

سما
SAMA

مذكرات سما

الرياضيـات



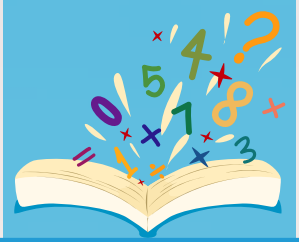
الصف العاشر

المرحلة الثانوية

البند الثاني



الفصل الدراسي الأول
2027 - 2026



www.samakw.com
samakw_net
60084568 /50855008/97442417
حولي مجمع بيروت الدور الأول



الوحدة الثانية

التشابه

2-1 التناسب
Proportion

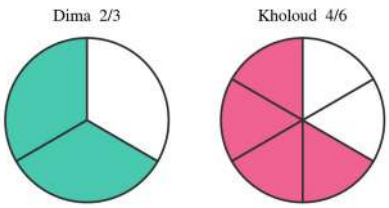
فكرة الدرس:
التعرف على خواص التناسب وكذلك التناسب المتسلسل (الهندسي) واستخدامه في حل التمارين الرياضية.

تعلمنا فيما سبق:
- النسبة والتناسب - التقسيم التناسبي - تطبيقات حياتية (الزكاة، الميراث، مقياس الرسم)

المصطلحات:
النسبة Ratio ، التناسب Proportion ، خواص التناسب Properties of Proportion ، تناسب المتسلسل Continued Proportion

تذكَّر!
$\mathbb{R}^*$: هي مجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا الصفر.

مسألة الدرس:



لدى ديما وخلود دوائر متطابقة، قامت ديما بتقسيم دائرتها إلى ثلاثة أجزاء متساوية ولونت جزئين، بينما خلود جزأت دائرتها إلى ستة أجزاء متساوية ولونت أربعة أجزاء.

❓ هل $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ؟

.....

تعلمت في دراستك السابقة:

النسبة: هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه ولهما نفس وحدة القياس ويمكن التعبير عن النسبة بصورة a إلى b ، وتكتب $a:b$ أو $\frac{a}{b}$

التناسب: هو تساوي نسبتين أو أكثر. فمثلًا: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{12}{20} = \cdots$ ويمكن أن يُكتب:
$3:5 = 6:10 = 12:20 = \ldots$

إذا كان: $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكانت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن a, b, c, d تسمى أعدادًا متناسبة، ويسمى: a الأول المتناسب ، b الثاني المتناسب ، c الثالث المتناسب ، d الرابع المتناسب ، a, d طرفي التناسب ، b, c وسطي التناسب $(a:b = c:d)$

🔍 **ملحوظة:** إذا كان a, b, c, d أعداد متناسبة فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ حيث $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

📐 خواص التناسب

⭐ خاصية (1): « الضرب التقاطعي »

إذا كان: $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن: $a \cdot d = c \cdot b$

أي إن: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين وتسمى هذه الخاصة «قاعدة الضرب التقاطعي»

✏️ مثال (1)

إذا كانت: $2, x, 4, 6$ **أعدادًا متناسبة، أوجد قيمة:** x

✅ الحل: $\because 2, x, 4, 6$ أعداد متناسبة

$\therefore \frac{2}{x} = \frac{4}{6}$

باستخدام الملاحظة السابقة خاصية الضرب التقاطعي

$4x = 12$

بالضرب بالنظير الضربي للعدد 4

$x = 3$

🎯 تحقق من فهمك (1)

إذا كانت: $3, 5, 6, x$ **أعدادًا متناسبة، أوجد قيمة** x

.....

✏️ مثال (2)

أوجد الرابع المتناسب للأعداد: $1, 3, 9, \ldots$

✅ الحل: نفرض أن الرابع للمتناسب هو x :

$\therefore \frac{1}{3} = \frac{9}{x} \Rightarrow x = (3)(9) = 27$

🎯 تحقق من فهمك (2)

أوجد الثالث المتناسب للأعداد: $4 , 7 , ... , 35$

.....

✏️ مثال (3)

أوجد العدد الذي إذا طُرِح من حدَّي النسبة $\frac{7}{9}$ أصبحت $\frac{4}{5}$

✅ الحل: نفرض أن العدد x

$$\therefore \frac{7-x}{9-x} = \frac{4}{5}$$

$$4\,(9-x) = 5\,(7-x)$$

بالضرب التقاطعي

$$36 - 4x = 35 - 5x$$

بتوزيع الضرب على الطرح

$$-4x + 5x = 35 - 36$$

بتجميع الحدود الجبرية المتشابهة

$$x = -1$$

🎯 تحقق من فهمك (3)

أوجد العدد الذي إذا طُرِح من حدَّي النسبة $\frac{5}{6}$ أصبحت $\frac{9}{4}$

.....

✏️ مثال (4)

إذا كان $(5x-1) : (x+4) = 4:5$ **أوجد قيمة** x

✅ الحل:

$$\frac{5x-1}{x+4} = \frac{4}{5}$$

$$5\,(\,5x-1\,) = 4\,(\,x+4\,)$$

بالضرب التقاطعي

$$25x - 5 = 4x + 16$$

بتوزيع الضرب على الطرح والجمع

$$25x - 4x = 16 + 5$$

بتجميع الحدود الجبرية المتشابهة

$$21x = 21 \;\Rightarrow\; x = 1$$

🎯 تحقق من فهمك (4)

أوجد قيمة x إذا كان: $(\,2x+3\,) : (\,3x-5\,) = 3:4$

.....

❓ **هل عكس الخاصية (1) صحيح؟**

⭐ **خاصية (2): « عكس الخاصية 1 »**

إذا كان: $a \cdot d = b \cdot c$ وكان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ فإن: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

✏️ مثال (5)

إذا كان $5a = 4b$ **فأوجد** $\frac{a}{b}$ **حيث** $a, b \in \mathbb{R}^*$

✅ الحل: $\because 5a = 4b \qquad \therefore \frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

🔍 **ملحوظة:**

إذا كانت: $ax = by$ ويكون:

$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$ حيث $a, b, x, y \in \mathbb{R}^*$

🎯 تحقق من فهمك (5)

إذا كان: $2a = 7b$ ، **فأوجد** $\frac{a}{b}$

🏀 استخدام النماذج: استخدام التناسب في الرياضيات

يمارس إبراهيم رياضة كرة السلة لمدة 30 دقيقة ليفقد 300 سعرة حرارية فإذا أراد إبراهيم أن يفقد 450 سعرة حرارية فكم دقيقة يحتاج إبراهيم ليمارس لعبة كرة السلة؟

✅ الحل:

نفرض أن x يمثل عدد الدقائق فيكون: $\frac{300}{450} = \frac{30}{x}$ (بالضرب التقاطعي)

$(300)(x) = (30)(450) \Rightarrow x = 45$ دقيقة

❓ **لماذا؟**

ℹ️ معلومة: كرة السلة

تُعد كرة السلة في الكويت من أبرز الألعاب الجماعية، حيث تأسس الاتحاد الكويتي لكرة السلة عام 1959 وشارك المنتخب الوطني في عدة بطولات آسيوية، وكانت أفضل مشاركة له عام 1983 بالحصول على المركز الرابع في بطولة أمم آسيا لكرة السلة التي أُقيمت في هونج كونج. 🇰🇼

⭐ **خاصية (3): إذا كان** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **وكان** $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ **فإن:**

(1) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (2) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (3) $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ ⬅️ خواص التناسب

❓ **هل يمكن برهان خاصية (3)؟**

✏️ مثال (6)

أوجد $\frac{x}{y}$ **في كل مما يلي حيث:** $x \neq 0 , y \neq 0$:

a $\frac{2x+y}{5x-3y} = \frac{1}{2}$ **b** $3x = 4y$

a $\therefore \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

b $3x = 4y$

بالضرب التقاطعي

$5x - 3y = 2(2x + y)$

$5x - 3y = 4x + 2y$

فصل المتغيرات

$5x - 4x = 2y + 3y$

$$x = 5y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{1} \ , \ x : y = 5 : 1$$

ℹ️ معلومة: فصل المتغيرات

بوضع الحدود الجبرية التي تحتوي على المتغير x في أحد الأطراف للمتساوية والحدود الجبرية التي تحتوي على المتغير y في الطرف الآخر للمتساوية.

🎯 تحقق من فهمك (6)

أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث: $y \neq 0 \ , \ x \neq 0$:

a $5x = 7y$

b $\frac{5x - 2y}{5x + 2y} = \frac{1}{4}$

⭐ خاصية (4):

إذا كان: $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \ , \ k \in \mathbb{R}^*$ حيث k عدد ثابت فإن:

$$a = bk \ , \ c = dk$$

✏️ مثال (7)

إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ **أوجد** $\frac{2a + 5b}{3b + 2a}$

✅ الحل: نفرض أن

$$a = 3k \ , \ b = 4k \ , \ k \neq 0$$

باستخدام خاصية 4 $\therefore \frac{2a + 5b}{3b + 2a} = \frac{2(3k) + 5(4k)}{3(4k) + 2(3k)}$

تجميع الحدود $= \frac{6k + 20k}{12k + 6k} = \frac{26k}{18k} = \frac{13}{9}$

✳ **الحل الآخر:** بقسمة كل من البسط والمقام على b :

$$= \frac{\frac{2a}{b} + \frac{5b}{b}}{\frac{3b}{b} + \frac{2a}{b}} = \frac{2\left(\frac{3}{4}\right) + 5}{3 + 2\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{13}{9}$$

المتشابهة

🎯 تحقق من فهمك (7)

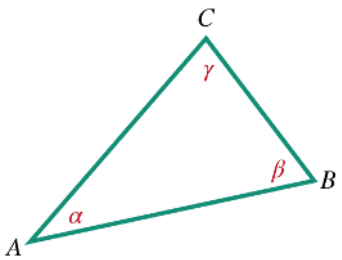
إذا كان: $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ ، **فأوجد القيمة العددية للمقدار:** $\frac{2x+3y}{5x+2y}$

📐 استخدام النماذج: استخدام التناسب في الهندسة

إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث هي $4:5:6$ ،

احسب قياس كل زاوية من زوايا المثلث

نرسم شكلًا تخطيطيًّا للمثلث. نفرض أن قياسات زوايا المثلث تمثلها α,β,γ وتكون: $\alpha:\beta:\gamma=4:5:6$



نفرض أن: $\frac{\alpha}{4}=\frac{\beta}{5}=\frac{\gamma}{6}=k\ ,\ k\neq 0$

$\therefore \alpha=4k\ ,\ \beta=5k\ ,\ \gamma=6k$ ❓ لماذا؟

$\therefore 4k+5k+6k=180^\circ$ ❓ لماذا؟

$15k=180^\circ \Rightarrow k=12^\circ$

$=(5)(12^\circ)=60^\circ\ ,\ m(\widehat{C})=(6)(12^\circ)=72^\circ$

✳ **تحقق من الحل وفكر بطريقة أخرى للحل.**

ℹ️ معلومة:

α,β,γ هي حروف لاتينية تُستخدم للتعبير عن الزوايا: α تُقرأ ألفا ، β تُقرأ بيتا ، γ تُقرأ جاما

⭐ مما سبق نستنتج: خاصية (4):

إذا كان لدينا مجموعة من النسب المتساوية فإنه يمكننا الحصول على العديد من النسب الأخرى التي كل منها يساوي أي نسبة من النسب الأصلية وذلك عن طريق جمع المقدمات والتوالي لكل النسب أو بعضها سواء مباشرة أو بعد ضرب حدي كل نسبة في أي عدد حقيقي لا يساوي الصفر.

إذا كان: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{\ell}{s}=\cdots$ وكانت $k_1,k_2,k_3,\ldots\in\mathbb{R}^*$ فإن: إحدى النسب $=\frac{ak_1+ck_2+\ell k_3+\ldots}{bk_1+dk_2+sk_3+\ldots}$

ℹ️ معلومة:

النسبة $\frac{x}{y}$: يسمى x مقدم النسبة ، ويسمى y تالي النسبة

✏️ مثال (8)

إذا كانت الأعداد $5,6,3$ متناسبة مع a,b,c ، أوجد قيمة المقدار: $\frac{a+2b+c}{3a+b+c}$

✅ الحل: ∵ الأعداد $5,6,3$ متناسبة مع a,b,c $\therefore \frac{a}{5}=\frac{b}{6}=\frac{c}{3}$

بضرب حدي النسبة الثانية في 2 ، وجمع المقدمات والتوالي للنسب الثلاث:

$=\frac{a+2b+c}{5+12+3}=\frac{a+2b+c}{20}$ إحدى النسب ⇐ (1)

بضرب حدي النسبة الأولى في 3 ، وجمع المقدمات والتوالي للنسب الثلاث:

$=\frac{3a+b+c}{15+6+3}=\frac{3a+b+c}{24}$ إحدى النسب ⇐ (2)

$$\therefore \frac{a+2b+c}{20}=\frac{3a+b+c}{24}\Rightarrow \frac{a+2b+c}{3a+b+c}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$$

✳ **الحل الآخر (باستخدام خاصية 4):** نفرض أن: $\frac{a}{5}=\frac{b}{6}=\frac{c}{3}=k\ ,\ k\neq 0$

$$\therefore a=5k\ ,\ b=6k\ ,\ c=3k$$

$$\frac{a+2b+c}{3a+b+c}=\frac{5k+2(6k)+3k}{3(5k)+6k+3k}=\frac{5k+12k+3k}{15k+6k+3k}=\frac{20k}{24k}=\frac{5}{6}$$

⚠️ انتبه:

إذا كانت a,b,c متناسبة مع E,F,G فإن: $\frac{a}{E}=\frac{b}{F}=\frac{c}{G}=k$ حيث $k\neq 0$ عدد ثابت

🎯 تحقق من فهمك (8)

إذا كان: $\frac{a}{2}=\frac{b}{7}=\frac{c}{5}$ ، أوجد: $\frac{a+2b}{3b+c}$ (بطريقتين مختلفتين).

🤔 **فكّر معي: عرض المعلم السؤال التالي: إذا كان $2a = 3b = 5c$ أوجد $a: b: c$ ،**
وقام فهد وإبراهيم بحل السؤال بطريقتين مختلفتين:

طريقة (إبراهيم)

$2a = 3b = 5c$ بالقسمة على 30

$$\frac{2a}{30} = \frac{3b}{30} = \frac{5c}{30} \Rightarrow \frac{a}{15} = \frac{b}{10} = \frac{c}{6}$$
$$a: b: c = 15: 10: 6$$

طريقة (فهد)

$$2a = 3b = 5c$$
$$a: b: c = 2: 3: 5$$

❓ أي الطريقتين تؤيد؟ دلل على إجابتك.

🔗 التناسب المتسلسل (الهندسي)

📌 **تعريف:**

الكميات: a, b, c في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ أو $b^2 = ac$

ويسمى: a الأول المتناسب ، b الوسط المتناسب ، c الثالث المتناسب ، حيث:

$$b = \pm\sqrt{a \cdot c}$$

🔍 **ملحوظة:** a, c إما أن يكونا موجبين معًا أو سالبين معًا. الأول المتناسب = مربع الوسط المتناسب ÷ الثالث المتناسب ، الثالث المتناسب = مربع الوسط المتناسب ÷ الأول المتناسب

✏️ مثال (9)

أوجد الوسط المتناسب بين العددين 9 , 16

✅ الحل: نفرض أن b هو الوسط المتناسب:

$$b = \pm\sqrt{(9)\ (16)} = \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

🎯 تحقق من فهمك (9)

○ **أوجد الوسط المتناسب بين العددين** $-3\ ,\ -27$

.....

🤔 **فكّر معي: إذا كان** $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ **في تناسب متسلسل، فإن:** $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$ **حيث** k **عدد ثابت**

من التناسب: $c=$ ..... ، $b=$ ..... (استبدل $c=d\cdot k$) ، $a=$ ..... (استبدل $b=d\cdot k^2$)

نستطيع استنتاج التالي: إذا كان $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ ، k ، k عدد ثابت لا يساوي الصفر وكان: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$ فإن: $a=dk^3\ ,\ b=dk^2\ ,\ c=dk$

✏️ مثال (10)

إذا كان: a,b,c **في تناسب متسلسل أثبت أن:** $\frac{2a+3b}{2b+3c}=\frac{a}{b}$

✅ الحل: $\because a,b,c$ في تناسب متسلسل فإن $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$ $\therefore b=ck\ ,\ a=ck^2$ (بالتعويض)

الطرف الأيمن $= L.H.S=\frac{2a+3b}{2b+3c}=\frac{2ck^2+3ck}{2ck+3c}=\frac{ck\,(\,2k+3\,)}{c\,(\,2k+3\,)}=k$ ⇐ (1)

الطرف الأيسر $= R.H.S=\frac{a}{b}=\frac{ck^2}{ck}=k$ ⇐ (2)

من (1)، (2) ينتج أن: $\frac{2a+3b}{2b+3c}=\frac{a}{b}$

🎯 تحقق من فهمك (10)

إذا كان: a,b,c **في تناسب متسلسل أثبت أن:** $\frac{a+3b}{b+3c}=\frac{a-2b}{b-2c}$ **حيث المقام** $\neq$ **صفر**

.....

✏️ مثال (11)

إذا كان: $\frac{2a+3b}{2b+3c}=\frac{a+2b}{b+2c}$ **أثبت أن:** b **وسط متناسب بين** a,c

بالضرب التقاطعي

$$(2a+3b)(b+2c)=(a+2b)(2b+3c)$$

$$2ab+4ac+3b^2+6bc=2ab+3ac+4b^2+6bc$$

بالتبسيط وجمع الحدود الجبرية المتشابهة

$$4ac-3ac=4b^2-3b^2$$

$$ac=b^2$$

$\therefore b$ وسط متناسب بين a,c

🧠 تذكَّر!

إذا كان a,b,c في تناسب متسلسل فإن: (1) $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ (2) $b^2=ac$

🎯 تحقق من فهمك (11)

إذا كان: $\frac{a+b}{b+c}=\frac{a}{b}$ **أثبت أن** b **وسط بين** a,c

🤔 فكّر معي: إذا كانت الأعداد: $6,x,54,162$ في تناسب متسلسل أوجد قيمة x وكان هناك إجابتين لفهد وإبراهيم:

طريقة (إبراهيم)

$$\frac{6}{x}=\frac{x}{54}=\frac{54}{162}$$

$$\frac{6}{x}=\frac{x}{54}$$

$$x^2=324$$

$$x=\pm\sqrt{324}$$

$$x=\pm 18$$

طريقة (فهد)

$$\frac{6}{x}=\frac{x}{54}=\frac{54}{162}$$

$$\frac{6}{x}=\frac{54}{162}$$

$$(x)(54)=(6)(162)$$

$$x=\frac{972}{54}$$

$$x=18$$

❓ أي الطريقتين تؤيد؟ دلل على إجابتك.

تعميم: الكميات $a, b, c, d, \dots$ في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \cdots$

💪 أتدرب وأحل المسائل

أولًا - البنود الموضوعية:

■ **في البنود (1-4) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:**

(1) إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ فإن $ab=3\times 4$ a b

(2) إذا كان $\frac{x}{3}=\frac{14}{23}$ فإن $x=\frac{23}{42}$ a b

(3) إذا كان $\frac{x-7}{7}=\frac{1}{8}$ فإن $x=\frac{63}{8}$ a b

(4) زوج النسب التالي: $\frac{9}{12}=\frac{4}{5}$ لا يكون تناسبًا a b

■ **في البنود (1-5) اختر الإجابة الصحيحة:**

(1) إذا كانت $a, 3x, 2b, 4x$ في تناسب فإن $\frac{a}{b}$ تساوي:

a $\frac{3}{2}$ b $\frac{2}{3}$ c $\frac{4}{3}$ d $\frac{3}{4}$

(2) إذا كان $\frac{x}{y}=7$ فإن $x+7y$ تساوي:

a $7x$ b $8x$ c $2x$ d $10x$

(3) إذا كان $2x-5y=0$ فإن $\frac{x}{y}$ تساوي:

a $\frac{5}{2}$ b $\frac{2}{5}$ c $\frac{3}{2}$ d $\frac{2}{3}$

(4) إذا كان $\frac{x}{2y}=\frac{3}{5}$ فإن $\frac{x+2y}{2x-y}$ تساوي:

a $\frac{15}{9}$ b $\frac{16}{7}$ c $\frac{7}{16}$ d $\frac{9}{15}$

(5) إذا كان $20\ ,\ x\ ,\ 32$ في تناسب متسلسل فإن x تساوي:

a $\pm 2\sqrt{10}$ **b** $\pm 4\sqrt{10}$ **c** $\pm 8\sqrt{10}$ **d** $\pm \frac{1}{8\sqrt{10}}$

ثانيًا - أسئلة المقال:

(1) أوجد الرابع المتناسب للأعداد $5\,,\,7\,,\,10\,,\,\ldots$

(2) أوجد الثالث المتناسب للأعداد $4\,,\,6\,,\,\ldots\,,\,9$

(3) أوجد قيمة x **إذا كانت الأعداد** $x\,,\,5\,,\,20\,,\,25$ **متناسبة.**

(4) أوجد العدد الحقيقي الذي إذا أضيف إلى حدي النسبة $\frac{4}{5}$ **أصبحت** $\frac{2}{3}$ **.**

(5) أوجد العدد الذي إذا طرح من كل من الأعداد $16, 10, 11, 7$ **بالترتيب نفسه أصبحت متناسبة.**

(6) إذا كان: $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$, $\frac{c}{d}=\frac{3}{4}$ أوجد $\frac{3ac+2bd}{bc-2ad}$.

(7) إذا كانت الأعداد: $4\,,\,x-2\,,\,1\,,\,\frac{1}{2}$ في تناسب متسلسل أوجد قيمة x .

(8) إذا كانت الأعداد: a,b,c تكون تناسبًا متسلسلًا، أثبت أن $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$ حيث المقام $\neq$ صفر

(9) إذا كانت الأعداد $3, 5, 11$ متناسبة مع a, b, c أوجد القيمة العددية للمقدار: $\frac{a+3b}{5b+c}$

.....

🚀 مهارات تفكير عليا

(1) إذا كان: $4x^2 - 12xy + 9y^2 = 0$ أوجد $\frac{x}{y}$

.....

(2) إذا كان: $9x^2 - 25y^2 = 0$ أوجد $\frac{x}{y}$

.....

📋 خلاصة البند 2-1

الضرب التقاطعي	خاصية الثابت k	التناسب المتسلسل
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk\ ,\ c = dk$	$b^2 = ac\ ,\ b = \pm\sqrt{ac}$

🌟 تذكّر: افرض k عندما تتساوى النسب 💡

2-2 تشابه المضلعات

Similar Polygons

💡 فكرة الدرس:

سوف نتعلم دراسة تشابه المضلعات.

📚 تعلمنا فيما سبق:

التحويلات الهندسية: التكبير - الدوران - الانعكاس - الانسحاب

📝 المصطلحات:

مضلعات متشابهة Similar Polygons ، أضلاع متناظرة Corresponding Sides ، زوايا متناظرة Corresponding Angles ، نسبة التشابه Similar Ratio

🧠 تذكَّر!

التكبير تحويل هندسي يحافظ على قياسات الزوايا ولا يحافظ على الأطوال.

📖 مسألة الدرس:

قام عبدالله بتكبير صورة شخصية له من 2×3 إلى 4×6 لإرفاقها في السيرة الذاتية للتقديم بوظيفة حكومية.

ما الذي اختلف في الصورتين؟

ما الذي ظل ثابتًا؟

.....

⭐ تعريف تشابه المضلعين - تعميم (1):

يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:

1. قياسات زواياهما المتناظرة متساوية. 2. أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

«والعكس صحيح»

وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين **نسبة التشابه**، ويستخدم الرمز $(\sim)$ للتعبير عن تشابه المضلعين.

⭐ تعميم (2): المضلعان المتطابقان متشابهان.

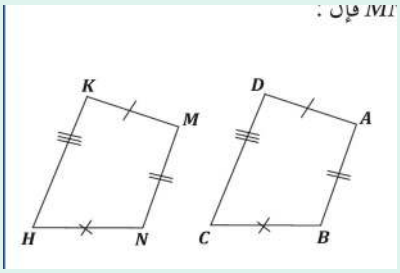
إذا كان المضلع $ABCD \cong$ المضلع $MNHK$ فإن:

(1)

$$m\left(\widehat{A}\right) = m\left(\widehat{N}\right) , m\left(\widehat{C}\right) = m\left(\widehat{H}\right) , m\left(\widehat{D}\right) = m\left(\widehat{K}\right)$$

(2) $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NH} = \frac{CD}{HK} = 1$

ماذا تستنتج؟ أي أن المضلع $ABCD \sim$ المضلع $MNHK$



تذكَّر!

يستخدم الرمز $\cong$ للتعبير عن التطابق.

معلومة:

- المضلع المنتظم: هو شكل هندسي جميع زواياه متطابقة وجميع أضلاعه متطابقة. - جميع الأشكال الهندسية المنتظمة والتي لها نفس العدد من الأضلاع متشابهة.

ملحوظة: يراعى ترتيب كتابة الرؤوس المتناظرة للأشكال الهندسية المتشابهة حتى يسهل كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة.

تعميم (3):

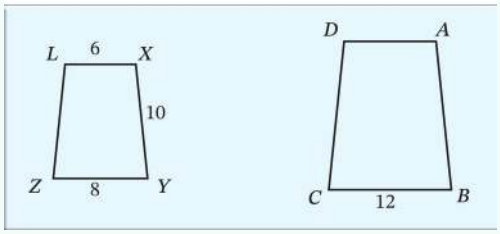
إذا كان المضلع A يشابه المضلع B ، وكان المضلع B يشابه المضلع C فإن المضلع A يشابه المضلع C ، أي أنه: إذا كان $A \sim B$, $B \sim C$ فإن $A \sim C$

من تعميم 1، 2، 3: نستطيع القول إن الشكلين الهندسيين متشابهان إذا كان أحدهما تكبيرًا أو تصغيرًا أو مطابقًا للآخر.

■ المضلعات المتشابهة يكون لها نفس عدد الأضلاع وليس بالضرورة أن يكون لها نفس القياس بالأطوال.

مثال (1)

في الشكل المقابل: إذا كان $XYZL \sim ABCD$ **أوجد:** AB , DA



الحل: ∴ المضلع $XYZL \sim$ المضلع $ABCD$

$$\therefore \frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC} = \frac{LX}{DA}$$

باستخدام تعريف التشابه

$$\frac{10}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{6}{DA}$$

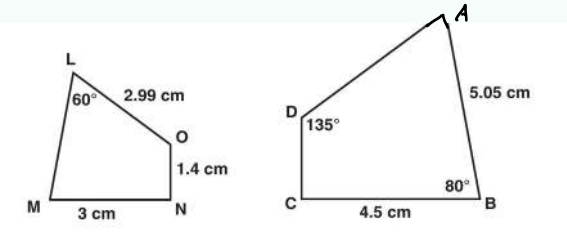
$$\frac{10}{AB} = \frac{8}{12} \Rightarrow AB = \frac{10 \times 12}{8} = 15$$

$$\frac{6}{DA} = \frac{8}{12} \Rightarrow DA = \frac{6 \times 12}{8} = 9$$

باستخدام الضرب التقاطعي وبالمثل

🎯 تحقق من فهمك (1)

في الشكل المقابل: المضلعان $LMNO$, $ABCD$ متشابهان. أوجد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال الأضلاع المجهولة في كلٍّ من المضلعين.



⭐ **نظرية: إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي $\frac{a}{b}$ فإن:**

1. النسبة بين محيطي الشكلين $= \frac{a}{b}$ وهي نسبة التشابه
2. النسبة بين مساحتي الشكلين $= \left(\frac{a}{b}\right)^2$ وهي مربع نسبة التشابه

📌 **ملاحظة: إذا كان المضلع A يشابه المضلع B (كانت k نسبة تشابه المضلع A : المضلع B):**

(1) $k > 1$ فإن المضلع A هو تكبير للمضلع B وتسمى k معامل التكبير
(2) $0 < k < 1$ فإن المضلع A هو تصغير للمضلع B وتسمى k معامل التصغير
(3) $k = 1$ فإن المضلع A يطابق المضلع B

✏️ مثال (2)

إذا كانت نسبة التشابه لمضلعين متشابهين تساوي $\frac{5}{6}$ ، وكان محيط المضلع الأصغر يساوي $14.5\,cm$ ، أوجد محيط المضلع الأكبر.

✅ الحل: النسبة بين محيطي المضلعين = نسبة التشابه

$$\frac{5}{6} = \frac{14.5}{P} \Rightarrow P = \frac{6 \times 14.5}{5} = 17.4\,cm$$

🎯 تحقق من فهمك (2)

لدينا شكلان رباعيان متشابهان ونسبة التشابه بينهما $\frac{5}{4}$ ، فإذا كانت مساحة الشكل الرباعي الأكبر هي $30\,cm^2$ فما مساحة الشكل الرباعي الأصغر؟

💪 أتدرب وأحل المسائل

أولًا - البنود الموضوعية:

■ **في البنود من (1-3) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة أو (b) إذا كانت العبارة خاطئة:**

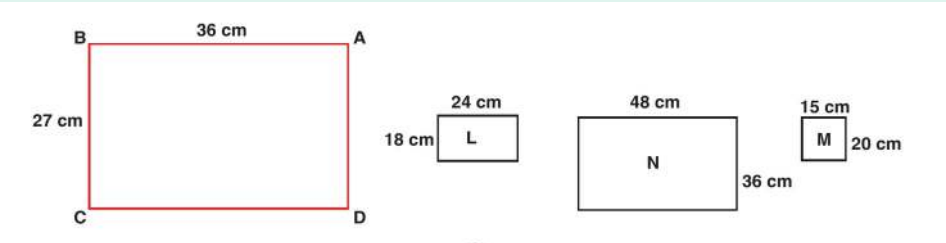
(1) كل مضلعين متطابقين هما مضلعان متشابهان. **a** **b**

(2) كل مضلعين متشابهين هما مضلعان متطابقان. **a** **b**

(3) إذا تساوت الزوايا المتناظرة في مضلعين فإن المضلعين متشابهان. **a** **b**

■ **في البنود من (1-6) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة:**

(1) المستطيلات المشابهة للمستطيل $BADC$ هي:



a فقط L **b** فقط N **c** L, N, M **d** فقط N, L

(2) المضلعان المتشابهان يكونان متطابقين إذا كانت نسبة التشابه x ، فإن x تساوي:

a $x = 1$ **b** $x > 1$ **c** $0 < x < 1$ **d** $x = \frac{1}{2}$

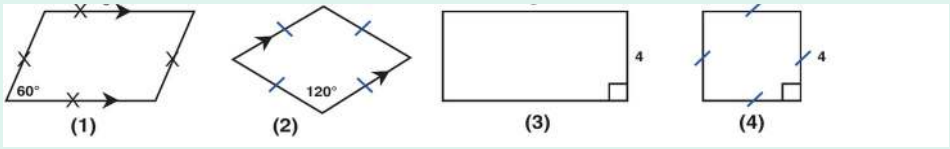
(3) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما $36:25$ ، فإن النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما تساوي:

a $6:5$ **b** $5:6$ **c** $36:25$ **d** $4:5$

(4) إذا كانت النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين $25:16$ طولي ضلعين متناظرين فيهما تساوي:

a $2:5$ **b** $4:5$ **c** $16:25$ **d** $16:41$

(5) أي من المضلعين التاليين متشابهان؟



a المضلعان (1), (2) b المضلعان (1), (3) c المضلعان (3), (4) d المضلعان (2), (4)

(6) إذا كان: $\Delta ABC \sim \Delta LMN$, $AB = 3cm$, $LM = 6cm$, $MN = 8cm$ فإن BC تساوي:

a $4\,cm$ b $3\,cm$ c $2\,cm$ d $1.5\,cm$

ثانيًا - أسئلة المقال:

(1) إذا كانت نسبة التشابه بين مستطيلين هي $2:3$ ، وكان محيط المستطيل الأكبر يساوي 75 ، أوجد محيط المستطيل الأصغر.

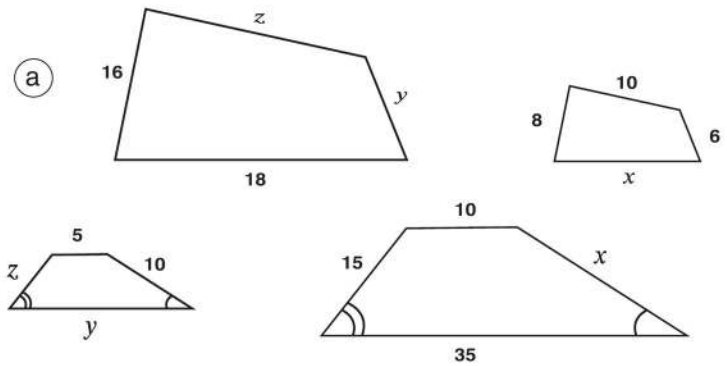
.....

(2) النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين هي $\frac{16}{9}$ ، ما محيط المضلع الأكبر إذا كان محيط المضلع الأصغر $24\,cm$ ؟

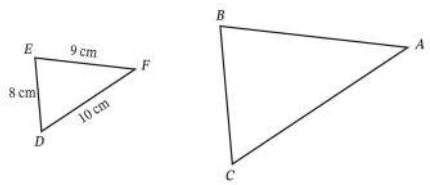
.....

(3) مستطيلان متشابهان. بُعدا الأول $12\,cm$, $8\,cm$ ، ومحيط الثاني $200\,cm$. - أوجد نسبة التشابه. - أوجد مساحة المستطيل الثاني.

(4) احسب x, y, z في الحالات التالية علمًا بأن المضلعين متشابهان.



(5) في الشكل المقابل: $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ ، إذا كان محيط $\Delta ABC = 81\,cm$ أوجد أطوال أضلاع ΔABC



🚀 مهارات تفكير عليا

■ **النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين هي $3:4$ ، إذا كان مجموع مساحتي سطحيهما تساوي $225\,cm^2$ ، فأوجد مساحة كل منهما؟**

.....

📋 خلاصة البند 2-2

شرطا التشابه	المحيطان	المساحتان
زوايا متناظرة متساوية + أضلاع متناظرة متناسبة	نسبتهما = نسبة التشابه k	نسبتهما $= k^2$

🌟 اكتب الرؤوس المتناظرة بالترتيب قبل كتابة التناسب 💡

2-3 تشابه المثلثات

Similar Triangles

💡 فكرة الدرس:

سوف نتعلم في هذا البند حالات تشابه المثلثات.

📚 تعلمنا فيما سبق:

- التكبير - التصغير - التطابق

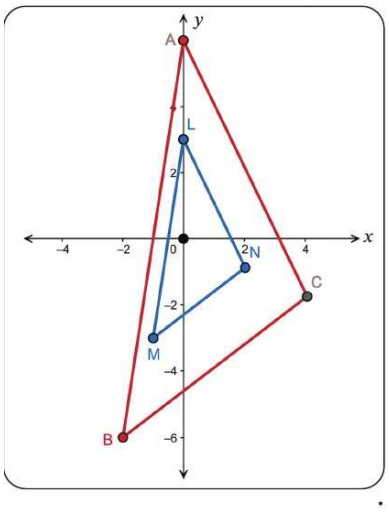
📝 المصطلحات:

رمز التشابه $\sim$

📖 مسألة الدرس:

في الشكل المقابل: ΔABC هو صورة ΔLMN تحت تأثير تكبير مركزه نقطة الأصل معامله 2 . من خواص التكبير أنه يحافظ على قياسات الزوايا:

$m\left(\widehat{B}\right) = m(\ldots\ldots)\ ,\ m\left(\widehat{C}\right) = m(\ldots\ldots)$ ،



(1) قياسات الزوايا المتناظرة في المثلثين متساوية

من خواص التكبير أنه يحافظ على تناسب أطوال الأضلاع: $\frac{AB}{LM} = \frac{AC}{LN} = \frac{BC}{MN} = \frac{2}{1}$ ∴ (معامل التكبير)

(2) أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة

(1، 2) هذان الشرطان أساسيان لتشابه أي مضلعين. ونكتفي بشرط واحد لإثبات تشابه مثلثين حيث إن تشابه المثلثات يعتبر حالة خاصة من تشابه المضلعات.

❓ هل كل مثلثين متطابقين متشابهان؟ وضح إجابتك.

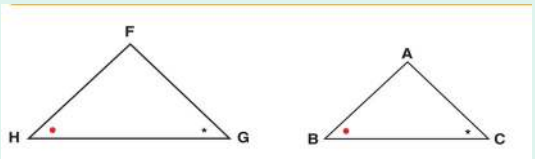
عزيزي المتعلم من مسألة اليوم نستطيع إيجاد طرق أخرى لإثبات تشابه مثلثين. في أي مثلثين متشابهين تكون قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، والنسب بين طولي كل ضلعين متناظرين متساوية. النظريات التالية تبين أنه إذا توافر أحد الشرطين يكفي لإثبات أن المثلثين متشابهان حيث إن الشرط الآخر سيكون محققًا أيضًا.

ℹ️ معلومة: الغرفة المظلمة

الفكرة التي بنيت عليها فكرة التصوير الفوتوغرافي: عند وضع جسم أمام صندوق يحتوي على ثقب صغير يقابله لوح شفاف تسقط الأشعة في خطوط مستقيمة وتتقاطع عنده فيظهر أسفل الجسم من الأعلى ويظهر رأس الجسم في الأسفل، وكلما اقترب الجسم من الثقب

تكبر الصورة والعكس صحيح، وتعد هذه الظاهرة أساس عمل الغرفة المظلمة (Camera Obscura).

⭐ نظرية (1): يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.



$$n\left(\widehat{H}\right) = m\left(\widehat{C}\right) \ , \ m\left(\widehat{G}\right) = m\left(\widehat{B}\right)$$

$\Delta FGH \sim \Delta ABC$ ، وينتج من التشابه أن:

$$\frac{FG}{AB} = \frac{GH}{BC} = \frac{FH}{AC}$$

🧠 تذكَّر!

يتشابه المضلعان إذا وفقط إذا كان: (1) زواياها المتناظرة متطابقة. (2) أطوال أضلاعها المتناظرة متناسبة.

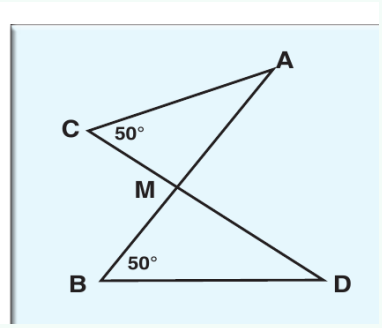
🧠 تذكَّر!

إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الآخر. 🔍 يراعى ترتيب رؤوس المثلثين عند كتابة عبارة التشابه.

✏️ مثال (1)

في الشكل المقابل:

$m\left(\widehat{C}\right) = m\left(\widehat{B}\right) = 50°$



أثبت أن:

$\Delta DBM \sim \Delta ACM$

✅ الحل: $\Delta DBM \, , \, \Delta ACM$ وفيهما:

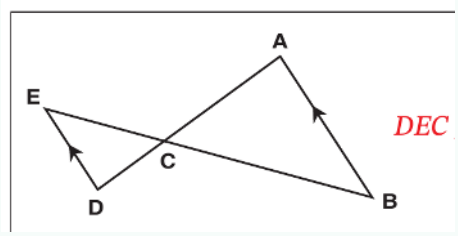
$m\left(\widehat{C}\right) = m\left(\widehat{B}\right) = 50°$ معطى (1)

$m\left(\widetilde{CMA}\right) = m\left(\widehat{BMD}\right)$ بالتقابل بالرأس (2)

$\Delta DBM \sim \Delta ACM$ من (1)، (2)

🎯 تحقق من فهمك (1)

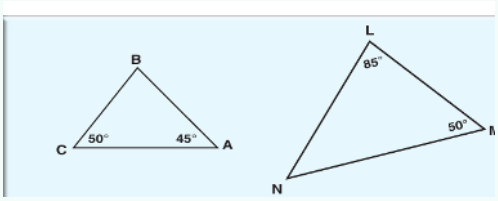
في الشكل المقابل: $\bar{DE} \parallel \bar{BA}$ **أثبت أن المثلثين** DEC , ABC **متشابهان ثم اكتب عبارة التشابه.**



.....

✏️ مثال (2)

في الشكل المقابل:



$m\left(\widehat{C}\right) = 50^\circ$, $m\left(\widehat{L}\right) = 85^\circ$, $m\left(\widehat{M}\right) = 50^\circ$

أثبت أن: $\Delta ABC \sim \Delta NLM$

✅ الحل: ΔABC , ΔNML وفيهما:

$m\left(\widehat{M}\right) = m\left(\widehat{C}\right) = 50^\circ$ (1)

$180^\circ - \left(50^\circ + 45^\circ\right) = 85^\circ$

$m\left(\widehat{L}\right) = m\left(\widehat{B}\right) = 85^\circ$ (2)

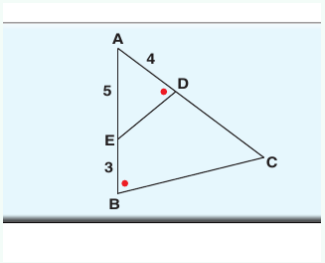
$\Delta ABC \sim \Delta NLM$ من (1)، (2)

🎯 تحقق من فهمك (2)

المثلث ABC **قائم الزاوية في** A **فيه** $m\left(\widehat{B}\right) = 55^\circ$ **، والمثلث** NLM **قائم الزاوية**

في L فيه $m\left(\widehat{M}\right)=35^\circ$ ، أثبت أن المثلثين متشابهان.

✏️ مثال (3)



في الشكل المقابل: 1. أثبت أن:
$\Delta ACB \sim \Delta AED$ **2. أوجد طول** $\bar{DC}$

✅ الحل: $\Delta ACB\,,\ \Delta AED$ فيهما:

A زاوية مشتركة (1)

$m\left(\widehat{D}\right)=m\left(\widehat{B}\right)$ معطى (2)

$\Delta ACB \sim \Delta AED$

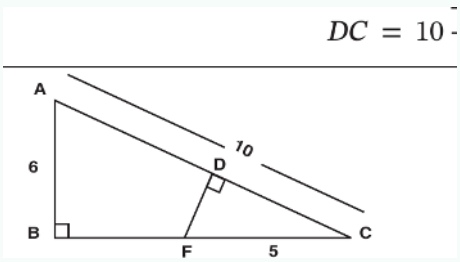
$\therefore \frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$

$\frac{AC}{5}=\frac{8}{4} \Rightarrow AC=\frac{8\times 5}{4}=10$

$DC=10-4=6$

🎯 تحقق من فهمك (3)

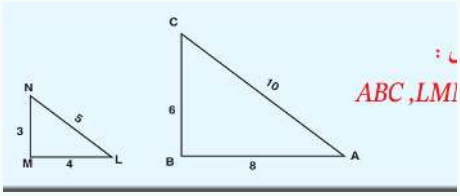
في الشكل المقابل: (1) أثبت أن المثلثين $ABC\,,\ FDC$ **متشابهان. (2) أوجد طول** $\bar{FD}$



.....

⭐ **نظرية (2): يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة.**

✏️ مثال (4)



في الشكل المقابل: أثبت أن المثلثين ABC, LMN متشابهان.

✅ الحل: $\Delta ABC, \Delta LMN$ وفيهما:

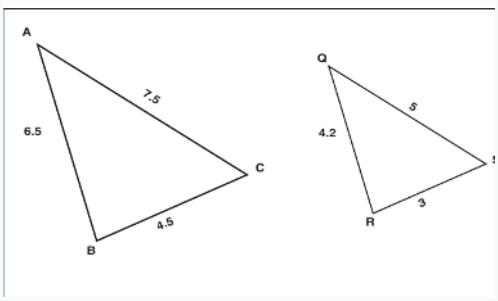
$\frac{LM}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (1) ، $\frac{LN}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ (2) ،

$\frac{MN}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (3)

من (1)، (2)، (3) ينتج أن: $\frac{LM}{AB} = \frac{LN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta LMN$

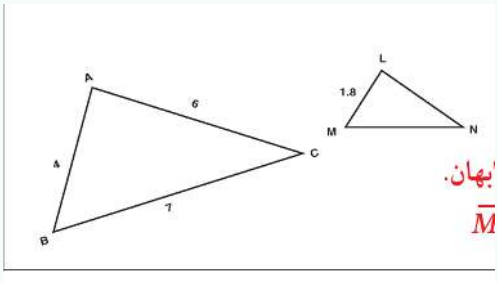
🎯 تحقق من فهمك (4)



a في الشكل المقابل: أثبت أن المثلثين ABC, QRS متشابهان.

.....

b في الشكل المقابل: المثلثان ABC, LMN متشابهان. أوجد طول كل من $\bar{MN}, \bar{LN}$



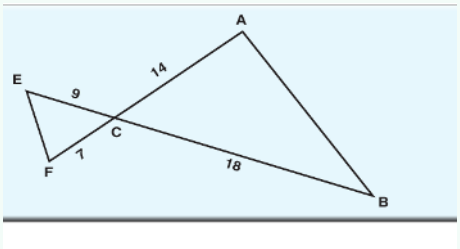
ℹ️ **معلومة:**

عندما نقول: (بالتوازي والتناظر) تعني وجود مستقيمين متوازيين وقاطع لهما وزاويتان في وضع تناظر.

⭐ **نظرية (3): يتشابه المثلثان إذا طابقت زاوية في أحدهما زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.**

✏️ مثال (5)

في الشكل المقابل: أثبت أن المثلثين ABC, FEC متشابهان. ثم اكتب عبارة التشابه.



✅ الحل: المثلثان $\Delta ABC, \Delta EFC$ فيهما:

بالتقابل بالرأس $m\left(\widehat{ECF}\right) = m\left(\widehat{BCA}\right)$ (1)

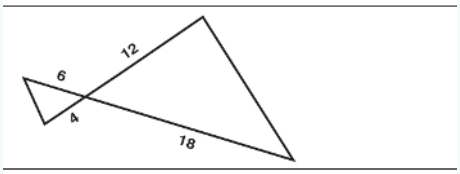
$\frac{FC}{AC} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}, \frac{EC}{BC} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{FC}{AC} = \frac{EC}{BC}$ (2)

من (1)، (2) $\Delta ABC \sim \Delta EFC$

🎯 تحقق من فهمك (5)

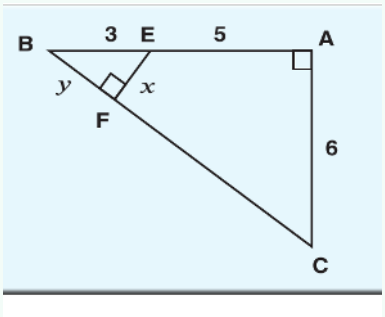
في الشكل المقابل: أثبت أن المثلثين متشابهان.



.....

✏️ مثال (6)

في الشكل المقابل: أثبت أن المثلثين BAC , BFE متشابهان. ثم أوجد كلًّا من x, y



✅ الحل: المثلثان ΔBAC , ΔBFE فيهما:

1) زاوية مشتركة $\widehat{B}$

2) معطى $m\left(B\widehat{F}E\right) = m\left(B\widehat{A}C\right) = 90^\circ$

من (1)، (2) $\Delta BFE \sim \Delta BAC$

في ΔABC القائم في A $(8)^2 = 100 \Rightarrow BC = 10$

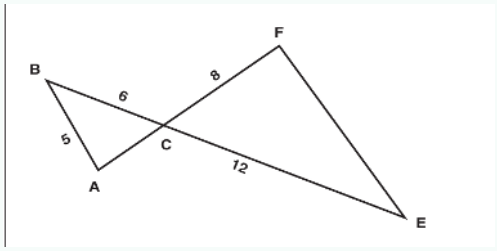
$\frac{F}{A} = \frac{FE}{AC} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{y}{8} = \frac{x}{6} = \frac{3}{10}$

$1.8\,cm$, $y = \frac{3 \times 8}{10} = 2.4\,cm$

🎯 تحقق من فهمك (6)

في الشكل المرسوم: a أثبت أن $\Delta FEC \sim \Delta ABC$

b أوجد $\bar{EF}$



.....

استخدام النماذج: استخدام المرايا في حساب ارتفاع مبنى

أراد فهد قياس ارتفاع مبنى فوضع مرآة على الرصيف عند النقطة A **على مسافة** $24\,m$ **، ثم تراجع فهد مسافة** $2.7\,m$ **من المرآة عندما شاهد قمة المبنى في المرآة، هل يستطيع فهد حساب ارتفاع المبنى؟ علمًا بأن طول فهد** $1.8\,m$



بفرض أن ارتفاع المبنى $BC = x$ ومن خلال دراستك لتشابه المثلثات أثبت أن $\Delta BCA \sim \Delta DEA$ اكتب التناسب:

$$\frac{ED}{BC} = \frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....} \Rightarrow \frac{1.8}{x} = \frac{2.7}{24} \Rightarrow x = 16\,m$$

تذكَّر!

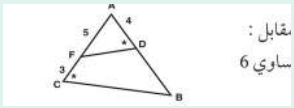
قياس زاوية السقوط يساوي قياس زاوية الانعكاس.

أتدرب وأحل المسائل

أولًا - البنود الموضوعية:

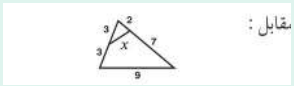
في البنود (1-3) اختر الإجابة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة أو (b) إذا كانت الإجابة خاطئة:

(1) في الشكل المقابل: طول $\bar{BD}$ يساوي 6



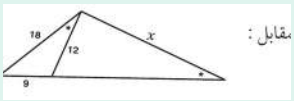
a b

(2) في الشكل المقابل: x يساوي 2



a b

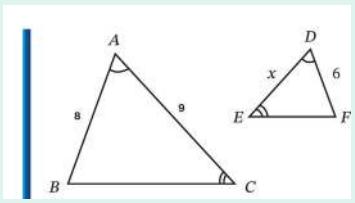
(3) في الشكل المقابل: x يساوي 24



a b

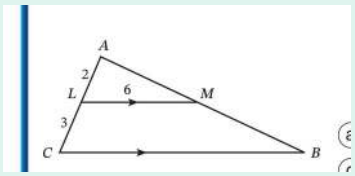
في البنود (1-5) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) في الشكل المرسوم قيمة x بوحدات الطول تساوي:



a 6
b $5\frac{1}{3}$
c 7
d 6.75

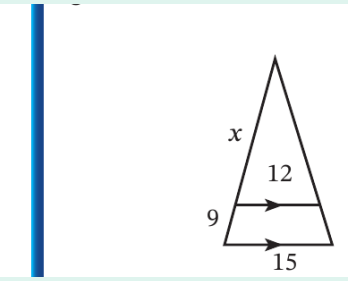
(2) في الشكل المقابل:



$L\bar{M} \parallel \bar{BC}$, $AL = 2cm$, $LC = 3cm$, $LM = 6cm$ فإن BC تساوي:

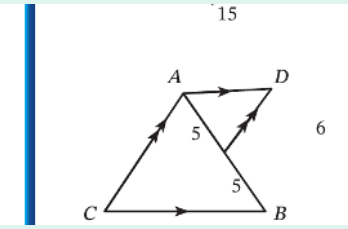
a $9\,cm$
b $12\,cm$
c $15\,cm$
d $10\,cm$

(3) في الشكل المقابل: قيمة x تساوي:



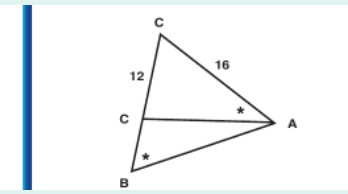
a 12
b 24
c 36
d 48

(4) في الشكل المقابل: طول $\bar{AC}$ يساوي:



a 6
b 9
c 12
d 15

(5) في الشكل المقابل: طول $\bar{BC}$ تساوي:

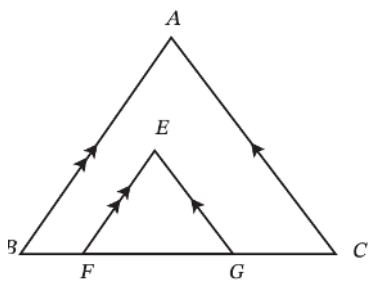


a 16
b 12
c $9\frac{1}{3}$
d $23\frac{1}{3}$

ثانيًا - أسئلة المقال:

(1) في الشكل المرسوم: $\bar{EG} \parallel \bar{AC}$, $\bar{AB} \parallel \bar{EF}$

أثبت أن المثلث ABC يشابه المثلث EFG

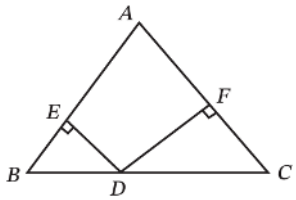


.....

(2) في الشكل المرسوم ABC مثلث فيه

$\frac{ED}{DF} = \frac{5}{7}$, $BC = 48cm$, $AB = AC$

أوجد طول $\bar{DC}$

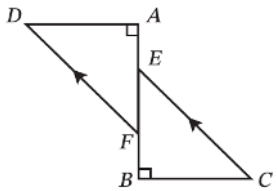


.....

(3) في الشكل المرسوم

$m\left(\widehat{A}\right) = m\left(\widehat{B}\right) = 90^\circ$, $\bar{DF} \parallel \bar{EC}$

أثبت أن $\Delta ADF \sim \Delta BCE$

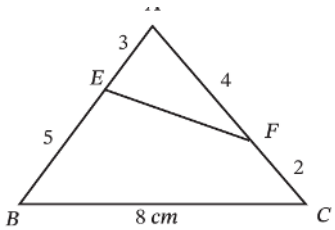


.....

(4) في الشكل المرسوم ABC مثلث فيه

$C = 8cm$, $EA = 3cm$, $AF = 4cm$, $FC = 2cm$

a أثبت أن $\Delta AEF \sim \Delta ACB$ **b** أوجد طول $\bar{EF}$

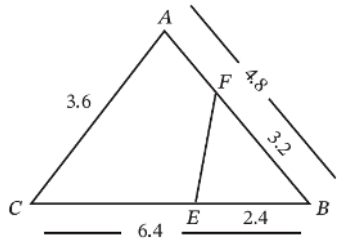


.....

.....

(5) في الشكل المرسوم أثبت أن

$\Delta BCA \sim \Delta BDE$

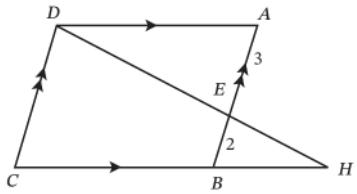


.....

(6) في الشكل المقابل: $ABCD$ متوازي أضلاع،

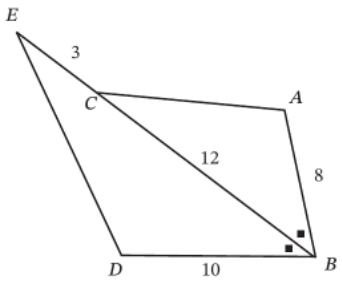
a أثبت $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{DE} = \{H\}$, $\frac{3}{2} = \frac{AE}{EB}$, $E \in \overline{AB}$

b أوجد: $\frac{\text{area } \Delta DCH}{\text{area } \Delta EAD}$ أن $\Delta EAD \sim \Delta DCH$



.....

(7) في الشكل المقابل: $\overrightarrow{BE}$ منصف $\widehat{ABD}$ ،
مساحة المثلث $ABC = 48\,cm^2$. أوجد مساحة:
ΔEBD

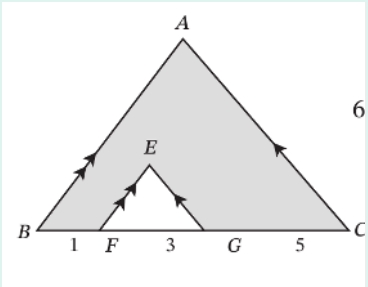


مهارات تفكير عليا

اختر الإجابة الصحيحة:

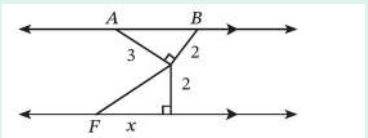
(1) في الشكل المقابل إذا كانت مساحة المثلث EFG تساوي $6cm^2$ فإن مساحة المنطقة المظللة بالشكل تساوي بالسنتيمتر المربع:

a 27 **b** 36 **c** 48 **d** 54

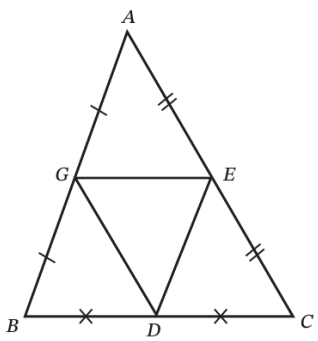


(2) في الشكل المرسوم قيمة x بوحدات الطول تساوي:

a 3 **b** 2 **c** $\frac{4}{3}$ **d** $\frac{3}{4}$



(3) في المثلث ABC إذا كانت E منتصف $\bar{AC}$ ، G
منتصف $\bar{AB}$ ، D منتصف $\bar{BC}$ ، استخدم تشابه
المثلثات في إثبات: a كل من:
متطابقة ΔAGE , ΔBGD , ΔEDC , ΔGED
b $\Delta GED \sim \Delta CBA$



.....

📋 **خلاصة البند 2-3 (حالات تشابه مثلثين)**

نظرية (1)	نظرية (2)	نظرية (3)
تطابق زاويتين	تناسب الأضلاع الثلاثة	تطابق زاوية وتناسب ضلعيها

🌟 **رتّب الرؤوس المتناظرة قبل كتابة عبارة التشابه** 💡

2-4 التشابه في المثلثات القائمة الزاوية

Similarity in Right Triangles

فكرة الدرس:

استخدام التشابه في المثلثات القائمة «العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية»

تعلمنا فيما سبق:

- التشابه - خواص المستطيل - نظرية فيثاغورث

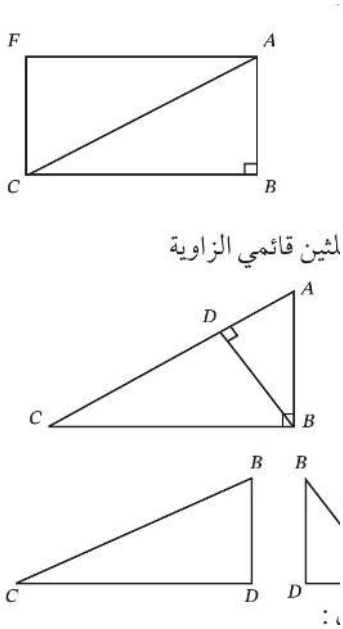
المصطلحات:

تشابه المثلثات Similarity of Triangles

مسألة الدرس:

اشترك مع أحد زملائك في الآتي:

- أحضر قطعة ورق مستطيلة الشكل.
- ارسم قطرًا للمستطيل.
- اقطع الورقة عند القطر سوف تحصل على مثلثين قائمي الزاوية.
- اختر ΔABC - ارسم $\bar{BD} \perp \bar{AC}$ - قم بقص المثلث ABC إلى مثلثين DAB , DCB
- في المثلثات الثلاثة: 1. المثلث ABC 2. المثلث DAB 3. المثلث DCB
- فكّر وناقش مع زملائك كيف يمكن إثبات أن: المثلث DAB يشابه المثلث ABC ، المثلث DCB يشابه المثلث ABC ، المثلث DAB يشابه المثلث DCB



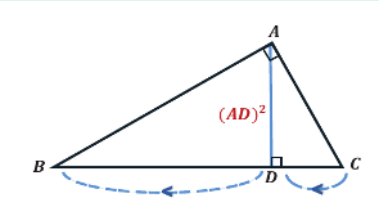
عزيزي المتعلم النشاط السابق يقودنا إلى:

نظرية:

العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.

❓ هل نستطيع إيجاد العلاقات بين DC , AD , BD ؟

⭐ **نتيجة (1): «نظرية إقليدس»**



مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.

أي أن في المثلث ABC القائم الزاوية في (A) إذا كان $\bar{AD}\perp\bar{BC}$ فإن:

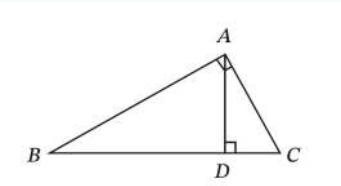
$$(AD)^2 = DC \cdot BD$$

❓ سأل عمر هل يمكن القول بأن $\bar{AD}$ هو الوسط المتناسب لكل من $\bar{DC}$, $\bar{BD}$ ؟

ℹ️ **معلومة: إقليدس EUCLIDS**

هو عالم رياضيات لقب بأبي الهندسة، اشتهر بكتابة (العناصر) عرض فيه مجموعة بديهيات وتطرق للعديد من مجالات الرياضيات.

🧩 **نشاط: هل نستطيع إيجاد العلاقات بين AC , BC , DC ؟**

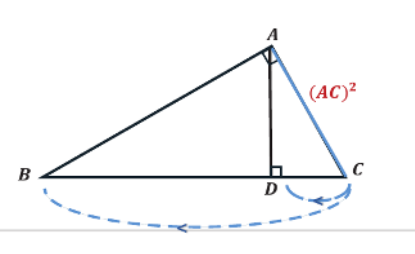


- حاول إثبات أن $\Delta BAC \sim \Delta ADC$ - اكتب التناسب:

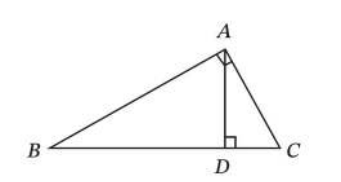
$\frac{BA}{AD} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$ ⇐ بالضرب التقاطعي

$$\therefore (AC)^2 = CD \cdot CB$$

هل يمكن القول أن: AC وسط متناسب بين DC , BC ؟



🧩 نشاط: هل نستطيع إيجاد العلاقات بين $AB\,,\,BC\,,\,BD$ ؟

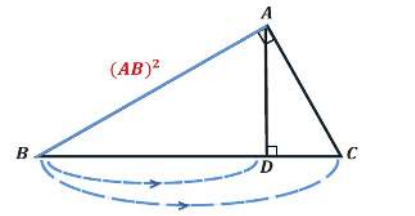


- حاول إثبات أن $\Delta CBA \sim \Delta ABD$ - اكتب التناسب:

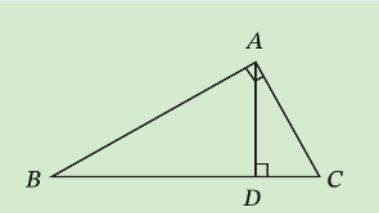
$\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \frac{AD}{CA}$ ⇐ بالضرب التقاطعي

$\therefore\ (\,AB\,)^{\,2} = BD \cdot BC$

هل يمكن القول أن: AB وسط متناسب بين $BC\,,\,BD$ ؟



⭐ نتيجة (2): «نظرية إقليدس»



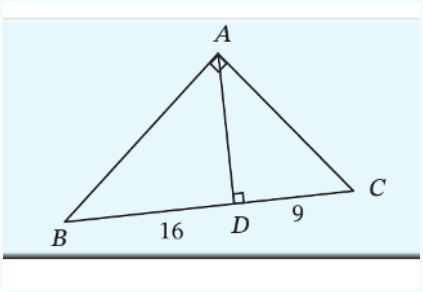
في المثلث القائم ABC إذا كان $\bar{AD} \perp \bar{BC}$ فإن:

① $(\,AB\,)^{\,2} = BD \cdot BC$ ② $(\,AC\,)^{\,2} = CD \cdot CB$ ③

$(\,AB\,) \cdot (\,AC\,) = (\,AD\,) \cdot (\,BC\,)$

❓ حاول إثبات أن: $(\,AB\,) \cdot (\,AC\,) = (\,AD\,) \cdot (\,BC\,)$ ؟

✏️ مثال (1)

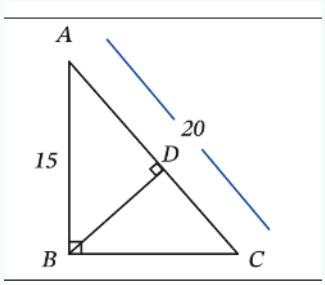


في الشكل المرسوم: ABC مثلث قائم الزاوية في A ، إذا كان $\bar{AD}\perp\bar{BC}$ ، أوجد طول كلٍّ من: $\bar{AD}$, $\bar{AC}$

✅ الحل: ∵ المثلث ABC قائم الزاوية في A ، $\bar{AD}\perp\bar{BC}$

①	②
$(AD)^2 = DC \cdot DB$	$(AC)^2 = CD \cdot CB$
$AD)^2 = (9)(16)$	$AC)^2 = (9)(25)$
$(AD)^2 = 144$	$(AC)^2 = 225$
$AD = \sqrt{144} = 12$	$AC = \sqrt{225} = 15$

🎯 تحقق من فهمك (1)

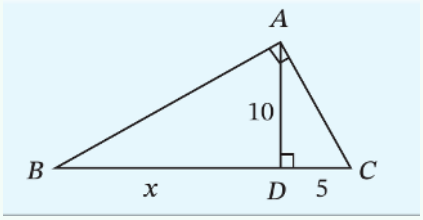


في الشكل المرسوم: a أوجد طول $\bar{BC}$ b أوجد طول $\bar{CD}$

.....

✏️ مثال (2)

في الشكل المرسوم: أوجد قيمة x



✅ الحل: $\because \bar{AD} \perp \bar{BC}$

باستخدام نتيجة 1 $(AD)^2 = (DC)(DB)$

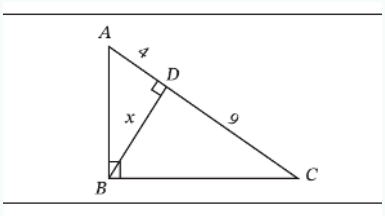
$(10)^2 = 5 \times (DB)$

بقسمة الطرفين على 5 $DB = \frac{100}{5}$

$\therefore DB = x = 20$

🎯 تحقق من فهمك (2)

في الشكل المرسوم: أوجد قيمة x



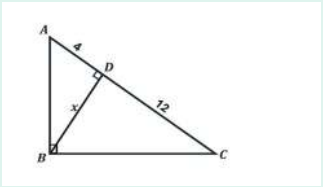
.....

💪 أتدرب وأحل المسائل

أولًا - البنود الموضوعية:

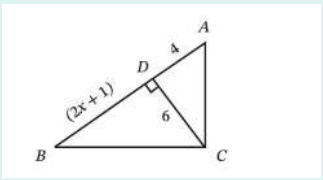
■ **في البنود (1-5) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة:**

(1) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي:



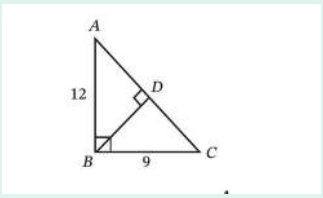
a $4\sqrt{3}$ **b** $3\sqrt{4}$ **c** 48 **d** 16

(2) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي:



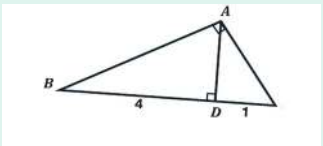
a 6 **b** 4.8 **c** 8 **d** 4

(3) في الشكل المرسوم طول $\bar{BD}$ تساوي:



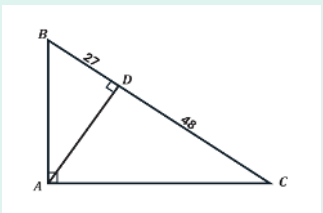
a 9.5 **b** 7.2 **c** 7.5 **d** 8

(4) في الشكل المرسوم طول $\bar{AD}$ تساوي:



a 2 **b** 4 **c** 5 **d** 16

(5) في الشكل المرسوم طول $\bar{AD}$ تساوي:

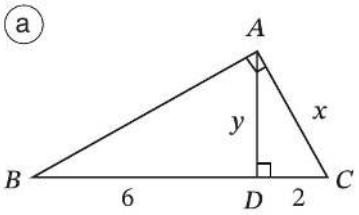


a 24 **b** 12 **c** 36 **d** 75

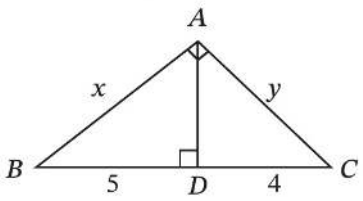
ثانيًا - أسئلة المقال:

(1) أوجد قيمة x , y في كل من الأشكال التالية:

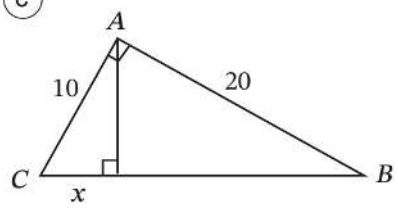
a



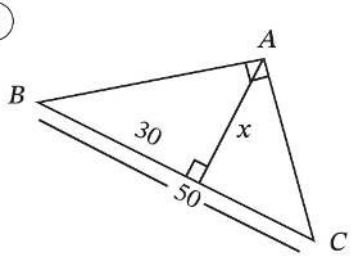
b



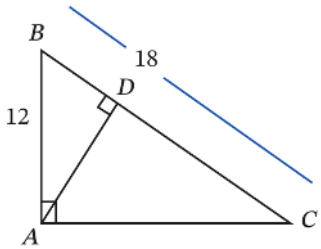
c



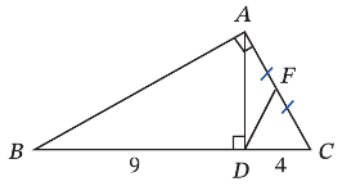
d



(2) في الشكل المقابل: أوجد طول $\bar{DC}$

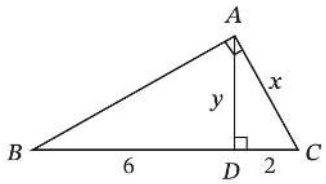


(3) في الشكل المقابل: أوجد قيمة $\bar{DF}$



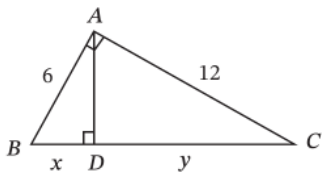
.....

(4) في الشكل المقابل: أوجد قيمة x , y



.....

(5) في الشكل المقابل: ΔABC قائم الزاوية في A ، $\bar{AD}\perp\bar{BC}$, $AB = 6cm$, $AC = 12cm$
أوجد طول $\frac{x}{y}$

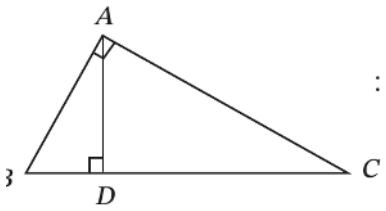


.....

مهارات تفكير عليا

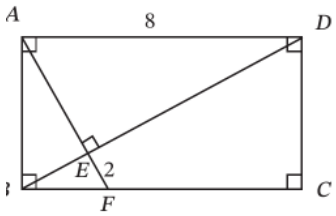
(1) في الشكل المرسوم استخدم نظرية إقليدس لإثبات أن:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$



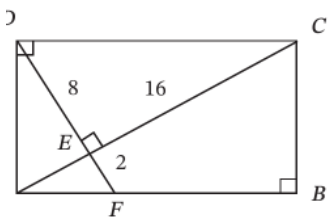
.....

(2) في الشكل المرسوم أوجد طول $\bar{EF}$



.....

(3) في الشكل المقابل: $ABCD$ مستطيل، $F \in \bar{AB}$ ، رسم $\bar{DF} \perp \bar{AC}$ ، فإذا كان $EF = 2cm$, $DE = 8cm$ أوجد طول $\bar{DA}$



.....

📋 **خلاصة البند 2-4 (نظرية إقليدس في ΔABC القائم في A ، $\bar{AD} \perp \bar{BC}$)**

① $(AD)^2 = BD \cdot DC$ ② $(AB)^2 = BD \cdot BC$ ③ $(AC)^2 = CD \cdot CB$ ④ $AB \cdot AC = AD \cdot BC$

🌟 **حدّد الوتر والعمود عليه أولًا ثم طبّق نظرية إقليدس** 💡

2-5 التناسبات والمثلثات المتشابهة

Proportions and Similar Triangles

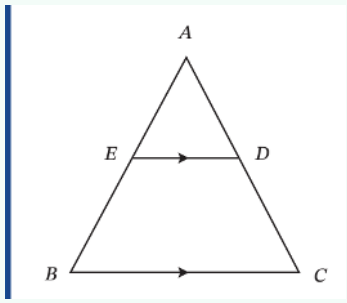
💡 فكرة الدرس: ستتعلم

(1) نظرية المستقيم الموازي لأحد أضلاع مثلث. (2) نظرية طاليس. (3) نظرية منصف الزاوية الداخلي لمثلث.

📚 تعلمنا فيما سبق:

- تشابه المثلثات
- التناسب

📖 مسألة الدرس - 🔦 لنعمل معًا لنستكشف



عزيزي المتعلم في الشكل المرسوم: **المطلوب إثبات أن:** $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$

حاول التفكير معي: $\because \bar{ED} \parallel \bar{BC} \therefore \Delta ABC \sim \Delta AED$

❓ لماذا؟

من التشابه يمكن كتابة التناسب التالي: $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$ (1)

ومن هندسة الشكل فإن: $AC = AD + DC$

وبالتعويض في العلاقة (1): $AB = \ldots\ldots + \ldots\ldots$

$$\frac{AD + DC}{AD} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{AE}$$

ويمكن كتابة هذا التناسب بالصورة:

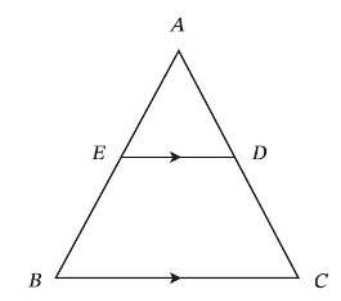
$$\frac{\ldots}{\ldots} + \frac{DC}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EB}{AE} \Rightarrow 1 + \frac{DC}{AD} = 1 + \frac{EB}{AE} \Rightarrow \frac{DC}{AD} = \frac{EB}{AE}$$

ℹ️ معلومة رياضية:

إذا كان $\bar{ED} \parallel \bar{BC}$ فإن $\bar{ED} \parallel \bar{BC}$ والعكس صحيح.

⭐ نظرية (1): «نظرية المستقيم الموازي» Parallel Line Theory

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.



أي أن في المثلث ABC : $\bar{ED} \parallel \bar{BC}$ فإن:

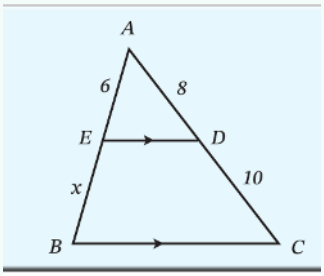
$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$$

عكس النظرية صحيح: أي أنه إذا كان: $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$

فإن: $\bar{ED} \parallel \bar{BC}$

✏️ مثال (1)

في الشكل المقابل: أوجد قيمة x



✅ الحل: $\because \bar{ED} \parallel \bar{BC}$ وباستخدام نظرية المستقيم الموازي نكتب التناسب:

$$\frac{6}{x} = \frac{8}{10}$$

الأجزاء المتناسبة

باستخدام الضرب التقاطعي

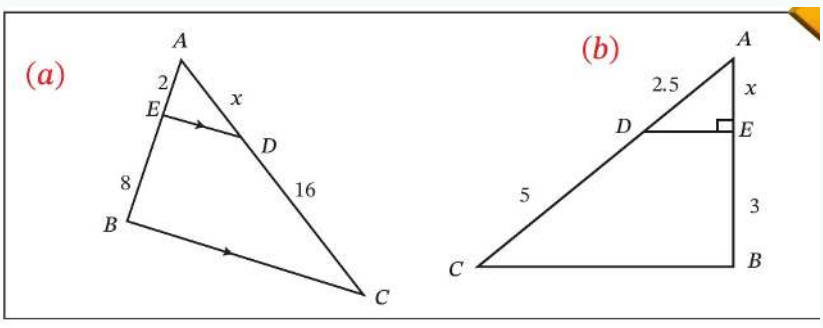
$$8x = 60$$

والقسمة على 8

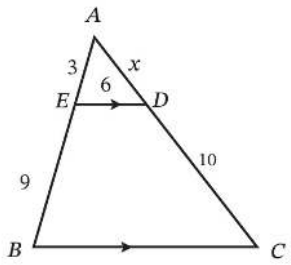
$$x = 7.5$$

🎯 تحقق من فهمك (1)

في الأشكال التالية: أوجد قيمة x



🤔 **فكّر معي: في الشكل المرسوم ABC مثلث فيه $\bar{ED} \parallel \bar{BC}$. المطلوب: 1. طول $\bar{AD}$ 2. طول $\bar{BC}$**



من خلال متابعة المعلم لطلابه وجد أن هناك طريقتين في التفكير للمتعلمين فهد وإبراهيم فعُرِضت الطريقتان على متعلمي الفصل.

طريقة (فهد)

من تشابه المثلثين ABC , AED :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$$

$$\frac{3}{12} = \frac{AD}{AD+10} = \frac{6}{BC}$$

$$3 \cdot 30 = 12AD \Rightarrow 9AD = 30 \Rightarrow AD = \frac{10}{3}$$

$$\frac{3}{12} = \frac{6}{BC} \Rightarrow 3BC = 72 \Rightarrow BC = 24$$

طريقة (إبراهيم)

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} = \frac{ED}{BC}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{AD}{10} = \frac{6}{BC}$$

$$9AD = 30 \Rightarrow AD = \frac{10}{3}$$

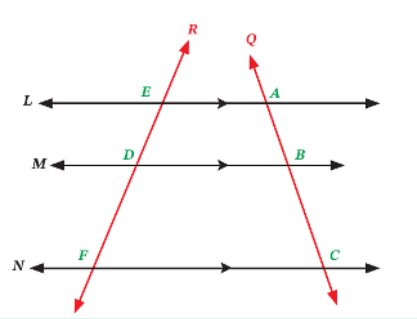
$$\frac{3}{9} = \frac{6}{BC} \Rightarrow BC = 18$$

❓ **أي الرأيين تؤيد؟ دلل على إجابتك.**

نظرية (2): « نظرية طاليس » Thales Theory

⭐ **نظرية (2): « نظرية طاليس » Thales Theory**

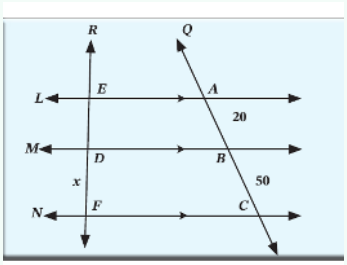
إذا قطع مستقيمان ثلاث مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.



أي أنه إذا كان: $\vec{L} \parallel \vec{M} \parallel \vec{N}$ تقطع كلًّا من $\vec{Q}$, $\vec{R}$ فإن: $\frac{ED}{DF} = \frac{AB}{BC}$

✏️ مثال (2)

في الشكل المقابل: أوجد قيمة x

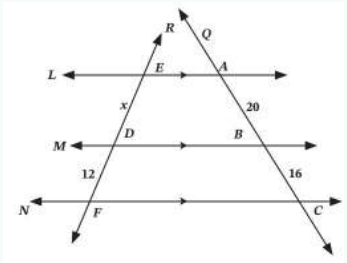


✅ الحل: باستخدام نظرية طاليس:

$$\Rightarrow 20x = (12)(50) \Rightarrow x = \frac{(12)(50)}{20} = 30$$

🎯 تحقق من فهمك (2)

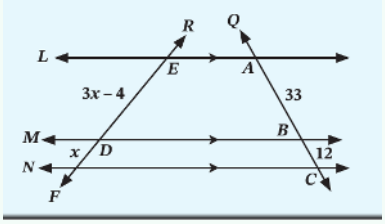
في الأشكال المقابل: أوجد قيمة x



.....

✏️ مثال (3)

في الشكل المقابل: أوجد قيمة x

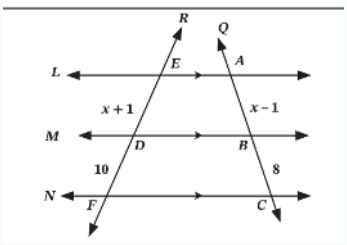


✅ الحل: باستخدام نظرية طاليس:

$$\frac{3x-4}{x} = \frac{33}{12}$$
$$12\,(\,3x-4\,) = 33x$$
$$36x - 48 = 33x$$
$$3x = 48 \Rightarrow x = 16$$

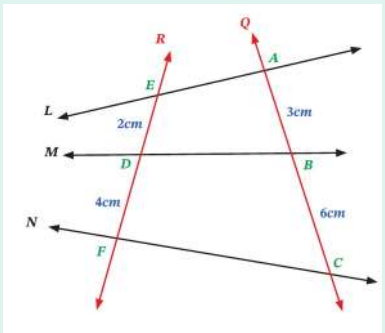
🎯 تحقق من فهمك (3)

في الأشكال المرسوم: أوجد قيمة x



.....

📌 **ملحوظة:**



في الشكل المرسوم نجد أن:

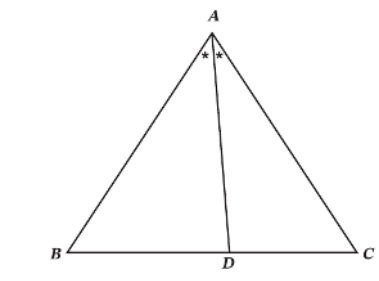
$\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{DF} = \frac{1}{2}$ أي أن: $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{ED}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ولكن المستقيمات L, M, N ليست متوازية. إذا كانت أطوال القطع المستقيمة الناتجة من أحد القاطعين متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر فليس بالضرورة أن تكون المستقيمات متوازية.

∴ **عكس نظرية طاليس ليس بالضرورة صحيح**

نظرية (3): «نظرية منصف الزاوية في مثلث» Angle Bisector Theorem in a Triangle

⭐ نظرية (3): «نظرية منصف الزاوية في مثلث»



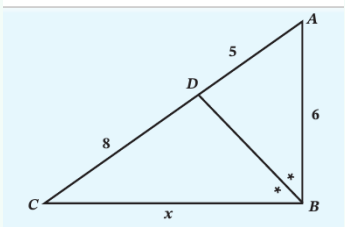
إذا نَصَّفَتْ زاوية رأس مثلث الداخلة أو الزاوية الخارجة عند هذا الرأس، قسم المُنصِّف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

أي أن إذا كان $\overrightarrow{AD}$ مُنصِّف $\left(\widehat{A}\right)$ فإن: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

أو: $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}$

🔍 ملحوظة: سنكتفي بدراسة حالة المُنصِّف الداخلي للزاوية في المثلث.

✏️ مثال (4)

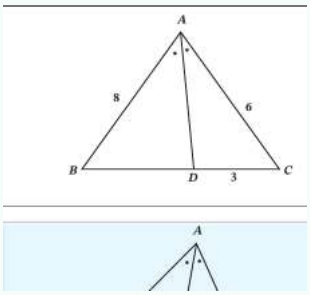


أوجد قيمة x في الشكل المبين حيث $\overrightarrow{BD}$ يُنصِّف $A\widehat{B}C$

✅ الحل: في المثلث ABC ، $\overrightarrow{BD}$ مُنصِّف $\left(A\widehat{B}C\right)$ ∴ نظرية مُنصِّف الزاوية:

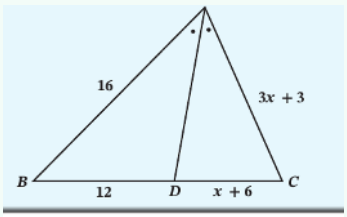
$$=\frac{5}{8}\Rightarrow 5x=(6)(8)\Rightarrow x=\frac{(6)(8)}{5}=9.6$$

🎯 تحقق من فهمك (4)



المثلث ABC فيه $AB=8$ ، $AC=6$ ، $\overrightarrow{AD}$ يُنصِّف $\left(B\widehat{A}C\right)$ ويقطع $\overline{BC}$ في D إذا كان $BD=3$ أوجد CD

✏️ مثال (5)

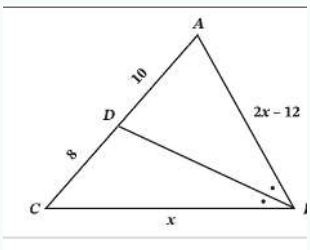


أوجد قيمة x في الشكل المبين حيث $\overrightarrow{AD}$ يُنصِّف $\left(C\widehat{A}B\right)$

✅ الحل: في المثلث CAB ، $\overrightarrow{AD}$ مُنصِّف $\left(C\widehat{A}B\right)$ ∴ نظرية مُنصِّف الزاوية:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{16}{3x+3} = \frac{12}{x+6}$$
$$12\,(\,3x+3\,) = 16\,(\,x+6\,)$$
$$36x + 36 = 16x + 96 \Rightarrow 36x - 16x = 96 - 36$$
$$20x = 60 \Rightarrow x = 3$$

🎯 تحقق من فهمك (5)



ABC المثلث فيه $AD = 10\,,\ DC = 8$ ، $\overrightarrow{BD}$ يُنصِّف الزاوية $\left(A\widehat{B}C\right)$ ويقطع $\bar{AC}$ في D ، أوجد x

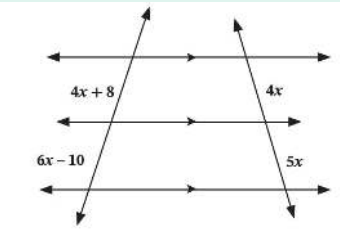
.....

أتدرب وأحل المسائل

أولًا - البنود الموضوعية:

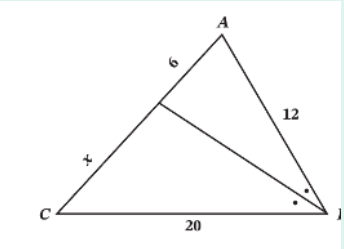
في البنود (1-2) اختر الإجابة الصحيحة:

(1) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي:



a 10 **b** 20 **c** 8 **d** 5

(2) في الشكل المرسوم قيمة x تساوي:

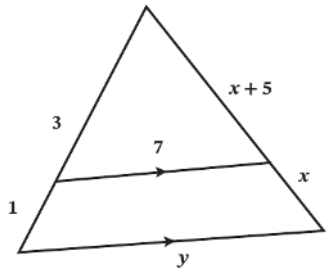


a 8 **b** 10 **c** 12 **d** 20

ثانيًا - أسئلة المقال:

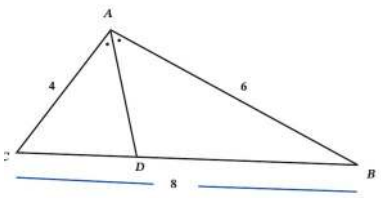
(1) في الشكل المقابل: أوجد قيمة كل من:

x , y



.....

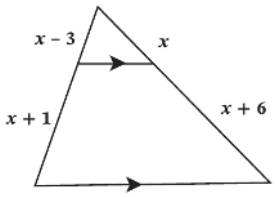
(2) في المثلث ABC ، نَصَّفَ $\bar{AD}$ A إذا كان $AB = 6$, $AC = 4$, $BC = 8$ فأوجد DB , DC



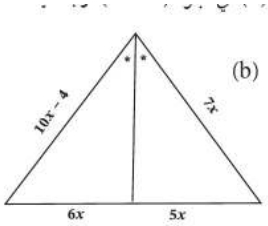
.....

(3) في البنود (3-10) أوجد قيمة x :

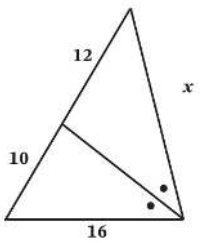
a



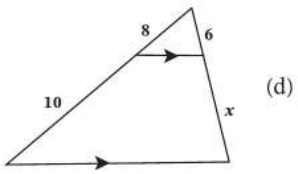
b



c

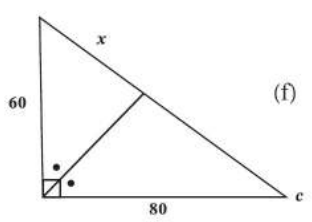


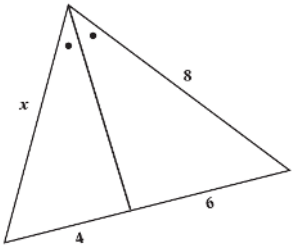
d



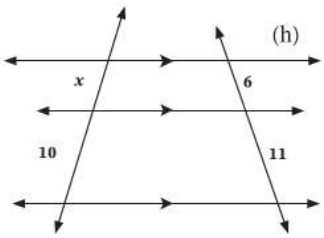
e

f

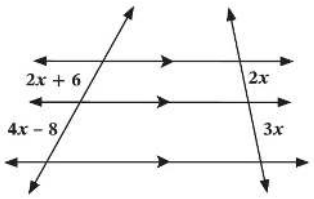




h



g



📋 خلاصة البند 2-5

المستقيم الموازي	طاليس	منصف الزاوية
$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ (وعكسها صحيح)	$\frac{ED}{DF} = \frac{AB}{BC}$ (عكسها ليس بالضرورة صحيح)	$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

🌟 حدّد نوع النظرية (موازٍ - طاليس - منصف) قبل كتابة التناسب 💡