سما
SAMA

نماذج سما
الاختبار القصير

12

الرياضيات

إجابة



الصف الثاني عشر

المرحلة الثانوية- علمي

الفصل الدراسي الأول
2027 - 2026

www.samakw.com
samakw_net
60084568 /50855008/97442417
حولي مجمع بيروت الدور الأول

الرياضيات · الصف الثاني عشر علمي · الفصل الدراسي الأول

نماذج الامتحان التقويمي – الحل

عشرة نماذج محلولة خطوة بخطوة – بنفس خطوات وطرق حل معسكر سما ·

إعداد: أ. وليد

بنود الاختبار

(1-1) النهايات

(1-2) نهايات تشتمل على ∞ ، $-\infty$

(1-3) صيغ غير معيّنة

(1-4) نهايات بعض الدوال المثلثية

(1-6) نظريات الاتصال

طريقة الحل

الصيغ غير المعيّنة: $\frac{0}{0}$ ثم التحليل أو الضرب بالمرافق مع بقاء النهاية في كل خطوة

الشروط (شرط المقام ، شرط ما تحت الجذر ، تفريغ المطلقة) داخل إطار على اليسار

الاتصال بالخطوات (1) ، (2) ، (3) ثم النظرية

النموذج (1)

أولًا: الأسئلة الموضوعية

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+3} =$

(a) ∞ (b) $-\infty$

(c) 1 (d) 0

الحل:

درجة البسط = درجة المقام ⟸ النهاية = معامل أعلى قوة في البسط ÷ معامل أعلى قوة في المقام

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+3} = \frac{1}{1} = 1$$

(2) $\lim\limits_{x\to -2} \left(x^3 + 3x^2 - 2x - 17\right) =$

(a) 17 (b) -17

(c) 9 (d) -9

الحل:

$$= \lim_{x\to -2} x^3 + 3 \lim_{x\to -2} x^2 - 2 \lim_{x\to -2} x - \lim_{x\to -2} 17$$
$$= (-2)^3 + 3(-2)^2 - 2(-2) - 17$$
$$= -8 + 12 + 4 - 17 = -9$$

(3) نقاط انفصال الدالة $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ هي:

(a) $x = 1\ ,\ x = -1$ (b) $x = 2\ ,\ x = -2$

(c) $x = 1\ ,\ x = 2$ (d) $x = -1\ ,\ x = -2$

الحل:

f دالة كسرية غير معرفة عند أصفار المقام

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0$$
$$x = -1 \text{ ، } x = 1$$
$$\therefore \text{نقاط الانفصال: } x = -1 \text{ ، } x = 1$$

ثانيًا: أسئلة المقال

السؤال الأول أوجد: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

الحل:

$\dfrac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x+1}{x-2}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(x+1)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-2)}=\frac{-2+1}{-2-2}=\frac{1}{4}$$

شرط المقام

$\lim\limits_{x\to -2}(x-2)$
$=-2-2=-4\neq 0$

السؤال الثاني (a) أوجد: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

الحل:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\,(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\,(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\,(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos x=1+1=2$$

(b) لتكن الدالة $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$ ، ابحث اتصال الدالة f عند $x=-2$

الحل:

نفرض $h(x)=x^2-4x+3$ فيكون $f(x)=\sqrt{h(x)}$

(1) h كثيرة حدود متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$ $\therefore$ h متصلة عند $x=-2$

(2) $h(-2)=(-2)^2-4(-2)+3=15>0$

من (1) ، (2) دالة الجذر $f(x)=\sqrt{h(x)}$ متصلة عند $x=-2$ (نظرية)

النموذج (2)

أولًا: الأسئلة الموضوعية

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2+x-3\right)=-\infty$

ⓐ صحيحة ✓ ⓑ خاطئة

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x^2+x-3\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$$

العبارة صحيحة

(2) $\lim\limits_{x\to1^-}\left(2x-|x|+2\right)=3$

ⓐ صحيحة ✓ ⓑ خاطئة

الحل:

$$\lim_{x\to1^-}(2x-|x|+2)=\lim_{x\to1^-}(2x-x+2)$$
$$=\lim_{x\to1^-}(x+2)=1+2=3$$

العبارة صحيحة

تفريغ المطلقة

عندما $x\to1^-$: $|x|=x$

(3) إذا كانت $f(x)=\sqrt{x^2+7}$ ، $g(x)=x^2-3$ فإنّ $(f\circ g)(0)=-4$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة ✓

الحل:

$$g(0)=0^2-3=-3$$
$$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(-3)$$
$$=\sqrt{(-3)^2+7}=\sqrt{16}=4\neq-4$$

العبارة خاطئة

ثانيًا: أسئلة المقال

السؤال الأول أوجد: $\lim_{x\to 0} \dfrac{(4+x)^2-16}{x}$

الحل:

$$\text{صيغة غير معينة } \frac{0}{0}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{16+8x+x^2-16}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(8+x)}{x} = \lim_{x\to 0}(8+x)$$
$$= \lim_{x\to 0} 8 + \lim_{x\to 0} x = 8+0 = 8$$

السؤال الثاني (a) لتكن $f(x) = |x^2+6x+5|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

الحل:

$$h(x) = |x| \text{ ، } g(x) = x^2+6x+5$$
$$(h\circ g)(x) = h(g(x))$$
$$= h(x^2+6x+5) = |x^2+6x+5| = f(x)$$

ندرس اتصال $h\circ g$ عند $x=2$

$g(x) = x^2+6x+5$ (1)

كثيرة حدود متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$ $\therefore g$ متصلة

عند $x=2$

$g(2) = (2)^2+6(2)+5$ (2)

$= 21$

$h(x) = |x|$ (3)

h متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$

$\therefore h$ متصلة عند $x=21$

من (1) ، (2) (3) $f(x) = h\circ g(x)$ متصلة عند $x=2$

(b) أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

الحل:

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}} \\
&= \frac{1-0}{1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

شرط

$$\sqrt{x^2} = |x| = x \ : \ x \to \infty$$

شرط الجذر

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2} \\
&= 1+0-0 = 1 > 0
\end{aligned}
$$

شرط المقام

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}} \\
&= \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} \\
&= \sqrt{1} = 1 \neq 0
\end{aligned}
$$

النموذج (3)

أولًا: الأسئلة الموضوعية

(1) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x+5}{2x^4+x^2-2} =$

(a) ∞
(b) $\dfrac{1}{2}$
(c) 0
(d) $-\infty$

الحل:

درجة البسط < درجة المقام ⟸ النهاية = صفر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+5}{2x^4+x^2-2} = 0$$

(2) $\lim_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{x-1} =$

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

الحل:

$\dfrac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x^2+x+1)$$
$$= 1+1+1 = 3$$

(3) الدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ متصلة على:

(a) $\mathbb{R}$
(b) $\mathbb{R}-\{2\}$
(c) $\mathbb{R}-\{-2\,,2\}$
(d) $[-2\,,2]$

الحل:

f دالة كسرية متصلة على مجالها

$x = -2\,,\, x^2-4=0 \Rightarrow x=2$

$\therefore f$ متصلة على $\mathbb{R}-\{-2,2\}$

ثانيًا: أسئلة المقال

السؤال الأول أوجد: $\lim_{x\to 0} \dfrac{(3+x)^3-27}{x}$

الحل:

$$\text{صيغة غير معينة } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\big((3+x)-3\big)\big((3+x)^2+3(3+x)+9\big)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\big((3+x)^2+9+3x+9\big)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(3+x)^2+3x+18 = \Big(\lim_{x\to 0} 3+x\Big)^2 + \lim_{x\to 0}(3x+18)$$

$$= (3)^2+18 = 27$$

السؤال الثاني (a) أوجد: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x^2-x}$

الحل:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x(2x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2x-1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{-1} = -1$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 0}(2x-1)$$
$$= 2(0)-1 = -1 \neq 0$$

(b) لتكن الدالة $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ ، ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$

الحل:

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

(1) $h(x) = \sqrt[3]{x}$ متصلة عند $x=1$ (لأنها متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$)

(2) $g(x) = x^2+1$ كثيرة حدود متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ ∴ متصلة عند $x=1$

(3) $g(1) = 1+1 = 2 \neq 0$

∴ من (1) ، (2) ، (3) الدالة الكسرية $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ متصلة عند $x=1$ (نظرية)

النموذج (4)

أولًا: الأسئلة الموضوعية

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x+4}{3x^2-5x+1} = 0$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

درجة البسط < درجة المقام ⟸ النهاية = صفر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x+4}{3x^2-5x+1} = 0$$

العبارة صحيحة

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x} = 0$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)}{\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x} = \frac{1-0}{1} = 1 \neq 0$$

العبارة خاطئة

شرط المقام

$\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x = 1 \neq 0$

(3) الدالة $f(x) = \dfrac{-x+2}{x^2+9}$ متصلة على $\mathbb{R}$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$x^2+9 > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ (المقام لا يساوي صفرًا)

∴ الدالة الكسرية f متصلة على $\mathbb{R}$

العبارة صحيحة

ثانيًا: أسئلة المقال

السؤال الأول أوجد: $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

الحل:

$$\text{صيغة غير معينة } \frac{0}{0}$$
$$=\lim_{x\to -7}\frac{\big((x+4)-3\big)\big((x+4)+3\big)}{x(x+7)}$$
$$=\lim_{x\to -7}\frac{(x+1)(x+7)}{x(x+7)}=\lim_{x\to -7}\frac{x+1}{x}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to -7}(x+1)}{\lim\limits_{x\to -7}x}=\frac{-7+1}{-7}=\frac{6}{7}$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to -7}x=-7\neq 0$$

السؤال الثاني (a) أوجد: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\tan x-3\sin x}{4x}$

الحل:

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5\tan x}{4x}-\frac{3\sin x}{4x}\right)$$
$$=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}-\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$
$$=\frac{5}{4}(1)-\frac{3}{4}(1)=\frac{1}{2}$$

(b) لتكن الدالة $f:f(x)=x^2-3x$ ، الدالة $g:g(x)=\sqrt{x}$

ابحث اتصال الدالة $(g\circ f)$ عند $x=-1$

الحل:

$f(x)=x^2-3x$ (1)

f كثيرة حدود متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة عند $x=-1$

$f(-1)=(-1)^2-3(-1)=4$ (2)

$g(x)=\sqrt{x}$ (3)

$\therefore x\in\mathbb{R}^+$ كل g متصلة عند

g متصلة عند $x=4$

من (1) ، (2) ، (3) $g\circ f$ متصلة عند $x=-1$ (نظرية)

النموذج (5)

أولًا: الأسئلة الموضوعية

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}=$

ⓐ ∞ ⓑ $-\infty$

ⓒ 3 ⓓ -3

الحل:

درجة البسط = درجة المقام ⟸ النهاية = معامل أعلى قوة

في البسط ÷ معامل أعلى قوة في المقام

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{3}{-\sqrt{1}}=-3$$

تفريغ المطلقة

$$\sqrt{x^2}=|x|=-x\ :\ x\to-\infty$$

(2) إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=7$ ، $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-3$ فإنّ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{8f(x)\,g(x)}{f(x)+g(x)}=$

ⓐ -21 ⓑ 42

ⓒ -42 ⓓ 21

الحل:

$$=\lim_{x\to a}\frac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}=\frac{8\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)}{\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)}$$
$$=\frac{8(7)(-3)}{4}=-42$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$$
$$=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$
$$=7+(-3)=4\neq0$$

(3) إذا كانت $f(x)=2x-1$ ، $g(x)=x^2+3$ فإنّ $(g\circ f)(x)=$

ⓐ $2x^2+5$ ⓑ $4x^2+2$

ⓒ $4x^2-4x+4$ ⓓ $2x^2+2$

الحل:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$$
$$=(2x-1)^2+3=4x^2-4x+4$$

ثانيًا: أسئلة المقال

السؤال الأول أوجد: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

الحل:

$\dfrac{0}{0}$ صيغة غير معينة (نضرب بالمرافق)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2x-3}-1)(\sqrt{2x-3}+1)}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(2x-3-1)}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 2}2}{\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1)}\\
&= \frac{2}{2}=1
\end{aligned}$$

شرط ما تحت الجذر

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2}(2x-3)\\
&= 2(2)-3 = 1 > 0
\end{aligned}$$

شرط المقام

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1)\\
&= \lim_{x\to 2}\sqrt{2x-3}+\lim_{x\to 2}1\\
&= \sqrt{\lim_{x\to 2}(2x-3)}+\lim_{x\to 2}1\\
&= \sqrt{1}+1 = 2 \neq 0
\end{aligned}$$

السؤال الثاني (a) أوجد: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

الحل:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 x\,(1+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x\,(1+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\,(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

شرط المقام

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}(1+\cos x)\\
&= \lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos x\\
&= 1+1 = 2 \neq 0
\end{aligned}$$

(b) لتكن $f(x)=x^2+5$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ ، ابحث اتصال الدالة $g\circ f$ عند $x=-2$

الحل:

$f(x)=x^2+5$ (1)

f كثيرة حدود متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة عند $x=-2$

$f(-2)=(-2)^2+5=9$ (2)

$g(x)=\sqrt{x}$ (3)

g متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}^+$ $\therefore g$ متصلة عند

$x=9$

من (1) ، (2) ، (3) $g\circ f$ متصلة عند $x=-2$ (نظرية)

النموذج (6)

أولًا: الأسئلة الموضوعية

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-x}{2x^2-5x-3} = -\infty$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

درجة البسط < درجة المقام ⟸ النهاية = صفر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{2x^2-5x-3} = 0 \neq -\infty$$

العبارة خاطئة

(2) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2+x-6}{x+3} = -5$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$\frac{0}{0} \text{ صيغة غير معينة}$$

$$= \lim_{x\to-3} \frac{(x+3)(x-2)}{x+3} = \lim_{x\to-3}(x-2)$$

$$= -3-2 = -5$$

العبارة صحيحة

(3) الدالة $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x=3$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$$

$h(x)=\sqrt[3]{3x-1}$ متصلة عند $x=3$ (1)

$g(x)=x^2$ كثيرة حدود متصلة عند $x=3$ (2)

$g(3)=9\neq 0$ (3)

من (1) ، (2) ، (3) f متصلة عند $x=3$

العبارة صحيحة

ثانيًا: أسئلة المقال

السؤال الأول أوجد: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-7x^2-18}{x-3}$

الحل:

$\dfrac{0}{0}$ صيغة غير معينة

باستخدام القسمة التركيبية:

3	1	0	−7	0	−18
		3	9	6	18
	1	3	2	6	0
		معاملات ناتج القسمة			الباقي

الباقي : 0

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^3+3x^2+2x+6)}{(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x^3+3x^2+2x+6)$$

$$=(3)^3+3(3)^2+2(3)+6=66$$

السؤال الثاني (a) أوجد: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$

الحل:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{\sin 2x\,(1+\cos 2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{\sin 2x\,(1+\cos 2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin 2x\,(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos 2x)}=\frac{0}{2}=0$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos 2x)$$
$$=\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos 2x$$
$$=1+1=2\neq 0$$

(b) ابحث اتصال الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-\dfrac{2x}{x-2}$ عند $x=1$

الحل:

$$f(x)=k(x)-m(x)$$

① نفرض $k(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

k دالة نسبية متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$

$\therefore$ k متصلة عند $x=1$

② نفرض $m(x)=\dfrac{2x}{x-2}$

m دالة نسبية متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

$\therefore$ m متصلة عند $x=1$ حيث $1\in\mathbb{R}-\{2\}$

من ① ، ② $f=k-m$ متصلة عند $x=1$ (نظرية)

شرط المقام

$x^2+1\neq 0$ لكل $x\in\mathbb{R}$

شرط المقام

$x-2=0\Rightarrow x=2$

النموذج (7)

أولًا: الأسئلة الموضوعية

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-5x+3}{\sqrt{9x^2-2x+4}} =$

(a) $\dfrac{5}{3}$
(b) $-\dfrac{5}{3}$
(c) $\dfrac{5}{9}$
(d) $-\dfrac{5}{9}$

الحل:

درجة البسط = درجة المقام ⟸ النهاية = معامل أعلى قوة في البسط ÷ معامل أعلى قوة في المقام

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-5x+3}{\sqrt{9x^2-2x+4}} = \frac{-5}{\sqrt{9}} = -\frac{5}{3}$$

تفريغ المطلقة

$$\sqrt{x^2} = |x| = x \ : \ x \to \infty$$

(2) إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -2$ ، $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 5$ فإنّ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)+4}{f(x)\,g(x)} =$

(a) $-\dfrac{9}{10}$
(b) $\dfrac{9}{10}$
(c) $-\dfrac{1}{10}$
(d) $\dfrac{1}{10}$

الحل:

$$= \frac{\lim\limits_{x\to a} g(x) + \lim\limits_{x\to a} 4}{\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{5+4}{(-2)(5)} = -\frac{9}{10}$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$$
$$= \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$
$$= (-2)(5) = -10 \neq 0$$

(3) لتكن $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}$ ، $x\neq 0$ ، $g(x)=x^2+3$ فإنّ $(f\circ g)(x)=$

ⓐ $\dfrac{x^2}{x-3}+3$

ⓑ $\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}+3$

ⓒ $\dfrac{-(x^2+3)}{x}$

ⓓ $\dfrac{x^2+3}{|x|}$

الحل:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+3)$$
$$=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3-3}}=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2}}=\frac{x^2+3}{|x|}$$

ثانيًا: أسئلة المقال

السؤال الأول أوجد: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$

الحل:

$\dfrac{0}{0}$ صيغة غير معينة (نضرب بالمرافق)

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x^2+7}-4)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+7-16}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-1)\cdot\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x^2+7}+4)}$$
$$=\frac{6}{2(4+4)}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

شرط ما تحت الجذر

$$\lim_{x\to 3}(x^2+7)$$
$$=9+7=16>0$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 3}(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)$$
$$=\lim_{x\to 3}(x-1)\cdot\left(\sqrt{\lim_{x\to 3}(x^2+7)}+\lim_{x\to 3}4\right)$$
$$=(3-1)(\sqrt{16}+4)$$
$$=2(8)=16\neq 0$$

السؤال الثاني (a) ابحث اتصال الدالة $f : f(x) = \left|\sqrt{x} - 3\right|$ عند $x = 4$

الحل:

$$h(x) = |x| \text{ ، } g(x) = \sqrt{x} - 3$$

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(\sqrt{x} - 3) = |\sqrt{x} - 3| = f(x)$$

ندرس اتصال $h \circ g$ عند $x = 4$

(1) $g(x) = \sqrt{x} - 3$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}^+ \therefore$

g متصلة عند $x = 4$

$$g(4) = \sqrt{4} - 3 = -1 \text{ (2)}$$

(3) $h(x) = |x|$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R} \therefore h$

متصلة عند $x = -1$

من (1) ، (2) ، (3) $f(x) = h \circ g(x)$ متصلة عند $x = 4$

(b) أوجد: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 3}{\sqrt{4x^2 + 5x + 6}}$

الحل:

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2\left(4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 3}{|x|\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\left(-2 + \frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(-2 + \frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} -2 + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x}}{\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}}$$

$$= \frac{-2 + 0}{2}$$

$$= -1$$

شرط

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x \ : \ x \to -\infty$$

شرط الجذر

$$\lim_{x \to -\infty}\left(4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x \to -\infty} 4 + \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \to -\infty} \frac{6}{x^2}$$
$$= 4 + 0 + 0 = 4 > 0$$

شرط المقام

$$\frac{\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}}{\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}}$$
$$= \sqrt{4} = 2 \neq 0$$

النموذج (8)

أولًا: الأسئلة الموضوعية

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}}=\dfrac{3}{2}$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

درجة البسط = درجة المقام ⟸ النهاية = معامل أعلى قوة

في البسط ÷ معامل أعلى قوة في المقام

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}}=\frac{3}{-\sqrt{4}}=-\frac{3}{2}\neq\frac{3}{2}$$

العبارة خاطئة

تفريغ المطلقة

$\sqrt{x^2}=|x|=-x\ :\ x\to-\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{x^2}-x}{x}=-2$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2}-x}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x-x}{x}=\lim_{x\to0^-}(-2)=-2$$

العبارة صحيحة

تفريغ المطلقة

عندما $x\to0^-:\sqrt{x^2}=|x|=-x$

(3) إذا كانت الدالة g متصلة عند $x=2$ فإنّ الدالة $f(x)=|g(x)|$ متصلة عند $x=2$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$f(x)=h(g(x))\ ،\ h(x)=|x|$$

(1) g متصلة عند $x=2$

(2) $h(x)=|x|$ متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}\ \therefore$

متصلة عند $x=g(2)$

من (1) ، (2) f متصلة عند $x=2$

العبارة صحيحة

ثانيًا: أسئلة المقال

السؤال الأول أوجد إن أمكن: $\lim_{x\to -2} \dfrac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

الحل:

$$f(x)=\frac{|x+2|}{x^2+3x+2}=\frac{|x+2|}{(x+1)(x+2)}$$ نفرض

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{-1}{x+1} & : x<-2\\ \dfrac{x+2}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1} & : x>-2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{-1}{x+1}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2^-} f(x)\neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to -2} f(x)$ غير موجودة

شرط المقام

$$\lim_{x\to -2}(x+1)=-2+1=-1\neq 0$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to -2}(x+1)=-2+1=-1\neq 0$$

السؤال الثاني (a) أوجد: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x\ \tan x-2x\cos x}{3x}$

الحل:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}-2x\cos x}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{3x}-\frac{2x\cos x}{3x}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$=\frac{1}{3}(1)-\frac{2}{3}(1)=-\frac{1}{3}$$

(b) إذا كانت $f(x)=1-x^2$ ، $g(x)=\sqrt{x+5}$ ، فابحث اتصال الدالة $g\circ f$ عند $x=2$

الحل:

(1) $f(x)=1-x^2$

f كثيرة حدود متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة عند $x=2$

(2) $f(2)=1-(2)^2=-3$

(3) $g(x)=\sqrt{x+5}$

نفرض $h(x)=x+5$ متصلة عند $x=-3$ (I)

$h(-3)=-3+5=2>0$ (II)

من (I) ، (II) يكون $g(x)=\sqrt{x+5}$ متصلة عند $x=-3$ (نظرية)

من (1) ، (2) ، (3) $g\circ f$ متصلة عند $x=2$ (نظرية)

النموذج (9)

أولًا: الأسئلة الموضوعية

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}}=$

(a) -1
(b) $-\dfrac{1}{2}$
(c) $\dfrac{1}{2}$
(d) 1

الحل:

درجة البسط = درجة المقام ⟸ النهاية = معامل أعلى قوة

في البسط ÷ معامل أعلى قوة في المقام

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}}=\frac{-2}{-\sqrt{4}}=1$$

تفريغ المطلقة

$\sqrt{x^2}=|x|=-x\ :\ x\to-\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|x-2|}{x^2-4}=$

(a) $\dfrac{1}{2}$
(b) $-\dfrac{1}{2}$
(c) $\dfrac{1}{4}$
(d) $-\dfrac{1}{4}$

الحل:

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2^+}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

تفريغ المطلقة

عندما $x\to2^+:|x-2|=x-2$

(3) إذا كانت الدالة $f(x)=\sqrt{x^2-a}$ متصلة عند $x=3$ فإنّ a يمكن أن تساوي:

(a) 4
(b) 9
(c) 16
(d) 25

الحل:

نفرض $h(x)=x^2-a$ فيكون $f(x)=\sqrt{h(x)}$

(1) h كثيرة حدود متصلة عند $x=3$

(2) يجب أن يكون $h(3)>0:9-a>0\Rightarrow a<9$

من (1) ، (2) f متصلة عند $x=3\ \therefore a$ يمكن أن تساوي 4

ثانيًا: أسئلة المقال

السؤال الأول أوجد: $\lim_{x\to 2} \dfrac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}$

الحل:

$\dfrac{0}{0}$ صيغة غير معينة

باستخدام القسمة التركيبية:

2	-1	0	1	0	1	22
		-2	-4	-6	-12	-22
	-1	-2	-3	-6	-11	0
	معاملات ناتج القسمة					الباقي

الباقي : 0

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(-x^4-2x^3-3x^2-6x-11)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2}(-x^4-2x^3-3x^2-6x-11)$$
$$= -16-16-12-12-11 = -67$$

السؤال الثاني (a) أوجد: $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x}$

الحل:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$
$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \left(\lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \cos x\right) = (1)^2(1+1) = 2$$

(b) لتكن $f(x)=\dfrac{|x|}{x+2}$ ، $g(x)=2x+3$ ، ابحث اتصال الدالة $f\circ g$ عند $x=1$

الحل:

$g(x)=2x+3$ (1)

g كثيرة حدود متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$

$\therefore g$ متصلة عند $x=1$

$g(1)=2(1)+3=5$ (2)

$f(x)=\dfrac{|x|}{x+2}=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (3)

(I) $u(x)=|x|$ متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$ $\therefore$ متصلة عند $x=5$

(II) $v(x)=x+2$ كثيرة حدود متصلة عند $x=5$

(III) $v(5)=7\neq 0$

من (I) ، (II) ، (III) f متصلة عند $x=5$ (نظرية)

من (1) ، (2) ، (3) $f\circ g$ متصلة عند $x=1$ (نظرية)

النموذج (10)

أولًا: الأسئلة الموضوعية

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|-3}{x+3}=-1$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|-3}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-3}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(x+3)}{x+3}=-1$$

العبارة صحيحة

تفريغ المطلقة

$|x|=-x\ :\ x\to-\infty$

(2) إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=3$ ، $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-2$ فإنّ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{[f(x)]^2-g(x)}{f(x)+g(x)}=11$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$=\frac{\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)^2-\lim\limits_{x\to a}g(x)}{\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{9-(-2)}{1}=11$$

العبارة صحيحة

شرط المقام

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$$
$$=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$
$$=3+(-2)=1\neq0$$

(3) الدالة $f(x)=|x^2-3x+2|$ غير متصلة عند $x=0$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$(h\circ g)(x)=|x^2-3x+2|=f(x)\ ،\ h(x)=|x|\ ،\ g(x)=x^2-3x+2$$

(1) g كثيرة حدود متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}\ \therefore$

متصلة عند $x=0$

(2) $g(0)=0-0+2=2$

(3) $h(x)=|x|$ متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}\ \therefore h$

متصلة عند $x=2$

من (1) ، (2) ، (3) f متصلة عند $x=0$ (نظرية)

العبارة خاطئة

ثانيًا: أسئلة المقال

السؤال الأول أوجد: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

الحل:

$$\text{صيغة غير معينة } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to -1}\sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}} = \lim_{x\to -1}\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}}$$

$$= \lim_{x\to -1}\sqrt[3]{x^2-x+1} = \sqrt[3]{\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)}$$

$$= \sqrt[3]{1+1+1} = \sqrt[3]{3}$$

السؤال الثاني (a) أوجد: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ \sin x}{\cos x-1}$

الحل:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x\,(\cos x+1)}{(\cos x-1)(\cos x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x\,(\cos x+1)}{\cos^2 x-1}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x\,(\cos x+1)}{-\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sin x}(\cos x+1)$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}(\cos x+1) = -1(1+1) = -2$$

(b) إذا كانت $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+2x-5}{ax^3+bx^2+3} = -1$ فأوجد قيمة كل من الثابتين $a\ ,\ b$

الحل:

$\because -1 \neq 0 \therefore$ حسب نظرية (11) يجب أن تكون درجة حدودية البسط تساوي درجة حدودية المقام $= 2$

$$\therefore ax^3 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+2x-5}{bx^2+3} = -1 \Rightarrow \frac{2}{b} = -1 \Rightarrow b = -2$$

$$b = -2\ ،\ a = 0$$