب وأحل المسائل

أولًا – البنود الموضوعية:

■ **في البنود (1-5) اختر الإجابة الصحيحة:**

(1) إذا كان ناتج ضرب جذري المعادلة التربيعية $x^2 - 3x + c = 0$ يساوي 2 فإن c يساوي:

a -4 b -2 c 4 d 2

(2) إذا كان مجموع جذري المعادلة $x^2 - ax + 6 = 0$ يساوي 5 فإن a يساوي:

a -6 b -5 c 5 d 6

(3) إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 - (m+2)x + 3 = 0$ هو معكوس جمعي للآخر فإن m تساوي:

a 3 b 2 c -2 d -3

(4) عددان حقيقيان مجموعهما 2 و حاصل ضربهما -35 هما:

a $5\,,\ 7$ b $-5\,,\ -7$ c $-7\,,\ 5$ d $7\,,\ -5$

(5) حاصل ضرب جذري المعادلة $x(2x - 3) = 7$ يساوي:

a $\frac{-3}{2}$ b $\frac{3}{2}$ c $\frac{-7}{2}$ d $\frac{7}{2}$

ثانيًا – أسئلة المقال:

(1) كوِّن كلًّا من المعادلات التربيعية التالية والتي جذراها:

a $2\,,\ 3$

b $-5\,,\ -7$

c $\frac{3}{4}\,,\ \frac{5}{8}$

d $2a\,,\ -\frac{1}{2}a$

(2) كوِّن معادلة الدرجة الثانية التي جذراها متساويان وكل منهما يساوي $-1\frac{1}{2}$

(3) إذا كان مجموع جذري المعادلة $x^2 - 5\ell x + m = 0$ هو 10 وحاصل ضربهما يساوي 6 فما قيمة كل من $\ell\ ,\ m$ ؟ ثم أوجد قيمة الجذرين.

(4) إذا كان $\ell\ ,\ m$ هما جذرا المعادلة $x^2 - 5x - 4 = 0$ فأوجد المعادلة التي جذراها $\ell^2\ ,\ m^2$

(5) إذا كان $\ell\ ,\ m$ هما جذري المعادلة $x^2 - 3x + 1 = 0$ ، فأوجد المعادلة التي جذراها $\ell + m\ ,\ \ell \cdot m$

(6) إذا كان $\ell\ ,\ m$ هما جذرا المعادلة $x^2 - 7x + 5 = 0$ ، فأوجد المعادلة التي جذراها $\frac{1}{\ell}\ ,\ \frac{1}{m}$

(7) إذا كان $m\ ,\ \ell$ هما جزرا المعادلة $x^2-4x+1=0$ فما قيمة: **a** $\frac{4}{\ell}\ ,\ \frac{4}{m}$ **b** $\ell-m$

(8) 🏆 **سؤال تحدٍّ:** أوجد قيمة k التي تجعل مجموع جذري المعادلة $x^2-(k+2)x+2=0$ يساوي حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2-3kx+k^2=0$

🚀 مهارات تفكير عليا

(1) إذا كان $m\ ,\ \ell$ جزرا المعادلة $x^2+2x-3=0$ ، فأوجد معادلة من الدرجة الثانية جزراها $\ell+\frac{1}{\ell}\ ,\ m+\frac{1}{m}$

(2) لتكن $m\ ,\ \ell$ جزراها المعادلة $-4x^2+5x+7=0$ أوجد: **a** $(2\ell-3)(2m-3)$ **b** كوِّن معادلة تربيعية جزراها $\ell+1\ ,\ m+1$ **c** كوِّن معادلة تربيعية جزراها $2\ell\ ,\ 2m$

(3) اختر الإجابة الصحيحة: إذا كان أحد جذري المعادلة: $2x^2 + 6x + c = 0$ هو 3 ، فإن c تساوي:

a) 18 b) 36 c) -6 d) -36

📋 **خلاصة البند 4-1**

مجموع الجذرين	حاصل ضرب الجذرين	تكوين المعادلة
$\ell + m = \frac{-b}{a}$	$\ell \cdot m = \frac{c}{a}$	$x^2 - (\ell + m)x + \ell m = 0$

🌟 **تذكّر: ضع المعادلة على الصورة العامة قبل استخراج a, b, c** 💡

1-5 حل متباينة من الدرجة الثانية
Solving Quadratic Inequalities

فكرة الدرس:

– حل متباينة تربيعية في متغير واحد.

– دراسة إشارة الدالة التي ترتبط بهذه المتباينة.

– تحديد قيم المتغير التي تجعل الدالة التربيعية موجبة أو سالبة باستخدام التمثيل البياني والطرق الجبرية.

تعلمنا فيما سبق:

متباينة الدرجة الأولى في متغير واحد، وعلمت أن حل المتباينة هي إيجاد جميع قيم المتغير التي تحقق هذه المتباينة، وتكتب على صورة فترة.

المصطلحات:

1. متباينة من الدرجة الثانية Quadratic Inequality 2. الفترة Interval

3. أقل من، أقل من أو يساوي Less than, less than or equal to 4. أكبر من، أكبر من أو يساوي Greater than, greater than or equal to

تذكَّر!

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

مسألة الدرس:

في مطار الكويت الدولي الجديد $T4$ ، تم تخصيص منطقة مستطيلة لوضع شاشة إلكترونية جديدة. إذا كان عرض المنطقة x متر، وطولها يزيد عن عرضها بمقدار 6 متر ويريد مشرفو المطار أن تكون مساحة المنطقة لا تزيد عن 40 مترًا مربعًا. ∵ عرض المنطقة x ، فإن الطول هو $x+6$

1. اكتب عبارة تمثل مساحة المنطقة بدلالة x

2. كيف تترجم عبارة: مساحة المنطقة لا تزيد عن 40 مترًا مربعًا إلى متباينة رياضية؟

3. بعد كتابة المتباينة قم بتبسيطها إلى الصورة العامة $ax^2+bx+c<0$

4. هل تعتقد أن الحل سيكون قيمة واحدة أم مجموعة قيم؟ ولماذا؟

نلاحظ أن: $x(x+6)\le 40$ هي $x^2+6x-40\le 0$

أولًا: حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام التحليل

خواص المتباينات في الأعداد الحقيقية:

1. عندما $a\cdot b\ge 0$: فإن $a\ge 0\,,\,b\ge 0$ or $a\le 0\,,\,b\le 0$

2. عندما $a\cdot b\le 0$: فإن $a\le 0\,,\,b\ge 0$ or $a\ge 0\,,\,b\le 0$

انتبه:

إذا كان حاصل ضرب عددين حقيقيين أكبر من الصفر فإما العددان موجبان معًا أو العددان سالبان معًا.

✏️ مثال (1)

حل كلًّا من المتباينات التالية جبريًّا ومثل الحل على خط الأعداد: (a) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ (b) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

✅ **الحل:** (a) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$

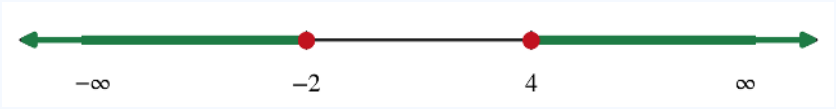
1. نضع المتباينة على الصورة $ax^2 + bx + c \geq 0$: $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ 2. نحلل: $(x + 2)(x - 4) \geq 0$

3. باستخدام خواص المتباينات:

إما
$$x + 2 \geq 0 \ , \ x - 4 \geq 0$$
$$x \geq -2 \ , \ x \geq 4$$
$$\therefore S_1 = [4 , \infty)$$

أو
$$x + 2 \leq 0 \ , \ x - 4 \leq 0$$
$$x \leq -2 \ , \ x \leq 4$$
$$\therefore S_2 = (-\infty , -2]$$

4. مثل على خط الأعداد:



$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = (-\infty , -2] \cup [4 , \infty) = \mathbb{R} - (-2 , 4)$$

(b) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

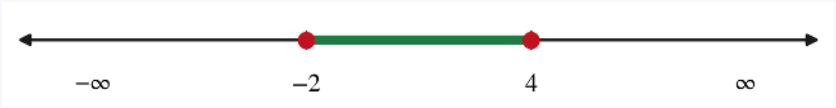
1. نضع المتباينة على الصورة $ax^2 + bx + c \leq 0$: $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ 2. نحلل: $(x + 2)(x - 4) \leq 0$

3. باستخدام خواص المتباينات:

إما
$$x + 2 \geq 0 \ , \ x - 4 \leq 0$$
$$x \geq -2 \ , \ x \leq 4$$
$$\therefore S_1 = [-2 , 4]$$

أو
$$x + 2 \leq 0 \ , \ x - 4 \geq 0$$
$$x \leq -2 \ , \ x \geq 4$$
$$\therefore S_2 = \emptyset$$

4. مثل على خط الأعداد:



$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = [-2 , 4] \cup \emptyset = [-2 , 4]$$

🔍 ملحوظة: حل المتباينة $x^2 - 2x - 8 > 0$ هو ..... ، و $x^2 - 2x - 8 < 0$ هو .....

🎯 تحقق من فهمك (1)

حل كلًّا من المتباينات التالية جبريًّا ومثل الحل على خط الأعداد:

a $x^2 + x - 12 \leq 0$



b $x^2 + 4x - 5 \geq 0$



c $x^2 - x - 6 < 0$



d $(x - 3)(2x + 5) < 0$



e $x^2 - 2x + 1 > 0$



f $x^2 + 6x + 9 < 0$



ثانيًا: حل المتباينة من الدرجة الثانية بدراسة الإشارة

هناك طرق عديدة لحل متباينة من الدرجة الثانية تعرضنا على طريقة توظيف خواص التباين، والآن سنتعرف معًا على حل متباينة من الدرجة الثانية بالبحث عن إشارة المقدار الثلاثي $ax^2 + bx + c$ بإيجاد مجموعة جميع الأعداد الحقيقية x التي تجعل المقدار سالبًا أو موجبًا، **لنتعرف أولًا على دراسة مقدار من الدرجة الأولى:**

✏️ مثال (2)

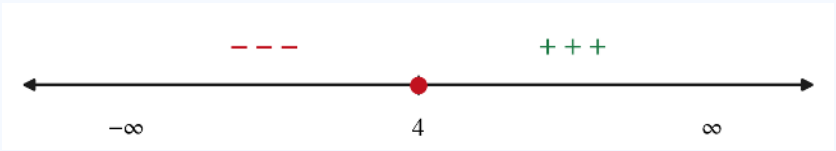
ادرس إشارة كل من: a $f(x)=2x-8$ b $g(x)=-3x+6$

✅ الحل: a $f(x)=2x-8$

1. نضع $f(x)=0$: $2x-8=0$ 2. نحل المعادلة: $2x=8 \Rightarrow x=4$

3. اختبر $f(x)$ باختيار قيم مختلفة للمتغير x في كل فترة من الفترات:

عندما $x<4$ (قيمة اختيارية 1)	عندما $x>4$ (قيمة اختيارية 5)
فمثلًا $f(1)=2(1)-8=-4$ فإن $f(x)<0$	فمثلًا $f(5)=2(5)-8=2$ فإن $f(x)>0$



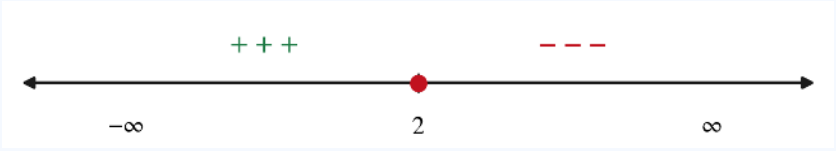
يسار الصفر: عكس إشارة معامل x ، يمين الصفر: إشارة معامل x

b $g(x)=-3x+6$

1. نضع $g(x)=0$: $-3x+6=0$ 2. نحل المعادلة: $-3x=-6 \Rightarrow x=2$

3. اختبر $g(x)$ باختيار قيم مختلفة للمتغير x في كل فترة من الفترات:

عندما $x<2$	عندما $x>2$
فمثلًا $g(1)=-3(1)+6=3$ فإن $g(x)>0$	فمثلًا $g(3)=-3(3)+6=-3$ فإن $g(x)<0$



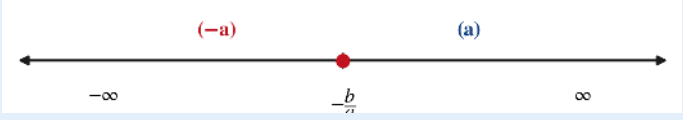
يسار الصفر: عكس إشارة معامل x (موجب) ، يمين الصفر: إشارة معامل x (سالب)

📌 قاعدة هامة: لدراسة إشارة $g(x)=ax+b$, $a\neq 0$ نتبع التالي:

1. نضع $g(x)=0 \Rightarrow ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$

2. نحدد العدد $x=-\frac{b}{a}$ على خط الأعداد.

3. تكون إشارة $g(x)$: • مماثلة للإشارة a على يمين العدد $-\frac{b}{a}$ • ومخالفة للإشارة a على يسار العدد $-\frac{b}{a}$



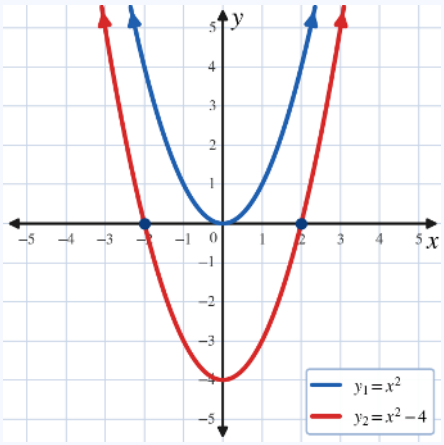
🔦 استكشف: كيف يمكنك حل متباينة $x^2-4<0$ بيانيًا؟

الخطوة (1): مثل بيانيًا $g(x) = x^2$

x					
$g(x)$					

الخطوة (2): مثل بيانيًا $f(x) = x^2 - 4$

x					
$f(x)$					



❓ ماذا تلاحظ؟ بيان الدالة $f(x)$ هو إزاحة لبيان الدالة $g(x) = x^2$ بمقدار ..... لجهة .....

الخطوة (3): حدد قيم x الناتجة عن تقاطع المنحنى مع المحور x-axis : $x = 2$, $x = -2$

الخطوة (4): متى تكون الدالة $f(x) < 0$ ؟ (أي سالبة) متى تكون الدالة $f(x) > 0$ ؟ (أي موجبة)

🔎 نلاحظ أن: $f(x) < 0$ عندما x تنحصر بين العددين 2 , -2 ومنحنى الدالة أسفل محور السينات، $f(x) > 0$ عندما $x < -2$ ، $x > 2$



إشارة معامل x^2 خارج الجذرين ، عكس إشارة معامل x^2 بين الجذرين

🔍 ملحوظة:

حل المتباينة: هي إيجاد قيم x التي يكون عندها منحنى الدالة أعلى أو أسفل محور السينات. **الفترة:** هي طريقة التعبير عن مجموعة من الأعداد الحقيقية ويمكن تمثيلها على خط الأعداد.

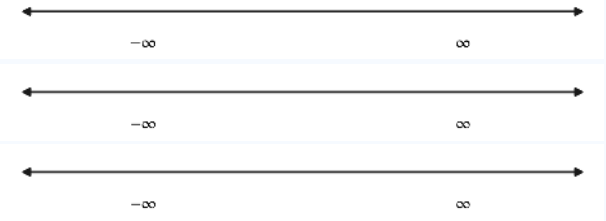
⚠️ انتبه:

بما أن $x^2 - 4 < 0$ فإن الطرفين -2 , 2 لا ينتميان إلى مجموعة الحل.

🎯 تحقق من فهمك (2)

من السؤال السابق أكمل الجدول التالي وحدد الفترات التي تعبر عن حل المتباينات في كل مما يلي:

المتباينة	الفترة
$x^2 - 4 \leq 0$	
$x^2 - 4 > 0$	
$x^2 - 4 \geq 0$	



📌 **قاعدة هامة: لدراسة إشارة $f(x)=ax^2+bx+c\ ,\ a\neq 0$ نتبع التالي:**

1. نوجد المعادلة المناظرة: $f(x)=0$
2. نوجد قيم x التي تجعل $f(x)=0$ إما بالتحليل أو باستخدام المميز عندما يصعب التحليل.
3. لدينا ثلاثة احتمالات:

المعادلة	Δ	دراسة الإشارة
للمعادلة $f(x)=0$ حلان حقيقيان مختلفان $x_1<x_2$	$\Delta>0$	تتبع إشارة a ، تخالف إشارة a بين $x_1\ ,\ x_2$ ، تتبع إشارة a
للمعادلة $f(x)=0$ حلان حقيقيان متساويان $x_1=x_2$	$\Delta=0$	تتبع إشارة a على طرفي $x_1=x_2$
ليس للمعادلة $f(x)=0$ جذور حقيقية	$\Delta<0$	تتبع إشارة a على طول خط الأعداد

✏️ **مثال (3)**

حل كلًّا من المتباينات التالية: (a) $x^2-2x-8\leq 0$ (b) $x^2-x\leq 5$ (c) $x^2-10x+25>0$ (d) $-3x^2+4x-2\geq 0$

✅ **الحل:**

(a) $x^2-2x-8\leq 0$

1. نضع $f(x)=x^2-2x-8$
2. نضع $f(x)=0$
3. نحل المعادلة:

$$x^2-2x-8=0$$
$$(x-4)(x+2)=0$$
$$x=4 \text{ or } x=-2$$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

4. دراسة الإشارة:



نلاحظ أن $f(x)\leq 0$ عندما $-2\leq x\leq 4$

5. ∴ **مجموعة حل المتباينة:** $S=[-2\ ,\ 4]$

(b) $x^2-x\leq 5$

1. نضع $f(x)=x^2-x-5$
2. نضع $f(x)=0$
3. نحل المعادلة: $a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=-5$

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(1)(-5)=1+20=21>0$$
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}\approx 2.8\ ,\ x_2=\frac{1-\sqrt{21}}{2}\approx -1.8$$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

4. دراسة الإشارة:



نلاحظ عندما $a > 0$ فإن إشارة الدالة موجبة أطراف الجذرين وسالبة بينهما.

5. ∴ مجموعة حل المتباينة: $S = \left[\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$

من السؤال السابق ومستعينًا بالحل السابق وبدراسة الإشارة، أكمل الجدول التالي حيث $\Delta > 0$:

المتباينة	الحل
$x^2 - x < 5$	
$x^2 - x \geq 5$	
$x^2 - x > 5$	

c $x^2 - 10x + 25 > 0$

1. نضع $f(x) = x^2 - 10x + 25$

2. نضع $f(x) = 0$

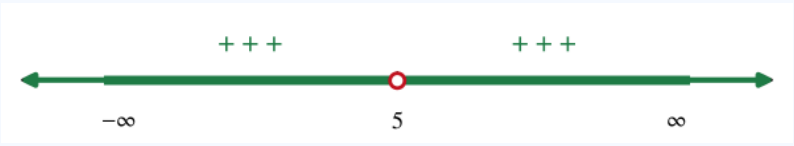
3. نحل المعادلة: $a = 1\ ,\ b = -10\ ,\ c = 25$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(25) = 100 - 100 = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-10)}{2(1)} = 5$$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

4. دراسة الإشارة:



أي إن $x^2 - 10x + 25$ موجب دائمًا لكل قيم $x \in \mathbb{R}$ ماعدا $x = 5$

5. ∴ مجموعة حل المتباينة: $S = \mathbb{R} - \{5\}$

من السؤال السابق ومستعينًا بالحل السابق وبدراسة الإشارة، أكمل الجدول التالي حيث $\Delta = 0$:

المتباينة	الحل
$x^2 - 10x + 25 \geq 0$	
$x^2 - 10x + 25 < 0$	
$x^2 - 10x + 25 \leq 0$	

d $-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

1. نضع $f(x) = -3x^2 + 4x - 2$

2. نضع $f(x) = 0$

3. نحل المعادلة: $a = -3\ ,\ b = 4\ ,\ c = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-3)(-2) = 16 - 24 = -8 < 0$$

$\therefore$ المعادلة ليس لها جذر حقيقي

4. دراسة الإشارة:



بما أن الدالة لا تقطع محور x فإن إشارتها ثابتة وتعتمد على إشارة a (سالبة دائمًا)

5. $\therefore$ مجموعة حل المتباينة: $S = \emptyset$

لحل المتباينة التربيعية بصورها المختلفة التي على الصورة $a \neq 0\ ,\ ax^2 + bx + c \geq 0$ يجب ملاحظة إشارة Δ لإيجاد قيمة $f(x) = ax^2 + bx + c$

🎯 تحقق من فهمك (3)

حل كل من المتباينات التالية جبريًّا ومثل الحل على خط الأعداد: **a** $2x^2 + 3x - 2 < 0$ **b** $-x^2 - x + 6 > 0$ **c** $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

a $2x^2 + 3x - 2 < 0$



b $-x^2 - x + 6 > 0$



c $x^2 - 6x + 9 \geq 0$



حالة خاصة: حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام القيمة المطلقة

⭐ خاصية:

إذا كان a , b عددين حقيقيين موجبين فإن: $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$

يمكن استبدال الرمز $>$ بالرمز $\leq$ أو الرمز $<$ بالرمز $\geq$. تستخدم هذه الخاصية لحل متباينات مثل $x^2 > 4$ ، $x^2 < 9$

فمثلًا لحل المتباينة $x^2 < 9$: نوجد الجذر التربيعي للطرفين

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{9} \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$$

$\therefore$ مجموعة الحل $= (-3\ ,\ 3)$



🧠 تذكَّر! بفرض أن a, b, c أعداد حقيقية:

1. إذا كان $a < b$ فإن $a + c < b + c$
2. إذا كان $a < b$ و $c > 0$ فإن $a \cdot c < b \cdot c$
3. إذا كان $a < b$ و $c < 0$ فإن $a \cdot c > b \cdot c$
4. إذا كان $a > 0$:

$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ ،

$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ or } x < -a$

🔍 ملحوظة:

عند حل المتباينة $x^2 < 0$ فإننا نلاحظ أنه لا يوجد أي عدد حقيقي بحيث يكون مربعه أصغر من الصفر، أي إن المتباينة $x^2 < 0$ ليس لها أي حل، وبالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي المجموعة الخالية $\emptyset$. وبالمقابل فإن المتباينة $x^2 \geq 0$ صحيحة لأي عدد حقيقي وبالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

المتباينة	مجموعة الحل
$x^2 < 0$	$\emptyset$
$x^2 \leq 0$	$\{0\}$
$x^2 \geq 0$	$\mathbb{R}$

$x^2 > 0$	$\mathbb{R} - \{0\}$

⭐ **بصفة عامة: إذا كان a, b, c أعدادًا حقيقية بحيث $c < 0$, $a \neq 0$ فإن:**

1. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 < c$ هي المجموعة الخالية $\emptyset$
2. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 > c$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$
3. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 < 0$ هي $\emptyset$ ، ومجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 > 0$ هي $\mathbb{R} - \left\{\frac{-b}{a}\right\}$

✏️ مثال (4)

أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد: a $2x^2 + 5 \geq 23$ b $(5x+7)^2 + 3 < 2$

✅ **الحل:** a $2x^2 + 5 \geq 23$

$2x^2 \geq 18$ بإضافة (-5) لطرفي المتباينة

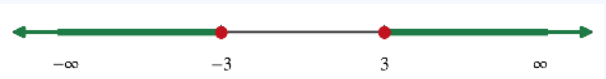
$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2x^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right) 18$ بضرب طرفي المتباينة بـ $\frac{1}{2}$

$x^2 \geq 9$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$|x| \geq 3$ من خواص القيمة المطلقة

$x \geq 3$ or $x \leq -3$

$\therefore S.S. = (-\infty, -3] \cup [3, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-3, 3)$



b $(5x+7)^2 + 3 < 2$

حسب الخاصية التالية: $(5x+7)^2 + 3 + (-3) < 2 + (-3) \Rightarrow (5x+7)^2 < -1$

$\therefore S.S. = \emptyset$

🧠 تذكَّر!

1. $\sqrt{x^2} = |x|$ .2 $|x| \leq a$, $a > 0 \therefore -a \leq x \leq a$
3. $|x| \geq a$, $a > 0 \therefore x \geq a$ or $x \leq -a$

🧠 تذكَّر!

مجموعة حل كل من المتباينتين: $|x| < 0$ ، $x^2 < 0$ هو $\emptyset$

🎯 تحقق من فهمك (4)

أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد:

a $3x^2 - 4 \leq 8$



b $(4x-3)^2 + 2 > -3$



c $(2-3x)^2 < 1$



d $(2x+1)^2 - 3 \geq 1$



استخدام النماذج

قام قسم الرياضيات في إحدى مدارس منطقة الفروانية التعليمية في دولة الكويت بتجهيز مسرح المدرسة لتقديم دورة للمعلمين الجدد، حيث وزعت الكراسي على شكل مربع مكون من 20 صفًا أفقيًا وعموديًا ترغب الإدارة في تقليل عدد الصفوف أفقيًا وعموديًا مع الحفاظ على الشكل المربع، بحيث لا يزيد عدد الكراسي عن 225 كرسيًا. كم صفًا من الكراسي يجب على الإدارة إزالته؟

✅ الحل:

ليكن x عدد صفوف الكراسي المراد إزالتها حيث $0 < x < 20$ ∴ عدد الصفوف المتبقية: $20 - x$ ، عدد الصفوف الكلي $= (20-x)^2$

1. اكتب المتباينة التي تمثل الموقف وحلها: $(20-x)^2 \leq 225$

2. المعادلة التربيعية المرتبطة:

$$(20-x)^2 = 225$$
$$(x-20)^2 = (15)^2$$
$$(x-20)^2 - (15)^2 = 0 \quad \text{فرق بين مربعين}$$
$$(x-20-15)(x-20+15) = 0$$
$$(x-35)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ or } x = 35$$



$(20-x)^2 \leq 225$ عندما $5 \leq x \leq 35$ ، ومع الشرط $0 < x < 20$ يكون $5 \leq x < 20$

3. بما أن الصفوف الأفقية والعمودية هي في الأصل 20 صفًّا وعمودًا فإن عدد الصفوف الممكن إزالتها **5 صفوف على الأقل**.

❓ **هل يمكن أن يكون عدد الصفوف المحذوفة عددًا كسريًّا؟ ولماذا؟**

.....

.....

🤔 **فكِّر معي: أجب عن الأسئلة التالية:**

1. ما الفرق بين حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد وحل متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد؟

.....

.....

2. ما علاقة بحث إشارة الدالة التربيعية بحل متباينات الدرجة الثانية في متغير واحد؟

.....

.....

أتدرب وأحل المسائل

أولًا – البنود الموضوعية:

■ **في البنود من (1-5) اختر الإجابة الصحيحة:**

(1) مجموعة حل المتباينة $(x+2)(x-5)>0$ هي:

a $(-2\,,\,5)$
b $[-2\,,\,5]$
c $(-\infty\,,\,-2)\cup(5\,,\,\infty)$
d $\mathbb{R}$

(2) مجموعة حل المتباينة $x^2-2x<0$ هي:

a $(0\,,\,2)$
b $[-\infty\,,\,0]$
c $(2\,,\,\infty)$
d $[0\,,\,2]$

(3) مجموعة حل المتباينة $x^2+6x+9\leq 0$ هي:

a $(-\infty\,,\,-3]\cup[3\,,\,\infty)$
b $\{-3\}$
c $[-3\,,\,3]$
d $\mathbb{R}$

(4) أي مما يلي ليس حلًّا للمتباينة $4x^2-4x-5>0$

a 60
b -20
c 2
d 0

(5) أي من المتباينات التالية حلها نفس حل المتباينة $-2x^2+5x-3>0$:

a $x^2-5>2x^2$
b $-x^2-x>x^2-4x$
c $2x^2+3<5x$
d $x^2-3x>2x-x^2$

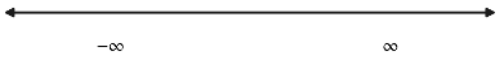
ثانيًا – أسئلة المقال:

(1) أوجد مجموعة حل كلٍّ من المتباينات التالية:

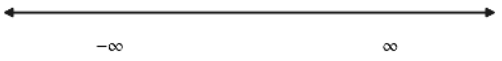
a $x^2-25>0$

b $x^2-5x+6<0$

c $x^2 - 6x + 9 > 0$



d $3x^2 - 6x - 10 < -10$



e $(3x - 7)(2x + 9) \leq 0$



f $2x^2 + 5x - 3 < -10$



g $-2x^2 + x + 21 < 0$



h $3x^2 + x + 7 < 0$



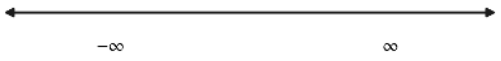
k $x^2 - 6x + 8 < 0$



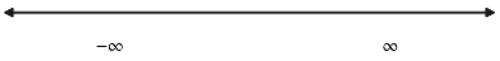
l $-2x^2 + 6x + 8 \geq 0$



m $(x-4)(3-x)>0$



n $x^2+2x-8\leq 0$



o $9x^2+1\geq 0$



p $-16x^2+24x-7>0$



(2) اكتشف الخطأ: تقول نور: إن المتباينة $-x^2+2x-7<0$ لا حلول لها. بيّن الخطأ في حل نور ثم صححه.

(3) اكتب متباينة تربيعية يكون حلها مجموعة الأعداد الحقيقية.

مهارات تفكير عليا

(1) أوجد مجموعة حل المتباينة: $(x+3)^2\leq 10-3(x+3)$

(2) إذا علمت أن $\Delta = 0$ ، فما حل المتباينة $-2x^2 + 8x + c < 0$ ؟

(3) تقول هديل: إن المتباينة $2x^2 + x - 3 < 0$ و $\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 1} < 0$ لهما الحل نفسه. هل توافقها الرأي؟ وضح إجابتك.

📋 **خلاصة البند 5-1 (دراسة إشارة $ax^2 + bx + c$)**

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
إشارة a خارج الجذرين وعكسها بينهما	إشارة a على طرفي الجذر المكرر	إشارة a على طول خط الأعداد

🔵 النقطة المغلقة عند $\geq$, $\leq$ ⚪ النقطة المفتوحة عند $>$, $<$

🌟 **ارسم خط الأعداد وحدد الإشارات قبل كتابة الحل** 💡