

سما
SAMA

مذكرات سما

الرياضيات

حل البند 1-3

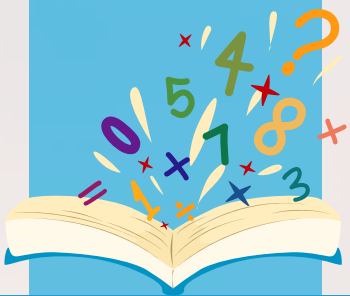
10

الصف العاشر

المرحلة الثانوية



الفصل الدراسي الأول
2027 - 2026



www.samakw.com
samakw_net
60084568 /50855008/97442417
حولي مجمع بيروت الدور الأول

1-3 حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد «جبريًّا وبيانيًّا»

Solving a Quadratic Equation in one Variable Algebraically and Graphically

فكرة الدرس:

حل المعادلة التربيعية باستخدام القانون – بيانيًّا.

المصطلحات:

1. المميز Discriminant 2. القانون العام Quadratic Formula

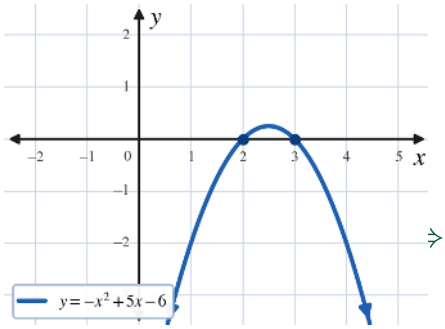
فيما سبق تعلمنا:

– التمثيل البياني للدالة.

– حل المعادلة التربيعية: باستخدام التحليل، وباستخدام إكمال المربع.

مسألة الدرس:

في الشكل المقابل يُمثِّل الماء الخارج من النافورة منحنى قطع مكافئ، ويمكن تمثيل هذا المسار بالدالة التربيعية: $y = -x^2 + 5x - 6$



1. أوجد الإحداثيات السينية لنقطتي تقاطع المنحنى مع المحور السيني؟

✅

$\leftarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2\ ,\ x = 3$

2. أوجد إحداثيات الرأس (أعلى نقطة للمنحنى)؟

✅

$\Leftarrow x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-5}{-2} = \dfrac{5}{2}\ ,\ y = -\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 5\left(\dfrac{5}{2}\right) - 6 = \dfrac{1}{4}$

الرأس $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$

مفاهيم أساسية:

1. الدالة الثابتة: $f(x) = c\ ,\ c \in \mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الصفرية) وتمثيلها البياني يكون خطًّا مستقيمًا أفقيًّا يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات عند القيمة c .

2. الدالة الخطية: $f(x) = ax + b\ ,\ a \neq 0\ ,\ a, b \in \mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الأولى) وتمثيلها البياني على شكل خط مستقيم.

3. الدالة التربيعية: $f(x) = ax^2 + bx + c\ ,\ a \neq 0\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الثانية) تمثل قطعًا مكافئًا مفتوحًا للأعلى إذا كانت $a > 0$ ، ومفتوحًا للأسفل إذا كانت $a < 0$.

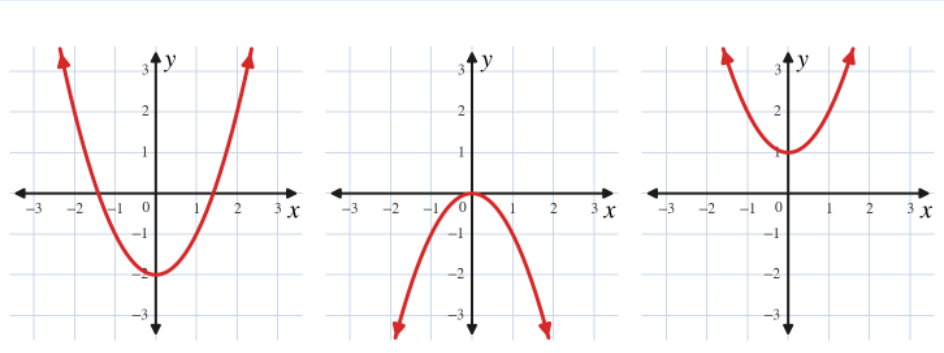
تذكَّر!

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

📈 حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (المعادلة التربيعية) بيانيًّا

📌 لحل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بيانيًّا نتبع الخطوات التالية:

1. ضع المعادلة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0$
2. افرض أن: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، ثم ارسم منحنى الدالة f
3. عيّن نقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات فتكون الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع هي حلول المعادلة $f(x) = 0$



المنحنى يقطع محور السينات في نقطتين، يوجد حلان مختلفان للمعادلة في $\mathbb{R}$

عدد الحلول = 2

المنحنى يقطع محور السينات في نقطة واحدة، يوجد حلان حقيقيان متساويان في $\mathbb{R}$

عدد الحلول = 1 مكرر

المنحنى لا يقطع محور السينات، لا يوجد حل للمعادلة في $\mathbb{R}$

عدد الحلول = 0

🔍 ملحوظة:

الدالة التربيعية تسمى (دالة القطع المكافئ) تتغير فتحة القطع المكافئ للأسفل إذا كان المعامل الرئيسي لها عددًا سالبًا.

🔍 ملحوظة:

مجموعة الحل هي: الإحداثيات السينية لتقاطع المنحنى مع محور السينات.

✏️ مثال (1)

أوجد بيانيًّا مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعينًا بالفترة الموضحة:

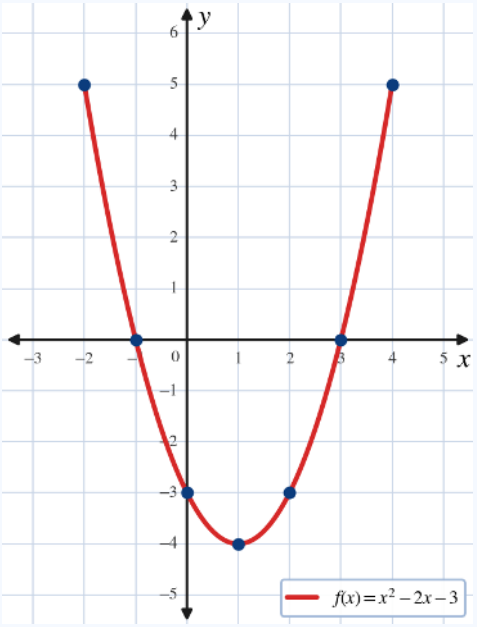
a $x^2 - 2x - 3 = 0\ ,\ [-2\ ,\ 4]$ **b** $-x^2 - 4x - 4 = 0\ ,\ [-4\ ,\ 0]$ **c** $x^2 + 2 = 0\ ,\ [-2\ ,\ 2]$

✅ الحل:

a $x^2 - 2x - 3 = 0\ ,\ [-2\ ,\ 4]$

نفرض أن $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ، ونكون جدول القيم:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5



من الرسم:

نلاحظ أن الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات هي $x = -1\ ,\ x = 3$

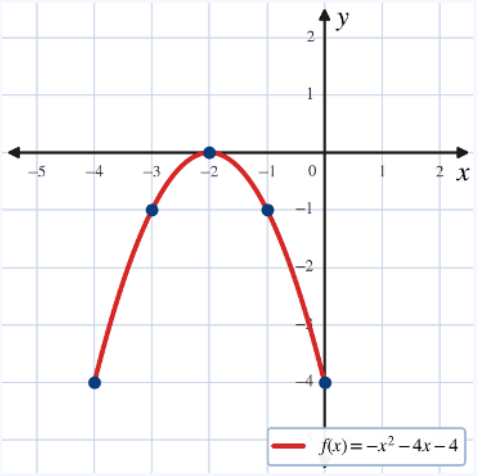
وبالتالي فإن مجموعة الحل هي:

$\therefore S.S. = \{-1\ ,\ 3\}$

b $-x^2 - 4x - 4 = 0\ ,\ [-4\ ,\ 0]$

نفرض أن $f(x) = -x^2 - 4x - 4$ ، ونكون جدول القيم:

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	-4	-1	0	-1	-4



من الرسم:

نلاحظ أن الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات هي $x = -2$

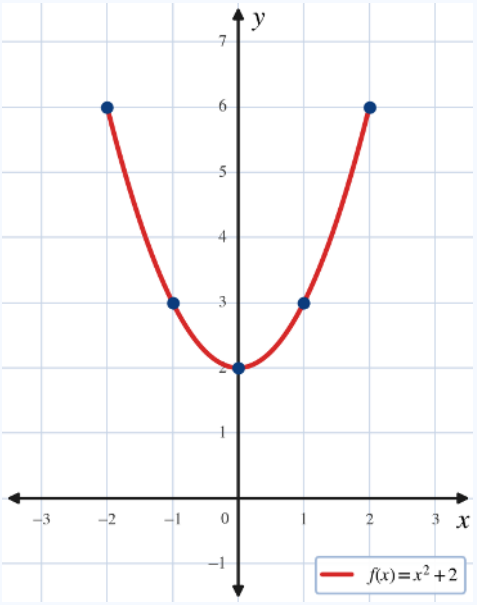
وبالتالي فإن مجموعة الحل هي:

$\therefore S.S. = \{-2\}$

c $x^2 + 2 = 0\ ,\ [-2\ ,\ 2]$

نفرض أن $f(x) = x^2 + 2$ ، ونكون جدول القيم:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	6	3	2	3	6



من الرسم:

نلاحظ أن المنحنى لا يقطع محور السينات نهائيًّا

وبالتالي فإن مجموعة الحل هي:

$\therefore S.S. = \emptyset$

⚠ انتبه:

الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات هي التي عندها $f(x) = 0$

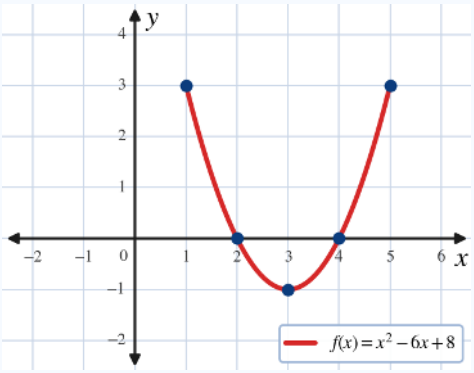
🎯 تحقق من فهمك (1)

أوجد بيانيًّا مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعينًا بالفترة الموضحة:

a $x^2 - 6x + 8 = 0\ ,\ [1\ ,\ 5]$

نفرض أن $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ، ونكون جدول القيم:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	0	-1	0	3



من الرسم:

نلاحظ أن الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات هي $x = 2\ ,\ x = 4$

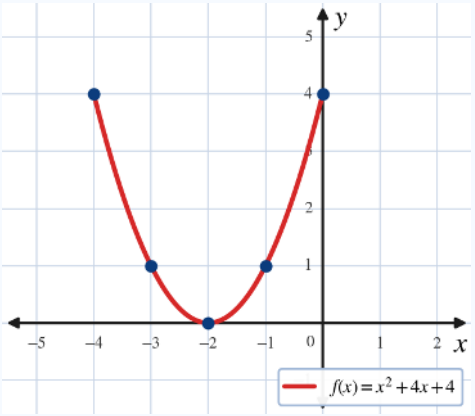
وبالتالي فإن مجموعة الحل هي:

$\therefore S.S. = \{2\ ,\ 4\}$

b $x^2 + 4x + 4 = 0\ ,\ [-4\ ,\ 0]$

نفرض أن $f(x) = x^2 + 4x + 4$ ، ونكون جدول القيم:

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	4	1	0	1	4



من الرسم:

نلاحظ أن الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات هي $x = -2$

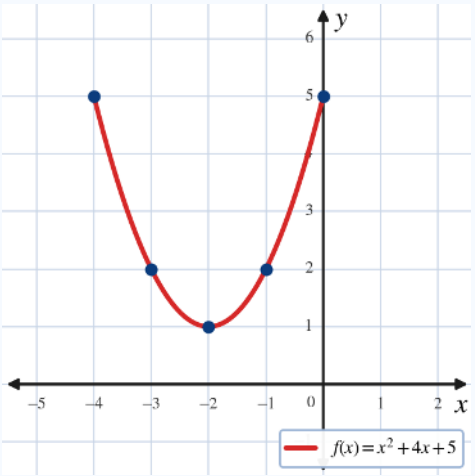
وبالتالي فإن مجموعة الحل هي:

$\therefore S.S. = \{-2\}$

c $x^2 + 4x + 5 = 0\ ,\ [-4\ ,\ 0]$

نفرض أن $f(x) = x^2 + 4x + 5$ ، ونكون جدول القيم:

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	5	2	1	2	5



من الرسم:

نلاحظ أن المنحنى لا يقطع محور السينات نهائيًا

وبالتالي فإن مجموعة الحل هي:

$\therefore S.S. = \emptyset$

تعلمنا سابقًا: إيجاد حل المعادلة التربيعية باستخدام التحليل إلى عاملين وباستخدام إكمال المربع، ولكن يوجد قانون عام لحل المعادلة التربيعية. والآن سنقوم باستنتاج القانون العام لحل أي معادلة تربيعية.

استنتاج القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

$$ax^2 + bx + c = 0\ ,\ a \neq 0\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

إضافة المعكوس الجمعي لـ c للطرفين $\quad ax^2 + bx = -c$

قسمة الطرفين على a $\quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

بإكمال المربع $\quad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

بتحليل الطرف الأيمن $\quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

بتوحيد المقام $\quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $\quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\ ,\ b^2 - 4ac \geq 0$

بطرح $\frac{b}{2a}$ من الطرفين $\quad x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

⭐ **القانون العام لحل المعادلات التربيعية في متغير واحد وهو:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \; b^2 - 4ac \geq 0 \; , \; a, b, c \in \mathbb{R} \; , \; a \neq 0$$

يُسمى المقدار $b^2 - 4ac$ **مميّز المعادلة التربيعية**، ويرمز له بالرمز Δ ويقرأ (دلتا)، والمميز هو الذي يميّز نوع الجذرين ويحدد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة بدون حلها، أي أن: $\Delta = b^2 - 4ac$

📊 **نوع الجذرين حسب إشارة المميز:**

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
فإن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان	فإن للمعادلة جذران حقيقيان متساويان	فإنه لا يوجد للمعادلة جذور حقيقية
عدد الحلول = 2	**عدد الحلول = 1 (مكرر)**	**عدد الحلول = 0**

⚠️ **انتبه:**

المعادلة التربيعية مثل القفل له مفتاح ثابت، والقانون العام هو المفتاح الذي يفتح أي معادلة تربيعية مهما كانت صعبة 🔑، وهو خطة إنقاذ ثابت لحل المعادلة التربيعية التي يستحيل حلها بالتحليل.

🧠 **تذكّر! المربع الكامل:**

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \; ، \; \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{(x+a)^2} = |x+a| \; ،$$

$$|x+a| = c \; , \; c > 0 \therefore x + a = \pm c$$

✏️ **مثال (2)**

حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة: (a) $4x^2 - 4x - 3 = 0$ (b) $2x^2 - 4x + 2 = 0$ (c) $x^2 + 2x + 3 = 0$

✅ **الحل:**

(a) $4x^2 - 4x - 3 = 0$

$a = 4 \; , \; b = -4 \; , \; c = -3$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4(4)(-3)$

$= 64$

$\therefore \Delta > 0$

∴ عدد الحلول = 2

(b) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

$a = 2 \; , \; b = -4 \; , \; c = 2$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4(2)(2)$

$= 0$

$\therefore \Delta = 0$

∴ عدد الحلول = 1 (مكرر)

(c) $x^2 + 2x + 3 = 0$

$a = 1 \; , \; b = 2 \; , \; c = 3$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (2)^2 - 4(1)(3)$

$= -8$

$\therefore \Delta < 0$

∴ عدد الحلول = 0

🎯 **تحقق من فهمك (2)**

حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة:

a $2x^2 - 7x - 4 = 0$

$a = 2\ ,\ b = -7\ ,\ c = -4$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(-4) = 81$

$\therefore \Delta > 0$ ∴ عدد الحلول = **2**

b $x^2 - 10x + 25 = 0$

$a = 1\ ,\ b = -10\ ,\ c = 25$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(25) = 0$

$\therefore \Delta = 0$ ∴ عدد الحلول = **1 (مكرر)**

c $3x^2 - 2x + 2 = 0$

$a = 3\ ,\ b = -2\ ,\ c = 2$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(2) = -20$

$\therefore \Delta < 0$ ∴ عدد الحلول = **0**

d $x^2 = 15$

$x^2 - 15 = 0$

$a = 1\ ,\ b = 0\ ,\ c = -15$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-15) = 60$

$\therefore \Delta > 0$ ∴ عدد الحلول = **2**

e $x^2 - x = 0$

$a = 1\ ,\ b = -1\ ,\ c = 0$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(0) = 1$

$\therefore \Delta > 0$ ∴ عدد الحلول = **2**

f $2x^2 - 8x + 8 = 0$

$a = 2\ ,\ b = -8\ ,\ c = 8$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(2)(8) = 0$

$\therefore \Delta = 0$ ∴ عدد الحلول = **1 (مكرر)**

مثال (3)

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون: **a** $x^2 - x - 5 = 0$ **b** $x^2 - 8 = 0$ **c** $x^2 = x + 1$ **d** $x^2 - 6x + 9 = 0$

الحل:

a $x^2 - x - 5 = 0$

1. نوجد قيم $a\ ,\ b\ ,\ c$ **:** $a = 1\ ,\ b = -1\ ,\ c = -5$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-5) = 21$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

∴ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{21}}{(2)(1)}$$

إما

$$x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

أو

$$x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$$

$$\therefore S.S. = \left\{ \frac{1 + \sqrt{21}}{2}\ ,\ \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \right\}$$

b $x^2 - 8 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c : $a = 1\ ,\ b = 0\ ,\ c = -8$

2. نوجد المميز Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-8) = 32$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{32}}{(2)(1)}$$

إما

$$x = \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}$$

أو

$$x = \frac{-\sqrt{32}}{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\therefore S.S. = \{\, 2\sqrt{2}\ ,\ -2\sqrt{2}\ \}$$

c $x^2 = x + 1$

نضع المعادلة في الصورة العامة فتصبح: $x^2 - x - 1 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c : $a = 1\ ,\ b = -1\ ,\ c = -1$

2. نوجد المميز Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{(2)(1)}$$

إما

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

أو

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore S.S. = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\ ,\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$$

d $x^2 - 6x + 9 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c : $a = 1\ ,\ b = -6\ ,\ c = 9$

2. نوجد المميز Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 0$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta = 0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان متساويان هما:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{(2)(1)} \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$
$$\therefore S.S. = \{3\}$$

⚠️ انتبه:

توضع المعادلة دائمًا على الصورة العامة $ax^2 + bx + c = 0$ ثم نوجد قيمة Δ فإن: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

⚠️ انتبه:

في المعادلة التربيعية إذا كانت $b = 0$ فإن: $x = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 8$

$|x| = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

ℹ️ معلومة:

العدد الذهبي يساوي $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ تقريبًا ✨

🎯 تحقق من فهمك (3)

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون:

a $x^2 - 4x + 2 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:** $a = 1$, $b = -4$, $c = 2$

2. نوجد المميز Δ **:**

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(2) = 8$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{8}}{(2)(1)} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

إما $x = 2 + \sqrt{2}$ **أو** $x = 2 - \sqrt{2}$

$$\therefore S.S. = \{2 + \sqrt{2} , 2 - \sqrt{2}\}$$

b $4x^2 - 5x + 1 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:** $a = 4$, $b = -5$, $c = 1$

2. نوجد المميز Δ **:**

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(4)(1) = 9$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{(2)(4)} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

إما $x = \frac{5+3}{8} = 1$ **أو** $x = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$

$$\therefore S.S. = \left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$$

c $x^2 - 2x + 1 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:** $a = 1\ ,\ b = -2\ ,\ c = 1$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta = 0$

∴ للمعادلة حلان حقيقيان متساويان:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{(2)(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$\therefore S.S. = \{1\}$

d $x^2 - 6x + 8 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:** $a = 1\ ,\ b = -6\ ,\ c = 8$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(8) = 4$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

∴ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{(2)(1)} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

إما

$$x = \frac{6 + 2}{2} = 4$$

أو

$$x = \frac{6 - 2}{2} = 2$$

$\therefore S.S. = \{2\ ,\ 4\}$

✏️ مثال (4)

حل المعادلة التالية باستخدام القانون: $x^2 - 3x = 0$

✅ **الحل:**

$$x^2 - 3x = 0$$

1. الصورة العامة للمعادلة

$$a = 1\ ,\ b = -3\ ,\ c = 0$$

2. نوجد قيم a , b , c

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(0) = 9$$

3. نوجد المميز Δ

$$\therefore \Delta > 0$$

4. نحدد نوع الجذرين

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{2}$$

5. نوجد الجذرين باستخدام القانون

∴ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما:

إما

$$x = \frac{3 + \sqrt{9}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3$$

أو

$$x = \frac{3 - \sqrt{9}}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

$\therefore S.S. = \{0\ ,\ 3\}$

⚠️ **انتبه:**

إذا كانت $\Delta = 0$ فإن حل المعادلة هو $x = \frac{-b}{2a}$

🔍 **ملحوظة:**

إذا كان معامل x^2 عدد سالب فإن منحنى الدالة التربيعية يكون مفتوحًا للأسفل.

🎯 تحقق من فهمك (4)

حل المعادلتين التاليتين باستخدام القانون:

a $x^2 + 7x + 10 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:**

$a = 1\ ,\ b = 7\ ,\ c = 10$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (7)^2 - 4(1)(10) = 9$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{(2)(1)} = \frac{-7 \pm 3}{2}$$

إما $x = \frac{-7+3}{2} = -2$ أو $x = \frac{-7-3}{2} = -5$

$$\therefore S.S. = \{-5\ ,\ -2\}$$

b $2x^2 - 5x - 52 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:**

$a = 2\ ,\ b = -5\ ,\ c = -52$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(-52) = 441$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

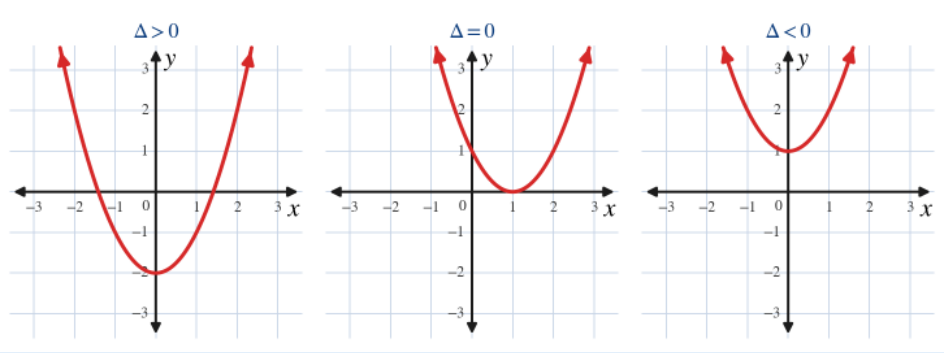
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{441}}{(2)(2)} = \frac{5 \pm 21}{4}$$

إما $x = \frac{5+21}{4} = \frac{13}{2}$ أو $x = \frac{5-21}{4} = -4$

$$\therefore S.S. = \left\{-4\ ,\ \frac{13}{2}\right\}$$

⭐ **تعميم: للدالة التربيعية** $ax^2 + bx + c = 0$ **حيث** $a, b, c \in \mathbb{R}\ ,\ a \neq 0$

$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
المميز: موجب	المميز: صفر	المميز: سالب
عدد الحلول: حلان حقيقيان مختلفان	عدد الحلول: حلان حقيقيان متساويان	عدد الحلول: لا يوجد حلول حقيقية



✏️ **مثال (5)**

عددان فرديان متتاليان مجموع مربعيهما 34 فما العددان؟

✅ **الحل:**

نفرض أن العدد الفردي الأول $= x$ ∴ العدد الفردي الثاني $= x + 2$

∵ مجموع مربعي العددين $= 34$

$$(x)^2 + (x+2)^2 = 34$$
$$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 34 = 0$$
$$2x^2 + 4x - 30 = 0$$
$$2(x^2 + 2x - 15) = 0$$
$$2 \neq 0\ ,\ \therefore x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$(x-3)(x+5) = 0$$

إما

$x - 3 = 0$
$x = 3$
العدد الفردي الأول 3
العدد الفردي الثاني 5

أو

$x + 5 = 0$
$x = -5$
العدد الفردي الأول −5
العدد الفردي الثاني −3

∴ **العددان الفرديان هما** $5\ ,\ 3$ **أو** $-3\ ,\ -5$

⚠ انتبه: إذا كان العدد هو x فإن:

- ضعف العدد $= 2x$
- ثلاثة أمثال العدد $= 3x$
- العدد الذي يليه $= x + 1$
- مربع العدد $= x^2$
- عدد فردي فإن العدد الفردي الذي يليه هو $x + 2$
- عدد زوجي فإن العدد الزوجي الذي يليه هو $x + 2$

❓ هل يمكن الحل بطريقة أخرى؟

✅ نعم، باستخدام القانون العام: $\Delta = (2)^2 - 4(1)(-15) = 64$ ، $x^2 + 2x - 15 = 0$ ، أي $x = \frac{-2 \pm 8}{2}$

✔ $x = 3$ أو $x = -5$

🎯 تحقق من فهمك (5)

a **أوجد عددين زوجيين متتاليين مجموع مربعيهما 100**

نفرض أن العدد الزوجي الأول $= x$ ، ∴ العدد الزوجي الثاني $= x + 2$

$$x^2 + (x+2)^2 = 100$$
$$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 100 = 0$$
$$2x^2 + 4x - 96 = 0$$
$$2(x^2 + 2x - 48) = 0\ ,\ 2 \neq 0$$
$$x^2 + 2x - 48 = 0$$
$$(x-6)(x+8) = 0$$

إما

$x - 6 = 0$
$x = 6$
العددان 6 ، 8

أو

$x + 8 = 0$
$x = -8$
العددان −8 ، −6

∴ **العددان هما** $8\ ,\ 6$ **أو** $-6\ ,\ -8$

b **مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار $3\,cm$ ومساحته $40\,cm^2$ أوجد بعدي المستطيل.**

نفرض أن عرض المستطيل $= x\,cm$ ، $\therefore$ طوله $= (x+3)\,cm$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$x(x+3) = 40$$
$$x^2 + 3x - 40 = 0$$
$$(x+8)(x-5) = 0$$

إما	أو
$x - 5 = 0$	$x + 8 = 0$
$x = 5$	$x = -8$

$x = -8$ مرفوضة ❌ لأن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة

$\therefore$ **عرض المستطيل** $= 5\,cm$ ، **طوله** $= 5 + 3 = 8\,cm$

🔍 **ملحوظة:**

الأبعاد لا يمكن أن تكون قيمها بالسالب.

استخدام النماذج

ملعب كرة القدم في استاد جابر الدولي في الكويت مستطيل الشكل، إذا كان عرض الملعب x مترًا، وكان طوله يزيد عن عرضه بمقدار 37 مترًا، فإذا علمت أن مساحة الملعب 7140 مترًا مربعًا: أوجد عرض الملعب وطوله؟

مساحة الملعب
تحويل المساحة إلى الصورة العامة للدالة التربيعية

نستخدم القانون العام

✅ **الحل:**

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

$$x(x+37) = 7140$$

$$x^2 + 37x - 7140 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-37 \pm \sqrt{(37)^2 - 4(1)(-7140)}}{2(1)} = \frac{-37 \pm \sqrt{29929}}{2} = \frac{-37 \pm 173}{2}$$

إما

$$x = \frac{-37 + 173}{2} = 68$$

(مقبولة) ✅

أو

$$x = \frac{-37 - 173}{2} = -105$$

(مرفوضة) ❌

عرض الملعب هو 68 مترًا ⇐ $68 + 37 = 105$

∴ **طول الملعب يساوي** 105 **مترًا** ⚽

💪 أتدرب وأحل المسائل

أولًا – البنود الموضوعية:

■ **في البنود من (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:**

(1) جذرا المعادلة $x^2-5x+6=0$ هما جذران حقيقيان متساويان — ✅ b

💬 $\Delta=25-24=1>0$ جذران مختلفان

(2) المعادلة $x^2-4x+4=0$ لها جذران حقيقيان متساويان — ✅ a

💬 $\Delta=16-16=0$

(3) جذرا المعادلة $x^2+9=0$ هما $3\ ,\ -3$ — ✅ b

💬 $x^2=-9\ ,\ \Delta=-36<0$ لا يوجد جذور حقيقية

■ **في البنود من (1-7) اختر الإجابة الصحيحة:**

(1) المعادلة $x^2-6x+9=0$

a) لها جذران حقيقيان مختلفان
b) لها جذران حقيقيان متساويان ✅
c) ليس لها جذور حقيقية
d) ليس أيًّا مما سبق

💬 $\Delta=36-36=0$

(2) المعادلة $x^2+4x+5=0$

a) لها جذران حقيقيان مختلفان
b) لها جذران حقيقيان متساويان
c) ليس لها جذور حقيقية ✅
d) ليس أيًّا مما سبق

💬 $\Delta=16-20=-4<0$

(3) جذرا المعادلة $x^2-3x-4=0$ هما:

a) $-1\ ,\ 4$ ✅
b) $1\ ,\ 4$
c) $-2\ ,\ 2$
d) $-1\ ,\ 3$

💬 $(x-4)(x+1)=0$

(4) حل المعادلة $x^2=9$ هو:

a) 3
b) -3
c) ±3 ✅
d) لا يوجد حل

💬 $|x|=3\Rightarrow x=\pm3$

(5) جذرا المعادلة $2x^2-7x+3=0$ هما:

a) $\frac{1}{2}\ ,\ 3$ ✅
b) $1\ ,\ 3$
c) $2\ ,\ 3$
d) $1\ ,\ \frac{3}{2}$

💬 $(2x-1)(x-3)=0$

(6) حل المعادلة $x^2-25=0$ هو:

a) 5
b) -5
c) ± 5 ✅
d) لا يوجد حل

💬 $x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$

(7) المعادلة التي مجموع جذريها يساوي 5 فيما يلي:

a) $(x+1)(x+4) = 0$
b) $x(x-5) = 0$ ✅
c) $(x-1)(x+6) = 0$
d) $(x-5)(x+1) = 0$

💬 جذرا $x(x-5) = 0$ هما 5 , 0 ومجموعهما 5

ثانيًا – أسئلة المقال:

(1) أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية باستخدام القانون العام:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:** $a = 1\ ,\ b = -3\ ,\ c = -10$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-10) = 49$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$$

إما $x = \frac{3+7}{2} = 5$ أو $x = \frac{3-7}{2} = -2$

$\therefore S.S. = \{-2\ ,\ 5\}$

b) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:** $a = 2\ ,\ b = -5\ ,\ c = -3$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(-3) = 49$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{(2)(2)} = \frac{5 \pm 7}{4}$$

إما $x = \frac{5+7}{4} = 3$ أو $x = \frac{5-7}{4} = \frac{-1}{2}$

$\therefore S.S. = \left\{\frac{-1}{2}\ ,\ 3\right\}$

c $\frac{1}{2}x^2 - 3 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:** $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = -3$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(-3) = 6$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{6}}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \pm\sqrt{6}$$

إما $x = \sqrt{6}$ **أو** $x = -\sqrt{6}$

$\therefore S.S. = \{\sqrt{6}\ ,\ -\sqrt{6}\}$

d $3x^2 + x - 2 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:** $a = 3$, $b = 1$, $c = -2$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(3)(-2) = 25$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{(2)(3)} = \frac{-1 \pm 5}{6}$$

إما $x = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3}$ **أو** $x = \frac{-1-5}{6} = -1$

$\therefore S.S. = \left\{-1\ ,\ \frac{2}{3}\right\}$

(2) أوجد نوع الجذرين للمعادلتين التاليتين ثم تحقق باستخدام القانون:

a $x^2 - 4x - 5 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:** $a = 1$, $b = -4$, $c = -5$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(-5) = 36$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta > 0$

$\therefore$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان، وللتحقق:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

إما $x = \frac{4+6}{2} = 5$ **أو** $x = \frac{4-6}{2} = -1$

$\therefore S.S. = \{-1\ ,\ 5\}$

b $2x^2 - 4x + 2 = 0$

1. نوجد قيم a , b , c **:** $a = 2$, $b = -4$, $c = 2$

2. نوجد المميز Δ **:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(2) = 0$$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta = 0$

$\therefore$ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان، وللتحقق:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{(2)(2)} = \frac{4}{4} = 1$$

$\therefore S.S. = \{1\}$

(3) أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $\frac{1}{2}x(x+6)=8$

$x(x+6)=16 \Rightarrow x^2+6x-16=0$

1. نوجد قيم a , b , c : $a=1\ ,\ b=6\ ,\ c=-16$

2. نوجد المميز Δ :

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4(1)(-16)=100$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta>0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-6\pm10}{2}$$

إما $x=\frac{-6+10}{2}=2$

أو $x=\frac{-6-10}{2}=-8$

$\therefore S.S.=\{-8\ ,\ 2\}$

b $2x(x+1)=2$

بالقسمة على 2: $2x^2+2x-2=0$ ،

$x^2+x-1=0$

1. نوجد قيم a , b , c : $a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-1$

2. نوجد المميز Δ :

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(-1)=5$

3. نحدد نوع الجذرين: $\therefore \Delta>0$

$\therefore$ للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان:

4. نوجد الجذرين باستخدام القانون:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

إما $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

أو $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$\therefore S.S.=\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

(4) ثلاثة أعداد موجبة متتالية مربع أكبرهم يساوي مجموع مربعي العددين الآخرين، أوجد هذه الأعداد.

نفرض أن الأعداد هي $x\ ,\ x+1\ ,\ x+2$ حيث $x>0$

$$(x+2)^2=x^2+(x+1)^2$$
$$x^2+4x+4=2x^2+2x+1$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$(x-3)(x+1)=0$$

إما $x=3$ ✅

أو $x=-1$ مرفوض ❌ (الأعداد موجبة)

$\therefore$ **الأعداد هي** $3\ ,\ 4\ ,\ 5$ 🔎 **تحقق:** $5^2=3^2+4^2=25$

(5) عددان زوجيان متتاليان مجموع مربعيهما يزيد عن حاصل ضربهما بمقدار 28 ، فما العددان؟

نفرض أن العددين $x\ ,\ x+2$

$$x^2+(x+2)^2-x(x+2)=28$$
$$2x^2+4x+4-x^2-2x=28$$
$$x^2+2x-24=0$$
$$(x+6)(x-4)=0$$

إما $x=4$

العددان 4 ، 6

أو $x=-6$

العددان 6– ، 4–

$\therefore$ **العددان هما** $4\ ,\ 6$ **أو** $-4\ ,\ -6$

مهارات تفكير عليا

■ **اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:**

(1) إذا كانت المعادلة $x^2 - 6x - k = 0$ لها جذران حقيقيان متساويان فإن قيمة k هي 3 ✅ b

💬 $\Delta = 36 + 4k = 0 \Rightarrow k = -9$

■ **في البنود من (2-5) اختر الإجابة الصحيحة:**

(2) إذا كانت المعادلة $x^2 - kx + 4 = 0$ ليس لها جذور حقيقية فإن k تحقق:

a $k^2 > 16$ b $k^2 = 16$ ✅ c $k^2 < 16$ d $k > 16$

💬 $\Delta = k^2 - 16 < 0 \Rightarrow k^2 < 16$

(3) مجموعة حل المعادلة $x^2 = 2 - |x|$ هي:

✅ a $\{1\,,\ -1\}$ b $\{2\,,\ -2\}$ c $\{1\,,\ -2\}$ d $\{-1\,,\ 2\}$

💬 $|x|^2 + |x| - 2 = 0 \Rightarrow (|x| + 2)(|x| - 1) = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

(4) مجموعة حل المعادلة $x^2 - 2|x| = 8$ هي:

a $\{2\,,\ -2\}$ ✅ b $\{4\,,\ -4\}$ c $\{2\,,\ 4\}$ d $\emptyset$

💬 $|x|^2 - 2|x| - 8 = 0 \Rightarrow (|x| - 4)(|x| + 2) = 0 \Rightarrow |x| = 4$

(5) إذا كانت $|x| > x$ ، $x^2 + 2x - 3 = 0$ فإن $2x + 4$ تساوي:

✅ a -2 b 2 c 6 d 8

💬 $(x + 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -3$ ، $|x| > x \Rightarrow x < 0$ ، $2(-3) + 4 = -2$

(6) أوجد قيمة k بحيث يكون للمعادلة التالية جذران حقيقيان متساويان: $x^2 + kx + 4 = 0$

$\because \Delta = 0 \ \Rightarrow\ k^2 - 4(1)(4) = 0 \ \Rightarrow\ k^2 = 16 \ \Rightarrow\ k = \pm 4$

(7) حُلَّ كلًّا من المعادلتين التاليتين:

a $x^2 - 3|x| - 28 = 0$

$\because x^2 = |x|^2$

$|x|^2 - 3|x| - 28 = 0$

$(|x| - 7)(|x| + 4) = 0$

إما $|x| = 7$ ، $x = \pm 7$

أو $|x| = -4$ مرفوض ❌

$\therefore S.S. = \{-7\,,\ 7\}$

b $|x - 3|^2 - |x - 3| - 6 = 0$

$(|x - 3| - 3)(|x - 3| + 2) = 0$

إما $|x - 3| = 3$

$x - 3 = \pm 3$

$x = 6\,,\ x = 0$

أو $|x - 3| = -2$ مرفوض ❌

$\therefore S.S. = \{0\,,\ 6\}$

⚠️ **انتبه:**

مربع العدد x هو x^2 ، وضعف العدد x هو $2x$

📋 خلاصة البند 3-1

① الحل البياني

الحلول = الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات

② المميز

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

موجب: حلان ، صفر: حل مكرر ، سالب: لا حلول

③ القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

🌟 أحسنت! القانون العام مفتاحك لكل معادلة تربيعية 🔑