مذكرات سما

حل
كراسة التمارين

11

الصف الحادي عشر

المرحلة الثانوية- علمي



الفصل الدراسي الأول
2027 - 2026

www.samakw.com
samakw_net
60084568 /50855008/97442417
حولي مجمع بيروت الدور الأول

الرياضيات · الصف الحادي عشر علمي · العام الدراسي 2026 / 2027 · الفصل الدراسي الأول

حل كراسة التمارين – الحل النموذجي

محلولة خطوة بخطوة بطرق حل أ. وليد حسين – منصة سما التعليمية



المحتوى

حل جميع تمارين كراسة التمارين مرتبة حسب البنود

مرتبة حسب الوحدات والبنود كما في كراسة التمارين

البند (1-1) – الجذور والتعبيرات الجذرية

بند (1-1) ص 9 – تمرين (3) بسط كلا من التعبيرات الجذرية التالية مستخدما قوانين الجذور:

(a) $\sqrt{16x^2}$

(b) $\sqrt{0.25x^6}$

(c) $\sqrt{x^8y^{18}}$

(d) $x \geq 0\,,\sqrt{8x^3}$

الحل:

(a)

$$\sqrt{16x^2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x^2}$$
$$= 4|x|$$

(b)

$$\sqrt{0.25x^6} = \sqrt{0.25} \cdot \sqrt{(x^3)^2}$$
$$= 0.5|x^3|$$

(c)

$$\sqrt{x^8y^{18}} = \sqrt{(x^4)^2} \cdot \sqrt{(y^9)^2}$$
$$= x^4|y^9|$$

(d)

$$\sqrt{8x^3} = \sqrt{4x^2 \cdot 2x}$$
$$= \sqrt{4x^2} \cdot \sqrt{2x}$$

شرط الحل

(d)

$$x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x$$

(a) $4|x|$،

(b) $0.5|x^3|$،

(c) $x^4|y^9|$،

(d) $2x\sqrt{2x}$

بند (1-1) ص 9 – تمرين (4) بسط كلا من التعبيرات الجذرية التالية مستخدما قوانين الجذور:

(i) $3\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}$

(j) $\sqrt{75} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32}$

الحل:

(i)

$$3\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}$$
$$= 3\sqrt[3]{8 \cdot 2} - 4\sqrt[3]{27 \cdot 2} + \sqrt[3]{64 \cdot 2}$$
$$= 3(2)\sqrt[3]{2} - 4(3)\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2}$$
$$= 6\sqrt[3]{2} - 12\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2}$$
$$= -2\sqrt[3]{2}$$

(j)

$$\sqrt{75} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32}$$
$$= \sqrt{25 \cdot 3} - 4\sqrt{9 \cdot 2} + 2\sqrt{16 \cdot 2}$$
$$= 5\sqrt{3} - 12\sqrt{2} + 8\sqrt{2}$$

$5\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$ (j) ، $-2\sqrt[3]{2}$ (i)

بند (1-1) ص 9 – تمرين (3) بسط كلا من التعبيرات الجذرية التالية مستخدما قوانين الجذور:

$$y \geq 0\,, x > 0\,, \sqrt{\frac{x^3y^5}{25x}}$$ (d)

$$x > 0\,, 5\sqrt{216x^2} + 23\sqrt{64x^4}$$ (f)

$$\sqrt[3]{49x^2} \times \sqrt[3]{56xy^3}$$ (j)

$$u \neq 0\,, v \neq 0\,, \sqrt[3]{256u^5v} \div \sqrt[3]{4u^2v^{10}}$$ (j)

الحل:

(d)

$$\sqrt{\frac{x^3y^5}{25x}} = \sqrt{\frac{x^2y^5}{25}}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^4 \cdot y}}{\sqrt{25}}$$
$$= \frac{xy^2\sqrt{y}}{5}$$

(f)

$$5\sqrt{216x^2} + 23\sqrt{64x^4}$$
$$= 5\sqrt{216x^2 + 23(8x^2)}$$
$$= 5\sqrt{216x^2 + 184x^2}$$
$$= 5\sqrt{400x^2}$$
$$= 5(20x) = 100x$$

(j)

$$\sqrt[3]{49x^2} \times \sqrt[3]{56xy^3} = \sqrt[3]{49x^2 \times 56xy^3}$$
$$= \sqrt[3]{2744x^3y^3}$$
$$= \sqrt[3]{(14xy)^3}$$
$$= 14xy$$

شرط الحل

(d) $x > 0\,,\ y \geq 0 \ \Rightarrow\ \sqrt{x^2} =$

$x\,,\ \sqrt{y^4} = y^2$

(f) $x > 0 \ \Rightarrow\ \sqrt{400x^2} = 20x$

(j)

$$\sqrt[3]{256u^5v} \div \sqrt[3]{4u^2v^{10}} = \sqrt[3]{\frac{256u^5v}{4u^2v^{10}}}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{64u^3}{v^9}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{64u^3}}{\sqrt[3]{v^9}}$$

(d) $\frac{xy^2\sqrt{y}}{5}$ ، (f) $100x$ ، (j) $14xy$ ، (j) $\frac{4u}{v^3}$

بند (1-1) ص 9 – تمرين (6) اكتب كلا مما يلي بحيث يكون المقام عددا نسبيا :

(b) $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

(c) $\frac{4}{3\sqrt{3}-2}$

(e) $\frac{5+\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$

الحل:

(b)

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}$$
$$= \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}$$
$$= \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

(c)

$$\frac{4}{3\sqrt{3}-2} = \frac{4}{3\sqrt{3}-2} \times \frac{3\sqrt{3}+2}{3\sqrt{3}+2}$$
$$= \frac{4(3\sqrt{3}+2)}{(3\sqrt{3})^2-(2)^2}$$
$$= \frac{4(3\sqrt{3}+2)}{27-4}$$
$$= \frac{12\sqrt{3}+8}{23}$$

(e)

$$\frac{5+\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}} \times \frac{4+3\sqrt{5}}{4+3\sqrt{5}}$$
$$= \frac{20+15\sqrt{5}+4\sqrt{5}+15}{(4)^2-(3\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{35 + 19\sqrt{5}}{16 - 45}$$
$$= \frac{35 + 19\sqrt{5}}{-29}$$

(b) $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ ، (c) $\frac{12\sqrt{3} + 8}{23}$ ، (e) $-\frac{35 + 19\sqrt{5}}{29}$

بند (1-1) ص 9 – تمرين (7) أوجد قيمة التعبير: $x^2 - 6$ إذا كان $x = \frac{4}{\sqrt{5} - 1}$

الحل:

$$x = \frac{4}{\sqrt{5} - 1}$$
$$x = \frac{4}{\sqrt{5} - 1} \times \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1}$$
$$x = \frac{4(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1}$$
$$x = \frac{4(\sqrt{5} + 1)}{4} = \sqrt{5} + 1$$
$$x^2 - 6 = (\sqrt{5} + 1)^2 - 6$$
$$= 5 + 2\sqrt{5} + 1 - 6$$

$\therefore\ x^2 - 6 = 2\sqrt{5}$

بند (1-1) ص 9 – تمرين (8) أوجد قيمة التعبير: $x^2 - x + 1$ إذا كان $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

الحل:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$x^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4}$$
$$x^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$
$$x^2 - x + 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1$$
$$= \frac{3 + \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5}}{2} + 1$$
$$= \frac{2}{2} + 1 = 1 + 1$$

$$\therefore\ x^2 - x + 1 = 2$$

البند (2-1) – الأسس النسبية

بند (2-1) ص 12 – تمرين (2) اكتب كل عدد مما يلي بالصورة الجذرية :

(a) $x \geq 0\,,\, x^{\frac{1}{6}}$

(b) $x^{\frac{2}{7}}$

(c) $y \geq 0\,,\, y^{-\frac{9}{8}}$

(d) $x \geq 0\,,\, x^{1.5}$

الحل:

(a)

$$x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$$

(b)

$$x^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{x^2}$$

(c)

$$y^{-\frac{9}{8}} = \frac{1}{y^{\frac{9}{8}}} = \frac{1}{\sqrt[8]{y^9}}$$

(d)

$$x^{1.5} = x^{\frac{3}{2}}$$

(a) $\sqrt[6]{x}$ ،
(b) $\sqrt[7]{x^2}$ ،
(c) $\frac{1}{\sqrt[8]{y^9}}$ ،
(d) $\sqrt{x^3}$

بند (2-1) ص 12 – تمرين (3) بسط كل عدد من الأعداد التالية (دون استخدام الآلة الحاسبة) :

(a) $64^{\frac{2}{3}}$

(b) $(-32)^{\frac{4}{5}}$

(c) $4^{1.5}$

الحل:

(a)

$$64^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = (4)^2 = 16$$

(b)

$$(-32)^{\frac{4}{5}} = \left(\sqrt[5]{-32}\right)^4 = (-2)^4 = 16$$

(c)

$$4^{1.5} = 4^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left(\sqrt{4}\right)^3 = (2)^3$$

(a) 16 ،

(b) 16 ،

(c) 8

بند (1-2) ص 12 – تمرين (5) بسط كل مما يلي (دون استخدام الآلة الحاسبة) :

(a) $2\sqrt[4]{16^3}$

(b) $\sqrt[3]{(-27)^{-4}}$

(c) $\sqrt[5]{-243}$

(d) $x \geq 0\,,\, x^{\frac{2}{7}} \cdot x^{\frac{3}{14}}$

(e) $x > 0\,,\, x^{\frac{3}{5}} \div x^{\frac{1}{10}}$

(f) $x > 0\,, y > 0\,,\, \dfrac{x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}$

(g) $x > 0\,, y > 0\,,\, \dfrac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}$

(i) $t > 0\,,\, \left(\dfrac{\sqrt{9t}}{\sqrt[3]{27t^2}}\right)^{-12}$

الحل:

(a)

$$2\sqrt[4]{16^3} = 2\left(\sqrt[4]{16}\right)^3$$

$$= 2(2)^3 = 2(8) = 16$$

(b)

$$\sqrt[3]{(-27)^{-4}} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^{-4}$$

$$= (-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$$

(c)

$$\sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{(-3)^5} = -3$$

(d)

$$x^{\frac{2}{7}} \cdot x^{\frac{3}{14}} = x^{\frac{2}{7}+\frac{3}{14}}$$

$$= x^{\frac{4}{14}+\frac{3}{14}} = x^{\frac{7}{14}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

(e)

$$x^{\frac{3}{5}} \div x^{\frac{1}{10}} = x^{\frac{3}{5}-\frac{1}{10}}$$

(f)

$$\frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}} = x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}$$

$$= x^{\frac{6}{10}-\frac{1}{10}} = x^{\frac{5}{10}}$$
$$= x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

(g)

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{2}{4}+\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{2}{6}+\frac{3}{6}}$$
$$= x^{\frac{5}{4}} \cdot y^{\frac{5}{6}}$$

(i)

$$\left(\frac{\sqrt{9t}}{\sqrt[3]{27t^2}}\right)^{-12} = \left(\frac{3t^{\frac{1}{2}}}{3t^{\frac{2}{3}}}\right)^{-12}$$
$$= \left(t^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}\right)^{-12}$$
$$= \left(t^{-\frac{1}{6}}\right)^{-12}$$

$$= x^{\frac{4}{6}-\frac{3}{6}} \cdot y^{-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}}$$
$$= x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{1}{4}}$$

(a) 16 ، (b) $\frac{1}{81}$ ، (c) -3 ، (d) $\sqrt{x}$ ، (e) $\sqrt{x}$ ، (f) $x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{4}}$ ، (g) $x^{\frac{5}{4}}y^{\frac{5}{6}}$ ، (i) t^2

البند (3-1) – حل المعادلات

بند (3-1) – تمرين (1) حل كلا من المعادلات :

(a) $3\sqrt{x}+3=15$

(b) $\sqrt{x+3}=5$

(c) $(x+5)^{\frac{2}{3}}=4$

(d) $(x+1)^{\frac{3}{2}}-2=25$

الحل:

(a)

$$3\sqrt{x}+3=15$$
$$3\sqrt{x}=12$$
$$\sqrt{x}=4$$
$$(\sqrt{x})^2=(4)^2$$

شرط الحل

(a)

شرط التعريف: $x \geq 0$

$x \in [0, \infty)$

$$x = 16$$

$$16 \in [0\ , \infty)$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{16\}$$

(b)

$$\sqrt{x+3} = 5$$

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (5)^2$$

$$x + 3 = 25$$

$$x = 22$$

$$22 \in [-3\ , \infty)$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{22\}$$

(c)

$$(x+5)^{\frac{2}{3}} = 4$$

$$\left((x+5)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = (4)^{\frac{3}{2}}$$

$$|x+5| = 8$$

إما: $x + 5 = 8$ | أو: $x + 5 = -8$

$x = 3$ | $x = -13$

التحقق: $(-8)^{\frac{2}{3}} = 4\ ,\ (8)^{\frac{2}{3}} = 4$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{-13\ , 3\}$$

(d)

$$(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2 = 25$$

$$(x+1)^{\frac{3}{2}} = 27$$

$$\left((x+1)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = (27)^{\frac{2}{3}}$$

$$x + 1 = 9$$

$$x = 8$$

$$8 \in [-1\ , \infty)$$

شرط الحل

(b)

شرط التعريف: $x + 3 \geq 0$

$x \geq -3 \ \Rightarrow\ x \in [-3\ , \infty)$

شرط الحل

(c)

$(x+5)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2$

معرّفة لكل $x \in \mathbb{R}$

شرط الحل

(d)

شرط التعريف: $x + 1 \geq 0$

$x \geq -1 \ \Rightarrow\ x \in [-1\ , \infty)$

∴ مجموعة الحل:

(a) $\{16\}$ ،

(b) $\{22\}$ ،

(c) $\{-13\ ,3\}$ ،

(d) $\{8\}$

بند (3-1) – تمرين (3) حل كلا من المعادلات :

(j) $2(x-1)^{\frac{4}{3}}+4=36$

الحل:

$$2(x-1)^{\frac{4}{3}}+4=36$$
$$2(x-1)^{\frac{4}{3}}=32$$
$$(x-1)^{\frac{4}{3}}=16$$
$$\left((x-1)^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=(16)^{\frac{3}{4}}$$
$$|x-1|=8$$

إما: $x-1=8$ ، $x=9$

أو: $x-1=-8$ ، $x=-7$

التحقق: $2(8)^{\frac{4}{3}}+4=36$, $2(-8)^{\frac{4}{3}}+4=36$

∴ مجموعة الحل $=\{-7\ ,9\}$

شرط الحل

$(x-1)^{\frac{4}{3}}=\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^4$

معرّفة لكل $x\in\mathbb{R}$

بند (3-1) – تمرين (3) حل كلا من المعادلات :

(a) $\sqrt{11x+3}-2x=0$

(b) $\sqrt{3x+13}-5=x$

(f) $\sqrt{10x}-2\sqrt{5x-25}=0$

الحل:

(a)

$$\sqrt{11x+3}-2x=0$$
$$\sqrt{11x+3}=2x$$
$$\left(\sqrt{11x+3}\right)^2=(2x)^2$$
$$11x+3=4x^2$$

(b)

$$\sqrt{3x+13}-5=x$$
$$\sqrt{3x+13}=x+5$$
$$\left(\sqrt{3x+13}\right)^2=(x+5)^2$$
$$3x+13=x^2+10x+25$$

شرط الحل

(a)

شروط التعريف: $11x+3\geq 0\ ,\ 2x\geq 0$

$x\geq -\frac{3}{11}\ ,\ x\geq 0$

$\therefore x\geq 0\ \Rightarrow\ x\in[0\ ,\infty)$

$$4x^2 - 11x - 3 = 0$$
$$(4x + 1)(x - 3) = 0$$
أو $4x + 1 = 0$
$$x - 3 = 0$$
$$x = 3 \text{ أو } x = -\frac{1}{4}$$
$$3 \in [0 , \infty)$$
$$-\frac{1}{4} \notin [0 , \infty) \text{ (مرفوض)}$$
$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{3\}$$

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$
$$(x + 3)(x + 4) = 0$$
$$x + 4 = 0 \text{ أو } x + 3 = 0$$
$$x = -4 \text{ أو } x = -3$$
$$-3 \in \left[-\frac{13}{3} , \infty\right)$$
$$-4 \in \left[-\frac{13}{3} , \infty\right)$$
$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{-4 , -3\}$$

شرط الحل

(b)

شروط التعريف: $3x + 13 \geq 0 \ , \ x + 5 \geq 0$

$$x \geq -\frac{13}{3} \ , \ x \geq -5$$
$$\therefore x \geq -\frac{13}{3} \ \Rightarrow \ x \in \left[-\frac{13}{3} , \infty\right)$$

شرط الحل (f)

شروط التعريف: $10x \geq 0 \ , \ 5x - 25 \geq 0$

$$x \geq 0 \ , \ x \geq 5$$
$$\therefore x \geq 5 \ \Rightarrow \ x \in [5 , \infty)$$

(f)

$$\sqrt{10x} - 2\sqrt{5x - 25} = 0$$
$$\sqrt{10x} = 2\sqrt{5x - 25}$$
$$\left(\sqrt{10x}\right)^2 = \left(2\sqrt{5x - 25}\right)^2$$
$$10x = 4(5x - 25)$$
$$10x = 20x - 100$$
$$-10x = -100$$
$$x = 10$$
$$10 \in [5 , \infty)$$

∴ مجموعة الحل:

(a) $\{3\}$ ،

(b) $\{-4 , -3\}$ ، **(f)** $\{10\}$

بند (3-1) – أوجد حل المعادلة أوجد حل المعادلة : $(2x + 1)^{\frac{1}{3}} = (3x + 2)^{\frac{1}{3}}$

الحل:

$$(2x + 1)^{\frac{1}{3}} = (3x + 2)^{\frac{1}{3}}$$
$$\left((2x + 1)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left((3x + 2)^{\frac{1}{3}}\right)^3$$
$$2x + 1 = 3x + 2$$
$$2x - 3x = 2 - 1$$

شرط الحل

$(2x + 1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2x + 1}$, $(3x + 2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3x + 2}$

الجذر التكعيبي معرّف لكل $x \in \mathbb{R}$

$$-x = 1$$

$$x = -1$$

التحقق:

$$(2(-1)+1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{1}{3}} \ , \ (3(-1)+2)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{1}{3}}$$

∴ مجموعة الحل $= \{-1\}$

بند (1-3) – تمرين (7) حل كلا من المعادلات الأسية التالية :

(a) $5^{2x-3} = 125$

(b) $3^{x+1} = 1$

(d) $3^{x^2-5x} = \frac{1}{9^2}$

(g) $5^{x} = 125\sqrt{5}$

الحل:

(a)

$$5^{2x-3} = 125$$

$$5^{2x-3} = 5^3$$

$$2x - 3 = 3$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

∴ مجموعة الحل $= \{3\}$

(b)

$$3^{x+1} = 1$$

$$3^{x+1} = 3^0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

∴ مجموعة الحل $= \{-1\}$

(d)

$$3^{x^2-5x} = \frac{1}{9^2}$$

$$3^{x^2-5x} = \frac{1}{(3^2)^2} = \frac{1}{3^4}$$

$$3^{x^2-5x} = 3^{-4}$$

$$x^2 - 5x = -4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$x - 4 = 0 \text{ أو } x - 1 = 0$$

(g)

$$5^{x} = 125\sqrt{5}$$

$$5^{x} = 5^3 \cdot 5^{\frac{1}{2}}$$

$$5^{x} = 5^{\frac{7}{2}}$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$x = 4$ أو $x = 1$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{1 , 4\}$

$\therefore$ مجموعة الحل:

(a) $\{3\}$ ،

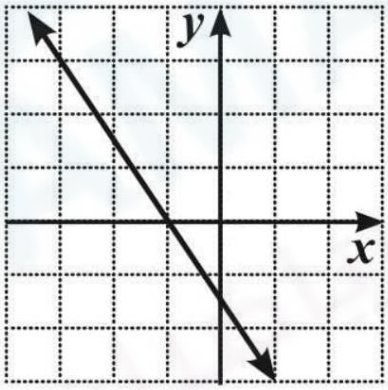
(b) $\{-1\}$ ،

(d) $\{1 , 4\}$ ، **(g)** $\left\{\frac{7}{2}\right\}$

البند (2-1) – مجال الدالة

بند (2-1) ص 20 – تمرين (1) استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل بيان دالة أم لا .

(1)



الحل:

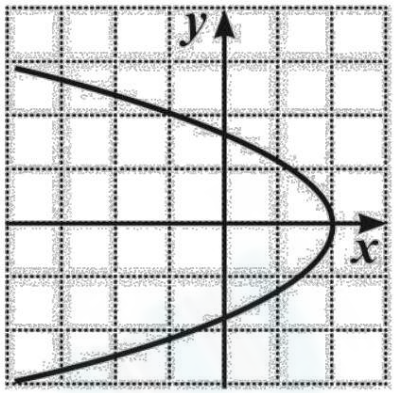
نرسم مستقيمات رأسية (موازية لمحور y) على البيان

كل مستقيم رأسي يقطع البيان في نقطة واحدة فقط

$\therefore$ البيان يمثل دالة

بند (2-1) ص 20 – تمرين (2) استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل بيان دالة أم لا .

(2)



الحل:

نرسم مستقيمات رأسية (موازية لمحور y) على البيان

المستقيم الرأسي $x = 0$ (محور y) يقطع البيان في نقطتين

يوجد مستقيم رأسي يقطع البيان في أكثر من نقطة

∴ البيان لا يمثل دالة

بند (2-1) ص 20 – تمرين (7) حدد مجال كل من الدوال التالية :

(7) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2 - 1$

الحل:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2 - 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$$

f كثيرة حدود ، مجال f : $D_f = \mathbb{R}$

∴ مجال الدالة $= \mathbb{R}$

بند (2-1) ص 20 – تمرين (8) حدد مجال كل من الدوال التالية :

(8) $g(x) = \sqrt{3x - 7} + 2$

الحل:

$$g(x) = \sqrt{3x - 7} + 2$$

نسمّي: $h(x) = \sqrt{3x - 7}\ ،\ k(x) = 2$

مجال h : $D_h = \left[\frac{7}{3}\ , \infty\right)$

k دالة ثابتة ، مجال k : $D_k = \mathbb{R}$

$$D_g = D_h \cap D_k$$

$$D_g = \left[\frac{7}{3}\ , \infty\right) \cap \mathbb{R}$$

$\therefore$ **مجال الدالة** $= \left[\frac{7}{3}\ , \infty\right)$

شرط الحل

h معرّفة عندما $3x - 7 \geq 0$

$3x \geq 7 \ \Rightarrow \ x \geq \frac{7}{3}$

بند (2-1) ص 20 – تمرين (9) حدد مجال كل من الدوال التالية :

(9) $t(x) = \dfrac{\sqrt{-2x} + 3}{x - 1}$

الحل:

$$t(x) = \frac{\sqrt{-2x} + 3}{x - 1}$$

نسمّي البسط: $g(x) = \sqrt{-2x} + 3$

نسمّي المقام: $h(x) = x - 1$

مجال g : $D_g = (-\infty\ , 0]$

h كثيرة حدود ، مجال h : $D_h = \mathbb{R}$

$$D_t = (D_g \cap D_h) - \{1\}$$

$$D_t = ((-\infty\ , 0] \cap \mathbb{R}) - \{1\} = (-\infty\ , 0] - \{1\}$$

$\therefore$ **مجال الدالة** $= (-\infty\ , 0]$

شرط الحل

g معرّفة عندما $-2x \geq 0\ ،\ x \leq 0$

أصفار المقام: $h(x) = 0$

$x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = 1$

بند (2-1) ص 20 – تمرين (10) حدد مجال كل من الدوال التالية :

$$h(x) = \frac{3x-1}{5-2x} \quad (10)$$

الحل:

$$h(x) = \frac{3x-1}{5-2x}$$

h دالة نسبية

مجال الدالة النسبية $= \mathbb{R} - \{$أصفار المقام$\}$

$$D_h = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$$

$\therefore$ مجال الدالة $= \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

شرط الحل

أصفار المقام: $5-2x=0$

$$-2x=-5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

بند (2-1) ص 20 – تمرين (11) حدد مجال كل من الدوال التالية :

$$u(x) = \sqrt[3]{7-5x} \quad (11)$$

الحل:

$$u(x) = \sqrt[3]{7-5x}$$

نسمّي: $g(x) = 7-5x$

g كثيرة حدود ، مجال g : $D_g = \mathbb{R}$

u جذر تكعيبي ، $D_u = D_g$

$\therefore$ مجال الدالة $= \mathbb{R}$

شرط الحل

u جذر تكعيبي معرّف لكل $x \in \mathbb{R}$

بند (2-1) ص 20 – تمرين (12) حدد مجال كل من الدوال التالية :

$$v(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{3+x}} \quad (12)$$

الحل:

$$v(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{3+x}}$$

نسمّي البسط: $g(x) = 2x-1$

نسمّي المقام: $h(x) = \sqrt{3+x}$

g كثيرة حدود ، مجال g : $D_g = \mathbb{R}$

مجال h : $D_h = [-3\ ,\infty)$

$$D_v = (D_g \cap D_h) - \{-3\}$$

$$D_v = (\mathbb{R} \cap [-3\ ,\infty)) - \{-3\} = [-3\ ,\infty) - \{-3\}$$

∴ **مجال الدالة** $= (-3\ ,\infty)$

شرط الحل

h معرّفة عندما $3+x \geq 0$ ، $x \geq -3$

أصفار المقام: $h(x) = 0$

$$\sqrt{3+x} = 0 \ \Rightarrow\ 3+x = 0 \ \Rightarrow\ x = -3$$

بند (2-1) ص 20 – تمرين (13) حدد مجال كل من الدوال التالية :

$$h(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{5+\sqrt{2x-1}} \quad (13)$$

الحل:

$$h(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{5+\sqrt{2x-1}}$$

نسمّي البسط: $g(x) = \sqrt{x-2}$

نسمّي المقام: $k(x) = 5+\sqrt{2x-1}$

مجال g : $D_g = [2\ ,\infty)$

مجال k : $D_k = \left[\frac{1}{2}\ ,\infty\right)$

$$D_h = D_g \cap D_k$$

$$D_h = [2\ ,\infty) \cap \left[\frac{1}{2}\ ,\infty\right)$$

∴ **مجال الدالة** $= [2\ ,\infty)$

شرط الحل

g معرّفة عندما $x-2 \geq 0$ ، $x \geq 2$

k معرّفة عندما $2x-1 \geq 0$ ، $x \geq \frac{1}{2}$

أصفار المقام: $k(x) = 0$

$$5+\sqrt{2x-1} = 0 \ \Rightarrow\ \sqrt{2x-1} = -5$$

لا يوجد حل لأن $\sqrt{2x-1} \geq 0$

البند (2-2) – الدوال التربيعية ونمذجتها

بند (2-2) – تمرين (1) أي من المعادلات التالية خطية ؟ وأيها تربيعية ؟

(1) $y = x + 4$

الحل:

$$y = x + 4$$

على الصورة $y = mx + b$ حيث $m = 1 \neq 0$

أكبر أس للمتغير x هو 1

∴ المعادلة خطية

بند (2-2) – تمرين (3) أي من المعادلات التالية خطية ؟ وأيها تربيعية ؟

(3) $y = 3(x-1)^2 + 4$

الحل:

$$y = 3(x-1)^2 + 4$$

$$y = 3(x^2 - 2x + 1) + 4$$

$$y = 3x^2 - 6x + 7$$

على الصورة $y = ax^2 + bx + c$ حيث $a = 3 \neq 0$

∴ المعادلة تربيعية

بند (2-2) – تمرين (8) أي من المعادلات التالية خطية ؟ وأيها تربيعية ؟

(8) $y = (3x+7)^2 - (9x^2 - 49)$

الحل:

$$y = (3x+7)^2 - (9x^2 - 49)$$

$$y = 9x^2 + 42x + 49 - 9x^2 + 49$$

$$y = 42x + 98$$

على الصورة $y = mx + b$ حيث $m = 42 \neq 0$

∴ المعادلة خطية

البند (2-3) – الدوال التربيعية والقطوع المكافئة

بند (2-3) – تمرين (1) كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل . أكتب معادلة هذا القطع المكافئ وأذكر ما إذا كان الرسم البياني مفتوحاً إلى أعلى أم إلى أسفل .

(1) $F(3\ ,2)$

الحل:

رأس القطع: $(h\ ,k)=(0\ ,0)$

$$y=a(x-h)^2+k$$

$$y=ax^2$$

نعوّض بالنقطة: $(3\ ,2)$

$$2=a(3)^2$$

$$2=9a$$

$$a=\frac{2}{9}$$

$\therefore a=\frac{2}{9}>0$ فتحة القطع إلى الأعلى

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي: $y=\frac{2}{9}x^2$ ، مفتوح إلى أعلى

بند (2-3) – تمرين (2) كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل . أكتب معادلة هذا القطع المكافئ وأذكر ما إذا كان الرسم البياني مفتوحاً إلى أعلى أم إلى أسفل .

(2) $F(8\ ,-12)$

الحل:

رأس القطع: $(h\ ,k)=(0\ ,0)$

$$y=a(x-h)^2+k$$

$$y=ax^2$$

نعوّض بالنقطة: $(8\ ,-12)$

$$-12=a(8)^2$$

$$-12=64a$$

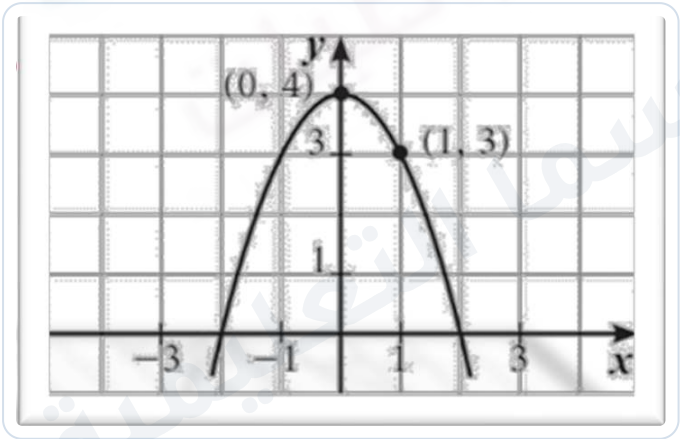
$$a=-\frac{12}{64}=-\frac{3}{16}$$

$\therefore a=-\frac{3}{16}<0$ فتحة القطع إلى الأسفل

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي: $y=-\frac{3}{16}x^2$ ، مفتوح إلى أسفل

بند (2-3) – تمرين (5) أوجد معادلة كل قطع مكافئ بدلالة إحداثيات رأسه .

(5)



الحل:

من الرسم: رأس القطع: $(h\ ,k)=(0\ ,4)$

$$y=a(x-h)^2+k$$

$$y=a(x-0)^2+4$$

نعوّض بالنقطة: $(1\ ,3)$

$$3 = a(1-0)^2 + 4$$

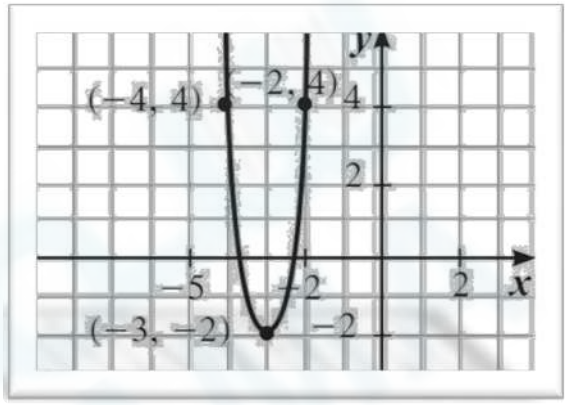
$$3 = a + 4$$

$$a = -1$$

∴ **معادلة القطع المكافئ هي:** $y = -(x-0)^2 + 4$ **أي** $y = -x^2 + 4$

بند (2-3) – تمرين (10) أوجد معادلة كل قطع مكافئ بدلالة إحداثيات رأسه .

(10)



الحل:

من الرسم: رأس القطع: $(h\ ,k) = (-3\ ,-2)$

$$y = a(x-h)^2 + k$$

$$y = a(x+3)^2 - 2$$

نعوّض بالنقطة: $(-2\ ,4)$

$$4 = a(-2+3)^2 - 2$$

$$4 = a - 2$$

$$a = 6$$

∴ **معادلة القطع المكافئ هي:** $y = 6(x+3)^2 - 2$

بند (2-3) – تمرين (11) ارسم منحنى كل دالة من الدوال التالية :

(11) $y = (x+3)^2$

الحل:

$$y = (x+3)^2$$

$$y = a(x-h)^2 + k$$

$$y = 1\,(x-(-3))^2 + 0$$

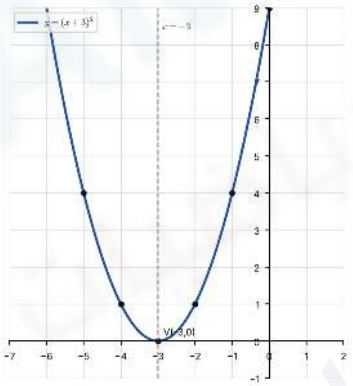
رأس القطع: $(h\,,k) = (-3\,,0)$

$\therefore a = 1 > 0$ فتحة القطع إلى الأعلى

معادلة محور التماثل: $x = -3$

جدول قيم:

x	-5	-4	-3	-2	-1
y	4	1	0	1	4



$\therefore$ المنحنى قطع مكافئ رأسه $(-3\,,0)$ وفتحته إلى الأعلى ومحور تماثله $x = -3$

البند (2-2) – الدوال التربيعية ونمذجتها

بند (2-2) – تمرين (16) ارسم منحنى كل دالة من الدوال التالية :

$$y = 3(x-2)^2 + 4$$

الحل:

$$y = 3(x-2)^2 + 4$$

$$y = a(x-h)^2 + k$$

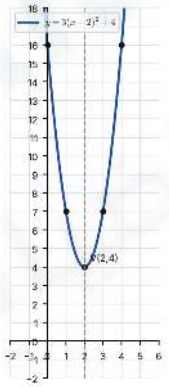
رأس القطع: $(h\ ,k) = (2\ ,4)$

$\therefore a = 3 > 0$ فتحة القطع إلى الأعلى

معادلة محور التماثل: $x = 2$

جدول قيم:

x	0	1	2	3	4
y	16	7	4	7	16



$\therefore$ المنحنى قطع مكافئ رأسه $(2\ ,4)$ وفتحته إلى الأعلى ومحور تماثله $x = 2$

بند (2-2) – تمرين (21) ارسم كل قطع مكافئ مستخدماً المعلومات المعطاة . ثم اكتب معادلته بدلالة إحداثيات الرأس .

الرأس $v(0\ ,0)$ ويمر بالنقطة $P(2\ ,10)$

الحل:

رأس القطع: $(h\ ,k) = (0\ ,0)$

$$y = a(x-h)^2 + k$$

$$y = a(x-0)^2 + 0 \ \Rightarrow\ y = ax^2$$

نعوّض بالنقطة: $(2\ ,\ 10)$

$$10 = a(2)^2$$

$$10 = 4a$$

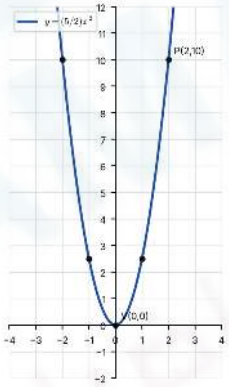
$$a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$\therefore a = \frac{5}{2} > 0$ فتحة القطع إلى الأعلى

معادلة محور التماثل: $x = 0$

جدول قيم:

x	-2	-1	0	1	2
y	10	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	10



$\therefore$ **معادلة القطع المكافئ هي:** $y = \frac{5}{2}x^2$

بند (2-2) – تمرين (24) ارسم كل قطع مكافئ مستخدماً المعلومات المعطاة . ثم اكتب معادلته بدلالة إحداثيات الرأس .

الرأس $v(3\ ,\ 1)$ و الجزء المقطوع من محور الصادات -2 .

الحل:

رأس القطع: $(h\ ,\ k) = (3\ ,\ 1)$

$$y = a(x - h)^2 + k$$

$$y = a(x - 3)^2 + 1$$

الجزء المقطوع من محور الصادات -2 $\therefore$ القطع يمر بالنقطة $(0\ ,\ -2)$

نعوّض بالنقطة: $(0\ ,\ -2)$

$$-2 = a(0-3)^2 + 1$$

$$-2 = 9a + 1$$

$$9a = -3$$

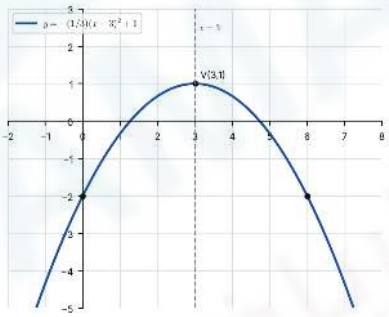
$$a = -\frac{1}{3}$$

$\therefore a = -\frac{1}{3} < 0$ فتحة القطع إلى الأسفل

معادلة محور التماثل: $x = 3$

جدول قيم:

x	0	3	6
y	-2	1	-2



$\therefore$ **معادلة القطع المكافئ هي:** $y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 1$

البند (2-5) – المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

بند (2-5) ص 30 – تمرين (2) ارسم بيانياً الدالة المعطاة ومعكوسها على محاور الإحداثيات نفسها . ثم أكتب معادلة المعكوس .

$$y = \frac{x+1}{3}$$

الحل:

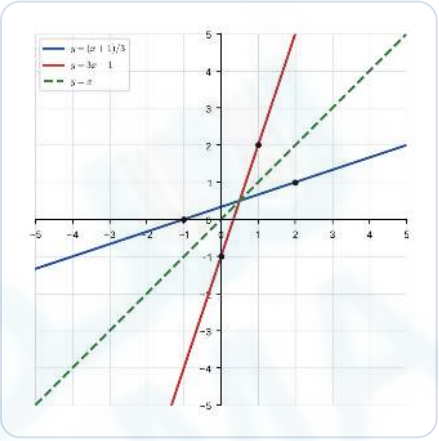
$$y = \frac{x+1}{3}$$

جدول قيم الدالة:

2	-1	x
1	0	y

المعكوس: نبدّل x و y في نقاط الجدول:

1	0	x
2	-1	y



معادلة المعكوس: $y = mx + b$

$$m = \frac{2-(-1)}{1-0} = \frac{3}{1} = 3$$

$$y = 3x + b$$

نعوّض بالنقطة $(0, -1)$:

$$-1 = 3(0) + b$$

$$b = -1$$

∴ معادلة المعكوس هي: $y = 3x - 1$

بند (2-5) ص 30 – تمرين (3) ارسم بيانياً الدالة المعطاة ومعكوسها على محاور الإحداثيات نفسها . ثم أكتب معادلة المعكوس .

$$y = 5x + 3$$

الحل:

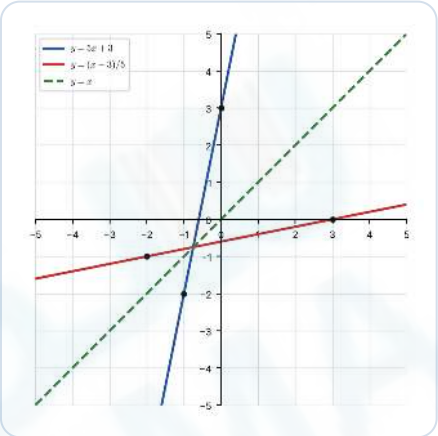
$$y = 5x + 3$$

جدول قيم الدالة:

0	-1	x
3	-2	y

المعكوس: نبدّل x و y في نقاط الجدول:

3	-2	x
0	-1	y



معادلة المعكوس: $y = mx + b$

$$m = \frac{0-(-1)}{3-(-2)} = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{1}{5}x + b$$

نعوّض بالنقطة $(3, 0)$:

$$0 = \frac{1}{5}(3) + b$$

$$0 = \frac{3}{5} + b$$

$$b = -\frac{3}{5}$$

∴ معادلة المعكوس هي: $y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$

بند (2-5) ص 30 – تمرين (7) اكتب معادلة المعكوس لكل دالة مما يلي :

$$y = \frac{x+5}{3}$$

الحل:

$$y = \frac{x+5}{3}$$

نبدّل x مع y:

$$x = \frac{y+5}{3}$$

$$3x = y + 5$$

$$y = 3x - 5$$

∴ **معادلة المعكوس:** $y = 3x - 5$

بند (2-5) ص 30 – تمرين (8) اكتب معادلة المعكوس لكل دالة مما يلي :

$$y = 6x + 2$$

الحل:

$$y = 6x + 2$$

نبدّل x مع y:

$$x = 6y + 2$$

$$6y = x - 2$$

$$y = \frac{x-2}{6}$$

∴ **معادلة المعكوس:** $y = \frac{x-2}{6}$

بند (2-5) ص 30 – تمرين (11) ارسم كل دالة جذر تربيعي . ثم اذكر المجال والمدى :

$$y = -\sqrt{x-1}$$

الحل:

$$y = -\sqrt{x-1}$$

دالة المرجع: $y = \sqrt{x}$

$$y = -\sqrt{x-h} + k \;\Rightarrow\; h = 1\,,\; k = 0$$

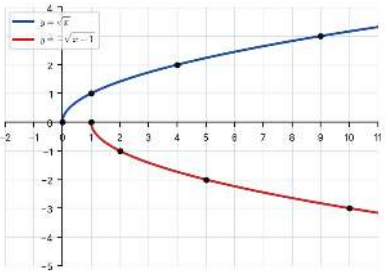
x	0	1	4	9
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3

شرط الحل

شرط التعريف: $x - 1 \geq 0$

$$x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, \infty)$$

x	1	2	5	10
$y = -\sqrt{x-1}$	0	-1	-2	-3



بيان الدالة $y = -\sqrt{x-1}$ ينتج بانعكاس بيان دالة المرجع في محور السينات ثم انسحابه وحدة واحدة لليمين

المجال : $[h, \infty) = [1, \infty)$

المدى : $(-\infty, k] = (-\infty, 0]$

∴ **مجال الدالة** $= [1, \infty)$ ، **المدى** $= (-\infty, 0]$

بند (2-5) ص 30 – تمرين (12) ارسم كل دالة جذر تربيعي . ثم اذكر المجال والمدى :

$$y = -\sqrt{x} + 2$$

الحل:

$$y = -\sqrt{x} + 2$$

دالة المرجع: $y = \sqrt{x}$

$$y = -\sqrt{x-h} + k \;\Rightarrow\; h = 0\,,\; k = 2$$

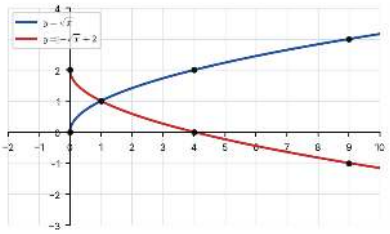
x	0	1	4	9
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3

x	0	1	4	9
$y = -\sqrt{x} + 2$	2	1	0	-1

شرط الحل

شرط التعريف: $x \geq 0$

$x \in [0, \infty)$



بيان الدالة $y = -\sqrt{x} + 2$ ينتج بانعكاس بيان دالة المرجع في محور السينات ثم انسحابه وحدتين للأعلى

المجال : $[h, \infty) = [0, \infty)$

المدى : $(-\infty, k] = (-\infty, 2]$

∴ **مجال الدالة** $= [0, \infty)$ ، **المدى** $= (-\infty, 2]$

بند (2-5) ص 30 – تمرين (13) ارسم كل دالة جذر تربيعي . ثم اذكر المجال والمدى :

$$y = \sqrt{x-4} + 2$$

الحل:

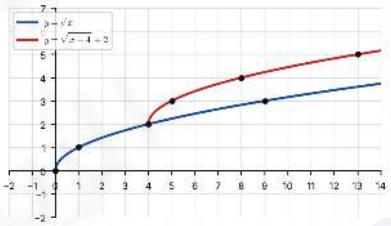
$$y = \sqrt{x-4} + 2$$

دالة المرجع: $y = \sqrt{x}$

$$y = \sqrt{x-h} + k \;\Rightarrow\; h = 4\,,\; k = 2$$

9	4	1	0	x
3	2	1	0	$y = \sqrt{x}$

13	8	5	4	x
5	4	3	2	$y = \sqrt{x-4} + 2$



بيان الدالة $y = \sqrt{x-4} + 2$ ينتج بانسحاب بيان دالة

المرجع 4 وحدات لليمين ووحدتين للأعلى

المجال : $[h, \infty) = [4, \infty)$

المدى : $[k, \infty) = [2, \infty)$

∴ مجال الدالة $= [4, \infty)$ ، المدى $= [2, \infty)$

شرط الحل

شرط التعريف: $x - 4 \geq 0$

$x \geq 4 \Rightarrow x \in [4, \infty)$

البند (2-6) – حل المتباينات

بند (2-6) ص 32 – تمرين (a-1) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية :

(a) $(x-3)(2x+5)<0$

الحل:

$$(x-3)(2x+5)<0$$

المعادلة المناظرة: $(x-3)(2x+5)=0$

$$2x+5=0 \text{ أو } x-3=0$$

$$x=-\frac{5}{2} \text{ أو } x=3$$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $(x-3)(2x+5)<0$ نتبع التالي:

$$2x+5>0 \Rightarrow x>-\frac{5}{2}$$
$$2x+5<0 \Rightarrow x<-\frac{5}{2}$$

$$x-3>0 \Rightarrow x>3$$
$$x-3<0 \Rightarrow x<3$$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$x-3$	$-$		$-$		0	$+$	
$2x+5$	$-$	0	$+$		$+$		
$(x-3)(2x+5)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

$\therefore$ **مجموعة الحل** $=\left(-\frac{5}{2}, 3\right)$

بند (2-6) ص 32 – تمرين (b-1) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية :

(b) $2x^2-3x-5\geq 0$

الحل:

$$2x^2-3x-5\geq 0$$

المعادلة المناظرة: $2x^2-3x-5=0$

$$(2x-5)(x+1)=0$$

$$x+1=0 \text{ أو } 2x-5=0$$

$$x=-1 \text{ أو } x=\frac{5}{2}$$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $(2x-5)(x+1) \geq 0$ نتبع التالي:

$$2x-5>0 \Rightarrow x>\frac{5}{2}$$
$$2x-5<0 \Rightarrow x<\frac{5}{2}$$

$$x+1>0 \Rightarrow x>-1$$
$$x+1<0 \Rightarrow x<-1$$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x-5$	$-$		$-$		0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$			$+$
$(2x-5)(x+1)$	$+$	0	$-$	0		$+$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = (-\infty, -1] \cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$$

بند (2-6) ص 32 – تمرين (1-d) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية :

(d) $4x^2 + 12x + 9 \geq 0$

الحل:

$$4x^2 + 12x + 9 \geq 0$$

المعادلة المناظرة: $4x^2 + 12x + 9 = 0$

$$(2x+3)(2x+3) = 0$$

$$(2x+3)^2 = 0$$

$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ (صفر مكرر)

لإيجاد قيم x التي تحقق: $(2x+3)^2 \geq 0$ نتبع التالي:

$2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$

$2x + 3 < 0 \Rightarrow x < -\frac{3}{2}$

$(2x+3)^2 > 0$ لكل $x \neq -\frac{3}{2}$

$(2x+3)^2 = 0$ عندما $x = -\frac{3}{2}$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	0	$+$
$2x+3$	$-$	0	$+$
$(2x+3)^2$	$+$	0	$+$

∴ **مجموعة الحل** $= \mathbb{R}$

بند (2-6) ص 32 – تمرين (1-c) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية :

(c) $-3x^2 + 2x < -1$

الحل:

$$-3x^2 + 2x < -1 \Rightarrow -3x^2 + 2x + 1 < 0$$

بالضرب في (-1): $3x^2 - 2x - 1 > 0$

المعادلة المناظرة: $3x^2 - 2x - 1 = 0$

$$(3x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ أو } 3x + 1 = 0$$

$$x = 1 \text{ أو } x = -\frac{1}{3}$$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $(3x + 1)(x - 1) > 0$ نتبع التالي:

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$
$$x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$$

$$3x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}$$
$$3x + 1 < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{3}$$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$3x + 1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - 1$	$-$		$-$	0	$+$
$(3x + 1)(x - 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\therefore$ **مجموعة الحل** $= \left(-\infty , -\frac{1}{3}\right) \cup (1 , \infty)$

بند (2-6) ص 32 – تمرين (1-f) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية :

(f) $21 + 4x < x^2$

الحل:

$$21 + 4x < x^2 \Rightarrow x^2 - 4x - 21 > 0$$

المعادلة المناظرة: $x^2 - 4x - 21 = 0$

$$(x - 7)(x + 3) = 0$$

$$x + 3 = 0 \text{ أو } x - 7 = 0$$

$$x = -3 \text{ أو } x = 7$$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $(x-7)(x+3)>0$ نتبع التالي:

$x-7>0 \Rightarrow x>7$ | $x-7<0 \Rightarrow x<7$

$x+3>0 \Rightarrow x>-3$ | $x+3<0 \Rightarrow x<-3$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-3		7	$+\infty$
$x-7$	$-$		$-$		0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$			$+$
$(x-7)(x+3)$	$+$	0	$-$	0		$+$

∴ **مجموعة الحل** $=(-\infty,-3)\cup(7,\infty)$

بند (2-6) ص 32 – تمرين (3) حل المتباينات التالية :

$$\frac{x-1}{x^2-4}<0$$

الحل:

$$\frac{x-1}{x^2-4}<0$$

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)}<0$$

شرط الحل

$x^2-4\neq 0$

$x\neq \pm 2$

أصفار البسط: $x-1=0 \Rightarrow x=1$

أصفار المقام: $(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x=2$ أو $x=-2$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $\frac{x-1}{(x-2)(x+2)}<0$ نتبع التالي:

$x-1>0 \Rightarrow x>1$ | $x-2>0 \Rightarrow x>2$

$x-1<0 \Rightarrow x<1$ | $x-2<0 \Rightarrow x<2$

$x+2>0 \Rightarrow x>-2$

$x+2<0 \Rightarrow x<-2$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-2		1		2	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		0	$+$

$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\dfrac{x-1}{(x-2)(x+2)}$	$-$	غير معرفة	$+$	0	$-$	غير معرفة	$+$

∴ **مجموعة الحل** $= (-\infty, -2) \cup (1, 2)$

بند (2-6) ص 32 – تمرين (4) حل المتباينات التالية :

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 0$$

الحل:

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 0$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1} \leq 0$$

أصفار البسط: $(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=1$ أو $x=-1$

أصفار المقام: $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$ لا يوجد حل في $\mathbb{R}$

$x^2+1>0$ لكل $x \in \mathbb{R}$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2+1} \leq 0$ نتبع التالي:

$x-1>0 \Rightarrow x>1$

$x-1<0 \Rightarrow x<1$

$x+1>0 \Rightarrow x>-1$

$x+1<0 \Rightarrow x<-1$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		
x^2+1	$+$		$+$		$+$		
$\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$	$+$	0	$-$		0	$+$	

∴ **مجموعة الحل** $= [-1, 1]$

شرط الحل

$x^2+1 \neq 0$

$x^2+1>0$ لكل $x \in \mathbb{R}$

بند (2-6) ص 32 – تمرين (5) حل المتباينات التالية :

$$\frac{x^2+x-12}{x^2-4x+4} > 0$$

الحل:

$$\frac{x^2+x-12}{x^2-4x+4} > 0$$

$$\frac{(x+4)(x-3)}{(x-2)^2} > 0$$

أصفار البسط: $(x+4)(x-3)=0 \Rightarrow x=-4$ أو $x=3$

أصفار المقام: $(x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $\frac{(x+4)(x-3)}{(x-2)^2} > 0$ نتبع التالي:

$x-3>0 \Rightarrow x>3$ | $x+4>0 \Rightarrow x>-4$

$x-3<0 \Rightarrow x<3$ | $x+4<0 \Rightarrow x<-4$

$(x-2)^2 > 0$ لكل $x \neq 2$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$	-4		2		3	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x-2)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$\frac{(x+4)(x-3)}{(x-2)^2}$	$+$	0	$-$	غير معرفة	$-$	0	$+$

∴ **مجموعة الحل** $= (-\infty, -4) \cup (3, \infty)$

شرط الحل

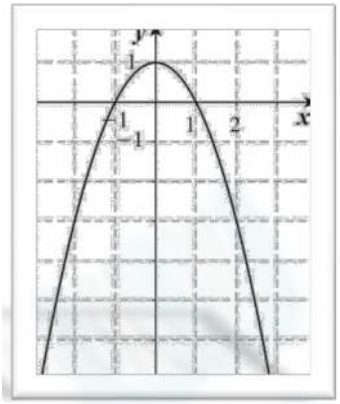
$x^2-4x+4 \neq 0$

$(x-2)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

البند (1-3) – دوال القوى ومعكوساتها

بند (1-3) ص 38 – تمرين (1) الأشكال التالية تمثل دوال . صف تماثل كل دالة ثم وضح هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية .

$$y = -x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



الحل:

المجال $\mathbb{R}$ متماثل حول الصفر

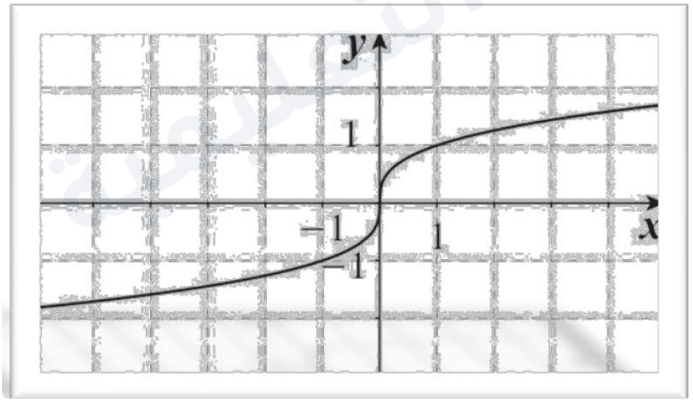
البيان متماثل حول محور الصادات

$$f(-x) = -(-x)^2 + 1 = -x^2 + 1 = f(x)$$

∴ البيان متماثل حول محور الصادات ، الدالة زوجية

بند (1-3) ص 38 – تمرين (2) الأشكال التالية تمثل دوال . صف تماثل كل دالة ثم وضح هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية .

$$y = \sqrt[3]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



الحل:

المجال $\mathbb{R}$ متماثل حول الصفر

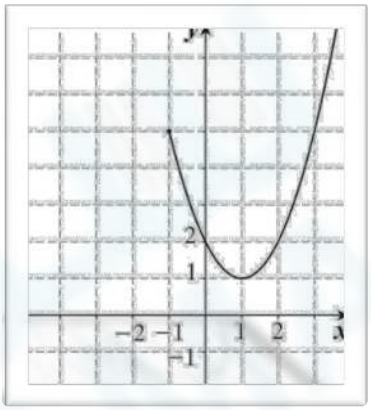
البيان متماثل حول نقطة الأصل

$$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$$

∴ البيان متماثل حول نقطة الأصل ، الدالة فردية

بند (3-1) ص 38 – تمرين (3) الأشكال التالية تمثل دوال . صف تماثل كل دالة ثم وضح هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية .

$$y = x^2 - 2x + 2 \quad \forall x \in [-1\ ,\ \infty)$$



الحل:

$$y = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

البيان متماثل حول المستقيم $x = 1$ (على الجزء $[-1\ ,\ 3]$)

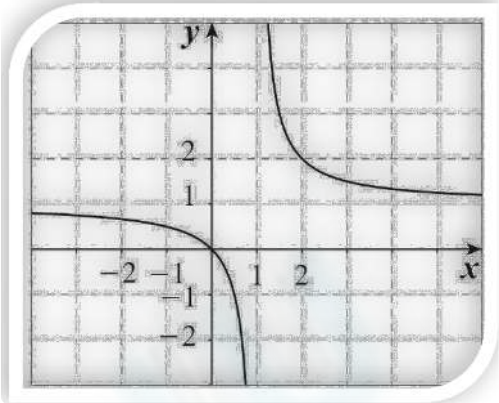
المجال $[-1\ ,\ \infty)$ غير متماثل حول الصفر

مثلاً $2 \in [-1\ ,\ \infty)$ بينما $-2 \notin [-1\ ,\ \infty)$

∴ البيان غير متماثل حول محور الصادات ولا حول نقطة الأصل ، الدالة ليست زوجية وليست فردية

بند (1-3) ص 38 – تمرين (4) الأشكال التالية تمثل دوال . صف تماثل كل دالة ثم وضح هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية .

$$y = \frac{x}{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$



الحل:

$$y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

البيان متماثل حول النقطة $(1\ ,\ 1)$

المجال $\mathbb{R} - \{1\}$ غير متماثل حول الصفر

$-1 \in \mathbb{R} - \{1\}$ بينما $1 \notin \mathbb{R} - \{1\}$

∴ البيان غير متماثل حول محور الصادات ولا حول نقطة الأصل ، الدالة ليست زوجية وليست فردية

بند (1-3) ص 38 – تمرين (5) اذكر ما إذا كانت كل من الدوال التالية فردية أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية .

$$y = x^3$$

الحل:

$f(x) = x^3$ ، المجال $\mathbb{R}$ متماثل حول الصفر

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

∴ الدالة فردية

بند (1-3) ص 38 – تمرين (6) اذكر ما إذا كانت كل من الدوال التالية فردية أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية .

$$y = (x-1)^3 + 2$$

الحل:

$f(x) = (x-1)^3 + 2$ ، المجال $\mathbb{R}$ متماثل حول الصفر

$$f(-x) = (-x-1)^3 + 2 = -(x+1)^3 + 2$$

$f(-x) \neq -f(x)$ و $f(-x) \neq f(x)$

مثلاً $f(1) = 2$ ، $f(-1) = (-2)^3 + 2 = -6$

$f(-1) \neq -f(1)$ و $f(-1) \neq f(1)$

∴ الدالة ليست فردية وليست زوجية

بند (1-3) ص 38 – تمرين (7) اذكر ما إذا كانت كل من الدوال التالية فردية أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية .

$$y = x^4$$

الحل:

$f(x) = x^4$ ، المجال $\mathbb{R}$ متماثل حول الصفر

$$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$$

∴ الدالة زوجية

بند (1-3) ص 38 – تمرين (10) أوجد معكوس كل دالة مما يلي :

$$y = \frac{1}{3}x^3$$

الحل:

$$y = \frac{1}{3}x^3$$

نبدّل x مع y:

$$x = \frac{1}{3}y^3$$

$$y^3 = 3x$$

$$y = \sqrt[3]{3x}$$

∴ معكوس الدالة: $y = \sqrt[3]{3x}$

بند (3-1) ص 38 – تمرين (11) أوجد معكوس كل دالة مما يلي :

$$y = 2\sqrt[4]{x}$$

الحل:

$y = 2\sqrt[4]{x}$ ، مجال الدالة $[0, \infty)$ ومداها $[0, \infty)$

نبدّل x مع y:

$$x = 2\sqrt[4]{y}$$

$$\sqrt[4]{y} = \frac{x}{2}$$

$$(\sqrt[4]{y})^4 = \left(\frac{x}{2}\right)^4$$

$$y = \frac{x^4}{16}$$

مجال المعكوس = مدى الدالة $= [0, \infty)$

∴ **معكوس الدالة:** $y = \frac{x^4}{16}$, $x \geq 0$

شرط الحل

$y = 2\sqrt[4]{x}$ معرّفة عندما $x \geq 0$

$x \in [0, \infty)$

بند (3-1) ص 38 – تمرين (12) أوجد معكوس كل دالة مما يلي :

$$y = \frac{1}{3}x^4$$

الحل:

$$y = \frac{1}{3}x^4$$

نبدّل x مع y:

$$x = \frac{1}{3}y^4$$

$$y^4 = 3x$$

$$\sqrt[4]{y^4} = \sqrt[4]{3x}$$

$$|y| = \sqrt[4]{3x}$$

$$y = -\sqrt[4]{3x} \text{ أو } y = \sqrt[4]{3x}$$

$$y = \pm\sqrt[4]{3x}$$

المعكوس ليس دالة لأن كل $x > 0$ يقابله قيمتان لـ y

∴ **المعكوس:** $y = \pm\sqrt[4]{3x}$

شرط الحل

$3x \geq 0$

$x \geq 0$

بند (3-1) ص 38 – تمرين (14) أوجد معكوس كل دالة مما يلي :

$$y = \sqrt[3]{x-1}$$

الحل:

$$y = \sqrt[3]{x-1}$$

نبدّل x مع y:

$$x = \sqrt[3]{y-1}$$

$$(x)^3 = \left(\sqrt[3]{y-1}\right)^3$$

$$x^3 = y - 1$$

$$y = x^3 + 1$$

∴ **معكوس الدالة:** $y = x^3 + 1$

البند (3-2) – الدوال الحدودية

بند (3-2) ص 40 – تمرين (1) اكتب كل كثيرة حدود مما يلي بالصورة العامة ثم صنفها تبعاً للدرجة وعدد الحدود.

$$(2x^2 + 9) - (3x^2 - 7)$$

الحل:

$$(2x^2 + 9) - (3x^2 - 7)$$

$$= 2x^2 + 9 - 3x^2 + 7$$

$$= -x^2 + 16$$

الدرجة: 2 ⇒ تربيعية

عدد الحدود: 2 ⇒ ثنائية الحد

∴ $-x^2 + 16$ ، **كثيرة حدود تربيعية ثنائية الحد**

بند (2-3) ص 40 – تمرين (5) اكتب كل كثيرة حدود مما يلي بالصورة العامة ثم صنفها تبعاً للدرجة وعدد الحدود.

$$\frac{5x^5+4x}{6}$$

الحل:

$$\frac{5x^5+4x}{6}$$
$$=\frac{5}{6}x^5+\frac{4}{6}x$$
$$=\frac{5}{6}x^5+\frac{2}{3}x$$

الدرجة: 5 $\Rightarrow$ من الدرجة الخامسة

عدد الحدود: 2 $\Rightarrow$ ثنائية الحد

$\therefore \frac{5}{6}x^5+\frac{2}{3}x$ ، كثيرة حدود من الدرجة الخامسة ثنائية الحد

بند (2-3) ص 40 – عين سلوك النهاية (1) عين سلوك النهاية لكل من الدوال التالية :

$$y=\frac{1}{2}x^4+2x^2$$

الحل:

$$y=\frac{1}{2}x^4+2x^2$$

الحد الرئيسي: $\frac{1}{2}x^4$

الدرجة $n=4$ زوجية ، المعامل الرئيسي $a=\frac{1}{2}>0$

عندما $x\to-\infty$ فإن $y\to\infty$

عندما $x\to\infty$ فإن $y\to\infty$

$\therefore$ سلوك النهاية: إلى الأعلى من اليسار وإلى الأعلى من اليمين

بند (3-2) ص 40 – عين سلوك النهاية (2) عين سلوك النهاية لكل من الدوال التالية :

$$y = -4x^4 + 5x^5$$

الحل:

$$y = -4x^4 + 5x^5$$

بالصورة العامة: $y = 5x^5 - 4x^4$

الحد الرئيسي: $5x^5$

الدرجة $n = 5$ فردية ، المعامل الرئيسي $a = 5 > 0$

عندما $x \to -\infty$ فإن $y \to -\infty$

عندما $x \to \infty$ فإن $y \to \infty$

∴ سلوك النهاية: إلى الأسفل من اليسار وإلى الأعلى من اليمين

البند (3-3) – العوامل الخطية لكثيرات الحدود

بند (3-3) ص 43 – تمرين (1) اكتب كل دالة كثيرة حدود في الصورة العامة واذكر درجتها .

$$y = (x+3)(x+4)(x+5)$$

الحل:

$$y = (x+3)(x+4)(x+5)$$

$$y = (x^2 + 4x + 3x + 12)(x+5)$$

$$y = (x^2 + 7x + 12)(x+5)$$

$$y = x^3 + 5x^2 + 7x^2 + 35x + 12x + 60$$

$$y = x^3 + 12x^2 + 47x + 60$$

∴ $y = x^3 + 12x^2 + 47x + 60$ ، درجتها 3

بند (3-3) ص 43 – تمرين (2) اكتب كل دالة كثيرة حدود في الصورة العامة واذكر درجتها .

$$y = (x-3)^2(x-1)$$

الحل:

$$y = (x-3)^2(x-1)$$

$$y = (x^2 - 6x + 9)(x-1)$$

$$y = x^3 - x^2 - 6x^2 + 6x + 9x - 9$$

$$y = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$$

∴ $y = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ ، درجتها 3

بند (3-3) ص 43 – تمرين (6) عين أصفار كل دالة وتكرارها .

$$y = (x-1)(x+2)$$

الحل:

$$(x-1)(x+2) = 0$$

$$x + 2 = 0 \text{ أو } x - 1 = 0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 1$$

العامل $(x-1)$ أسه 1 $\Rightarrow x = 1$ صفر بسيط (تكراره 1)

العامل $(x+2)$ أسه 1 $\Rightarrow x = -2$ صفر بسيط (تكراره 1)

∴ الأصفار: 1 (تكراره 1) ، -2 (تكراره 1)

بند (3-3) ص 43 – تمرين (7) عين أصفار كل دالة وتكرارها .

$$y = (x+3)^3$$

الحل:

$$(x+3)^3 = 0$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

العامل $(x+3)$ أسه 3 $\Rightarrow x = -3$ صفر مكرر ثلاث مرات

∴ الصفر: -3 (تكراره 3)

بند (3-3) ص 43 – تمرين (17) اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة مستخدماً الأصفار المعطاة:

$1\ ,-1$

الحل:

$$x=1 \text{ صفر } \Rightarrow (x-1) \text{ عامل}$$

$$x=-1 \text{ صفر } \Rightarrow (x+1) \text{ عامل}$$

$$f(x)=(x-1)(x+1)$$

$$f(x)=x^2+x-x-1$$

$$\therefore\ f(x)=x^2-1$$

بند (3-3) ص 43 – تمرين (20) اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة مستخدماً الأصفار المعطاة:

$2\ ,\ \frac{-1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}$ مكرر مرتين

الحل:

$$x=\frac{1}{2} \text{ صفر } \Rightarrow (2x-1) \text{ عامل}$$

$$x=-\frac{1}{2} \text{ صفر } \Rightarrow (2x+1) \text{ عامل}$$

$$x=2 \text{ صفر مكرر مرتين } \Rightarrow (x-2)^2 \text{ عامل}$$

$$f(x)=(2x-1)(2x+1)(x-2)^2$$

$$f(x)=(4x^2-1)(x^2-4x+4)$$

$$f(x)=4x^4-16x^3+16x^2-x^2+4x-4$$

$$\therefore\ f(x)=4x^4-16x^3+15x^2+4x-4$$

البند (3-4) – قسمة كثيرات الحدود

بند (3-4) ص 46 – تمرين (1) اقسم مستخدماً قسمة كثيرة الحدود المطولة:

$$(x^2 - 3x - 40) \div (x + 5)$$

الحل:

$$(x^2 - 3x - 40) \div (x + 5)$$

نقسم x^2 على x : x

$$x(x + 5) = x^2 + 5x$$

نطرح: $(x^2 - 3x - 40) - (x^2 + 5x) = -8x - 40$

نقسم $-8x$ على x : -8

$$-8(x + 5) = -8x - 40$$

نطرح: $(-8x - 40) - (-8x - 40) = 0$

$$x^2 - 3x - 40 = (x + 5)(x - 8)$$

∴ ناتج القسمة $= x - 8$ ، الباقي $= 0$

بند (3-4) ص 46 – تمرين (2) اقسم مستخدماً قسمة كثيرة الحدود المطولة:

$$(x^3 + 3x^2 - x + 2) \div (x - 1)$$

الحل:

$$(x^3 + 3x^2 - x + 2) \div (x - 1)$$

نقسم x^3 على x : x^2

$$x^2(x - 1) = x^3 - x^2$$

نطرح: $(x^3 + 3x^2 - x + 2) - (x^3 - x^2) = 4x^2 - x + 2$

نقسم $4x^2$ على x : $4x$

$$4x(x - 1) = 4x^2 - 4x$$

نطرح: $(4x^2 - x + 2) - (4x^2 - 4x) = 3x + 2$

نقسم $3x$ على x : 3

$$3(x - 1) = 3x - 3$$

نطرح: $(3x + 2) - (3x - 3) = 5$

$$x^3 + 3x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 + 4x + 3) + 5$$

∴ ناتج القسمة $= x^2 + 4x + 3$ ، الباقي $= 5$

بند (3-4) ص 46 – تمرين (5) بيّن ما إذا كانت كل ثنائية حد عاملاً من عوامل $x^3 + 4x^2 + x - 6$

$(x - 3)$

الحل:

نفرض $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

نستخدم القسمة التركيبية:

3	1	4	1	-6
		3	21	66
	1	7	22	60
	معاملات ناتج القسمة			الباقي

الباقي : 60

الباقي $= 60 \neq 0$

أو:

$f(3) = (3)^3 + 4(3)^2 + (3) - 6 = 27 + 36 + 3 - 6 = 60 \neq 0$

∴ $(x - 3)$ **ليس عاملاً من عوامل** $x^3 + 4x^2 + x - 6$

تذكر

باقي قسمة $f(x)$ على $(x - c)$ هو $f(c)$

إذا كان $f(c) = 0$ فإن $(x - c)$ عامل من عوامل $f(x)$

بند (3-4) ص 46 – تمرين (6) بيّن ما إذا كانت كل ثنائية حد عاملاً من عوامل $x^3 + 4x^2 + x - 6$

$(x + 2)$

الحل:

نفرض $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

نستخدم القسمة التركيبية:

تذكر

باقي قسمة $f(x)$ على $(x - c)$ هو $f(c)$

إذا كان $f(c) = 0$ فإن $(x - c)$ عامل من عوامل $f(x)$

	1	4	1	-6
-2		-2	-4	6
	1	2	-3	0
	معاملات ناتج القسمة			الباقي

الباقي : 0

الباقي $= 0$

أو:

$$f(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 + (-2) - 6 = -8 + 16 - 2 - 6 = 0$$

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x+2)(x^2 + 2x - 3)$$

$(x+2)$ عامل من عوامل $x^3 + 4x^2 + x - 6$ ∴

بند (3-4) ص 46 – تمرين (7) اقسم مستخدماً القسمة التركيبية:

$$(x^3 + 3x^2 - x - 3) \div (x - 1)$$

الحل:

$$(x^3 + 3x^2 - x - 3) \div (x - 1)$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

نستخدم القسمة التركيبية:

	1	3	-1	-3
1		1	4	3
	1	4	3	0
	معاملات ناتج القسمة			الباقي

الباقي : 0

∴ ناتج القسمة $= x^2 + 4x + 3$ ، الباقي $= 0$

بند (3-4) ص 46 – تمرين (8) اقسم مستخدماً القسمة التركيبية:

$$(-2x^3 + 5x^2 - x + 2) \div (x + 2)$$

الحل:

$$(-2x^3 + 5x^2 - x + 2) \div (x + 2)$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

نستخدم القسمة التركيبية:

-2	-2	5	-1	2
		4	-18	38
	-2	**9**	**-19**	**40**
		معاملات ناتج القسمة		الباقي

الباقي : 40

∴ ناتج القسمة $= -2x^2 + 9x - 19$ **، الباقي** $= 40$

بند (3-4) ص 46 – تمرين (11) اقسم مستخدماً القسمة التركيبية:

$$(2x^3 + 4x^2 - 10x - 9) \div (x - 3)$$

الحل:

$$(2x^3 + 4x^2 - 10x - 9) \div (x - 3)$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

نستخدم القسمة التركيبية:

3	2	4	-10	-9
		6	30	60
	2	**10**	**20**	**51**
		معاملات ناتج القسمة		الباقي

الباقي : 51

∴ ناتج القسمة $= 2x^2 + 10x + 20$ **، الباقي** $= 51$

بند (3-4) ص 47 – تمرين (12) استخدم القسمة التركيبية والعامل المعطى لتحليل كل دالة كثيرة حدود بالكامل:

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \ : \ x + 1$$

الحل:

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

نستخدم القسمة التركيبية:

	1	2	-5	-6
-1		-1	-1	6
	1	**1**	**-6**	**0**
	معاملات ناتج القسمة			الباقي

الباقي : 0

الباقي $= 0$ ، ناتج القسمة: $x^2 + x - 6$

$$y = (x + 1)(x^2 + x - 6)$$

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

$$\therefore\ y = (x + 1)(x + 3)(x - 2)$$

بند (3-4) ص 47 – تمرين (13) استخدم القسمة التركيبية والعامل المعطى لتحليل كل دالة كثيرة حدود بالكامل:

$$y = x^3 - 4x^2 - 9x + 36\ :\ x + 3$$

الحل:

$$y = x^3 - 4x^2 - 9x + 36$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

نستخدم القسمة التركيبية:

	1	-4	-9	36
-3		-3	21	-36
	1	**-7**	**12**	**0**
	معاملات ناتج القسمة			الباقي

الباقي : 0

الباقي $= 0$ ، ناتج القسمة: $x^2 - 7x + 12$

$$y = (x + 3)(x^2 - 7x + 12)$$

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

$$\therefore\ y = (x + 3)(x - 3)(x - 4)$$

بند (3-4) ص 47 – تمرين (15) استخدم القسمة التركيبية ونظرية الباقي لإيجاد عوامل كثيرة الحدود

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 8x - 6 \ : \ a = -2$$

الحل:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 8x - 6$$

$$x = a = -2$$

نستخدم القسمة التركيبية:

	1	4	-8	-6
-2		-2	-4	24
	1	**2**	**-12**	**18**
	معاملات ناتج القسمة			الباقي

الباقي : 18

$$\text{الباقي} = 18$$

التحقق بنظرية الباقي:

$$f(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 - 8(-2) - 6$$

$$f(-2) = -8 + 16 + 16 - 6 = 18$$

$$f(-2) \neq 0$$

$\therefore f(-2) = 18$، و $(x+2)$ ليس عاملاً من عوامل $f(x)$

تذكر

باقي قسمة $f(x)$ على $(x-a)$ هو $f(a)$

بند (3-4) ص 47 – تمرين (16) استخدم القسمة التركيبية ونظرية الباقي لإيجاد عوامل كثيرة الحدود

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9 \ : \ a = 3$$

الحل:

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$$

$$x = a = 3$$

نستخدم القسمة التركيبية:

تذكر

باقي قسمة $f(x)$ على $(x-a)$ هو $f(a)$

إذا كان $f(a) = 0$ فإن $(x-a)$ عامل من عوامل $f(x)$

	1	-7	15	-9
3		3	-12	9
	1	-4	3	0
	معاملات ناتج القسمة			الباقي

الباقي : 0

$$\text{الباقي} = 0$$

التحقق بنظرية الباقي:

$$f(3) = (3)^3 - 7(3)^2 + 15(3) - 9$$

$$f(3) = 27 - 63 + 45 - 9 = 0$$

$$\therefore (x-3) \text{ عامل من عوامل } f(x)$$

$$f(x) = (x-3)(x^2 - 4x + 3)$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$$

$$\therefore f(3) = 0 \; , \; f(x) = (x-3)^2(x-1)$$

البند (3-5) – حل معادلات كثيرات الحدود

بند (3-5) ص 49 – تمرين (1) حل كل معادلة مما يلي وقرب إجابتك لأقرب جزء من مئة عندما يكون ذلك ضرورياً:

$$6y^2 = 48y$$

الحل:

$$6y^2 = 48y$$

$$6y^2 - 48y = 0$$

$$6y(y-8) = 0$$

$$6y = 0 \text{ أو } y - 8 = 0$$

$$y = 0 \text{ أو } y = 8$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{0 \, , 8\}$$

بند (3-5) ص 49 – تمرين (2) حل كل معادلة مما يلي وقرب إجابتك لأقرب جزء من مئة عندما يكون ذلك ضرورياً:

$$3x^3 - 6x^2 - 9x = 0$$

الحل:

$$3x^3 - 6x^2 - 9x = 0$$

$$3x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$3x(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ أو } x - 3 = 0 \text{ أو } 3x = 0$$

$$x = -1 \text{ أو } x = 3 \text{ أو } x = 0$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{-1 , 0 , 3\}$$

بند (3-5) ص 49 – تمرين (3) حل كل معادلة مما يلي وقرب إجابتك لأقرب جزء من مئة عندما يكون ذلك ضرورياً:

$$12x^3 - 60x^2 + 75x = 0$$

الحل:

$$12x^3 - 60x^2 + 75x = 0$$

$$3x(4x^2 - 20x + 25) = 0$$

$$3x(2x - 5)^2 = 0$$

$$(2x - 5)^2 = 0 \text{ أو } 3x = 0$$

$$x = \frac{5}{2} \text{ (مكرر مرتين) أو } x = 0$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{0 , \frac{5}{2}\}$$

بند (3-5) ص 49 – تمرين (4) حل كل معادلة مما يلي وقرب إجابتك لأقرب جزء من مئة عندما يكون ذلك ضرورياً:

$$4x^3 = 4x^2 + 3x$$

الحل:

$$4x^3 = 4x^2 + 3x$$

$$4x^3 - 4x^2 - 3x = 0$$

$$x(4x^2 - 4x - 3) = 0$$

$$x(2x - 3)(2x + 1) = 0$$

$$2x + 1 = 0 \text{ أو } 2x - 3 = 0 \text{ أو } x = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ أو } x = \frac{3}{2} \text{ أو } x = 0$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\}$$

بند (3-5) ص 49 – تمرين (5) حل كل معادلة مما يلي وقرب إجابتك لأقرب جزء من مئة عندما يكون ذلك ضرورياً:

$$2a^4 - 5a^3 - 3a^2 = 0$$

الحل:

$$2a^4 - 5a^3 - 3a^2 = 0$$

$$a^2(2a^2 - 5a - 3) = 0$$

$$a^2(2a + 1)(a - 3) = 0$$

$$a - 3 = 0 \text{ أو } 2a + 1 = 0 \text{ أو } a^2 = 0$$

$$a = 3 \text{ أو } a = -\frac{1}{2} \text{ أو } a = 0$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{-\frac{1}{2}, 0, 3\}$$

بند (3-5) ص 49 – تمرين (13) استخدم الأصفار النسبية الممكنة لحل المعادلات التالية:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 = 4x^2 + 8x + 4$$

الحل:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$$

p : عوامل الحد الثابت -4 : $\pm1 \, , \pm2 \, , \pm4$

q : عوامل المعامل الرئيسي 1 : ±1

الأصفار النسبية الممكنة $\frac{p}{q}$: $\pm1 \, , \pm2 \, , \pm4$

$$P(2) = (2)^4 + 2(2)^3 - 3(2)^2 - 8(2) - 4 = 16 + 16 - 12 - 16 - 4 = 0$$

$\therefore$ 2 صفر للدالة ، $(x - 2)$ عامل من عواملها

نستخدم القسمة التركيبية:

2	1	2	-3	-8	-4
		2	8	10	4
	1	**4**	**5**	**2**	**0**
		معاملات ناتج القسمة			الباقي

الباقي : 0

$$P(x) = (x - 2)(x^3 + 4x^2 + 5x + 2)$$

$$P(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 8(-1) - 4 = 1 - 2 - 3 + 8 - 4 = 0$$

$\therefore$ -1 صفر للدالة ، $(x + 1)$ عامل من عواملها

نقسم خارج القسمة على $(x + 1)$:

-1	1	4	5	2
		-1	-3	-2
	1	**3**	**2**	**0**
	معاملات ناتج القسمة			الباقي

الباقي : 0

$$P(x) = (x - 2)(x + 1)(x^2 + 3x + 2)$$

$$P(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 1)(x + 2) = 0$$

$x = -2$ أو $x = -1$ أو $x = 2$

$\therefore$ **مجموعة الحل** $= \{-2 \, , -1 \, , 2\}$

بند (3-5) ص 49 – تمرين (14) استخدم الأصفار النسبية الممكنة لحل المعادلات التالية:

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

الحل:

$$P(x) = x^3 - 3x + 2$$

p : عوامل الحد الثابت 2 : $\pm 1 \, , \pm 2$

q : عوامل المعامل الرئيسي 1 : ± 1

الأصفار النسبية الممكنة $\frac{p}{q}$: $\pm 1 \, , \pm 2$

$$P(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

$\therefore 1$ صفر للدالة ، $(x - 1)$ عامل من عواملها

نستخدم القسمة التركيبية:

1	1	0	-3	2
		1	1	-2
	1	1	-2	0
		معاملات ناتج القسمة		الباقي

الباقي : 0

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 2)$$

$$(x - 1)(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 1$$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{-2 \, , 1\}$

بند (3-5) ص 49 – تمرين (15) استخدم الأصفار النسبية الممكنة لحل المعادلات التالية:

$$x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$$

الحل:

$$P(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$$

p : عوامل الحد الثابت -12 : $\pm 1 \, , \pm 2 \, , \pm 3 \, , \pm 4 \, , \pm 6 \, , \pm 12$

q : عوامل المعامل الرئيسي 1 : ± 1

الأصفار النسبية الممكنة $\frac{p}{q}$: $\pm 1 \, , \pm 2 \, , \pm 3 \, , \pm 4 \, , \pm 6 \, , \pm 12$

$$P(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 8(-2) - 12 = -8 + 4 + 16 - 12 = 0$$

$\therefore -2$ صفر للدالة ، $(x+2)$ عامل من عواملها

نستخدم القسمة التركيبية:

-2	1	1	-8	-12
		-2	2	12
	1	**-1**	**-6**	**0**
	معاملات ناتج القسمة			الباقي

الباقي : 0

$$P(x) = (x+2)(x^2 - x - 6)$$

$$(x+2)(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = 3 \text{ أو } x = -2$$

$$\therefore \textbf{مجموعة الحل} = \{-2\ , 3\}$$

بند (3-5) ص 49 – تمرين (17) استخدم الأصفار النسبية الممكنة لحل المعادلات التالية:

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = 0$$

الحل:

$$P(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$$

p : عوامل الحد الثابت 8 : $\pm 1\ , \pm 2\ , \pm 4\ , \pm 8$

q : عوامل المعامل الرئيسي 1 : ± 1

الأصفار النسبية الممكنة $\frac{p}{q}$: $\pm 1\ , \pm 2\ , \pm 4\ , \pm 8$

$$P(1) = (1)^4 + (1)^3 - 6(1)^2 - 4(1) + 8 = 1 + 1 - 6 - 4 + 8 = 0$$

$\therefore 1$ صفر للدالة ، $(x-1)$ عامل من عواملها

نستخدم القسمة التركيبية:

1	1	1	-6	-4	8
		1	2	-4	-8
	1	**2**	**-4**	**-8**	**0**
	معاملات ناتج القسمة				الباقي

الباقي : 0

$$P(x) = (x-1)(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$$

$$P(2) = (2)^4 + (2)^3 - 6(2)^2 - 4(2) + 8 = 16 + 8 - 24 - 8 + 8 = 0$$

$\therefore 2$ صفر للدالة ، $(x-2)$ عامل من عواملها

نقسم خارج القسمة على $(x-2)$:

2	1	2	-4	-8
		2	8	8
	1	**4**	**4**	**0**
	معاملات ناتج القسمة			الباقي

الباقي : 0

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x^2+4x+4)$$

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x+2)^2 = 0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2 \text{ أو } x = 1$$

$\therefore$ **مجموعة الحل** $= \{-2\ ,\ 1\ ,\ 2\}$

البند (1-4) – استكشاف النماذج الأسية

بند (1-4) ص 54 – تمرين (8) مثّل كل دالة بيانياً ، ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نمواً أسياً أو تضاؤلاً أسياً محدداً العامل:

$$y = 2^x$$

الحل:

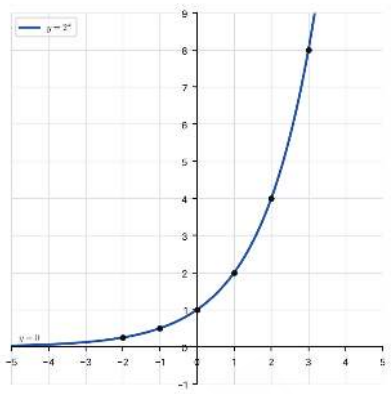
$$y = 2^x$$

$$a = 1\ ,\ b = 2$$

جدول القيم:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$b = 2 > 1$ ، الدالة متزايدة



∴ الدالة تمثل نمواً أسياً ، عامل النمو $= 2$

البند (2-4) – الدالة الأسية وتمثيلها البياني

بند (2-4) ص 57 – تمرين (1) مثّل بيانياً كلاً من الدوال الأسية التالية:

$$y = 4^x$$

الحل:

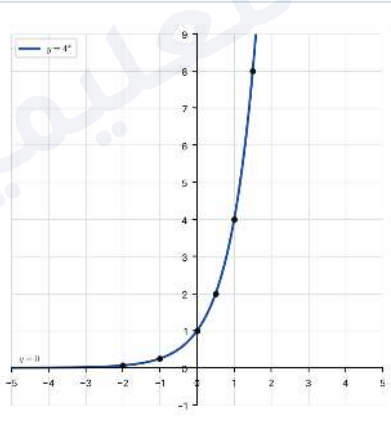
$$y = 4^x$$

$a = 1\ ,\ b = 4 > 1$ (نمو أسي)

جدول القيم:

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	2	4	8

خط التقارب الأفقي: $y = 0$



∴ المجال $= \mathbb{R}$ ، المدى $= (0, \infty)$

بند (2-4) ص 57 – تمرين (3) مثّل بيانياً كلاً من الدوال الأسية التالية:

$$y = 2^{-x}$$

الحل:

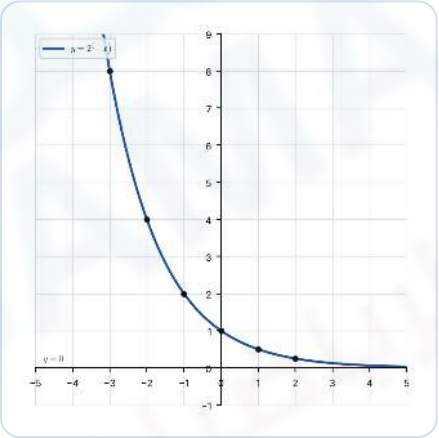
$$y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$$

$$a = 1 \ , \ 0 < b = \frac{1}{2} < 1 \text{ (تضاؤل أسي)}$$

جدول القيم:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

خط التقارب الأفقي: $y = 0$



$\therefore$ **المجال** $= \mathbb{R}$ ، **المدى** $= (0, \infty)$

بند (2-4) ص 57 – تمرين (5) مثّل بيانياً كلاً من الدوال الأسية التالية مستخدماً دالة المرجع:

$$y = 5^{x} - 1$$

الحل:

$$y = 5^{x} - 1$$

دالة المرجع: $y = 5^{x}$

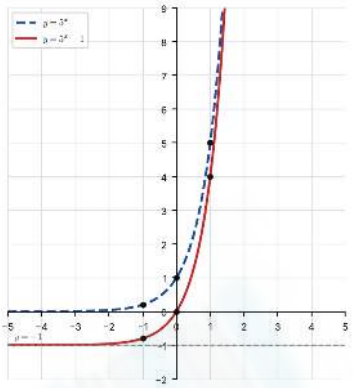
$$h = 0 \ , \ \ k = -1$$

جدول قيم دالة المرجع:

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{5}$	1	5

نقاط الدالة بعد الانسحاب: $(-1, -\frac{4}{5})$, $(0, 0)$, $(1, 4)$

خط التقارب الأفقي: $y = -1$



∴ بيان $y = 5^x - 1$ هو انسحاب بيان دالة المرجع وحدة واحدة للأسفل ، المجال $= \mathbb{R}$ ، المدى $= (-1, \infty)$

بند (2-4) ص 57 – تمرين (6) مثّل بيانياً كلاً من الدوال الأسية التالية مستخدماً دالة المرجع:

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$$

الحل:

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$$

دالة المرجع: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

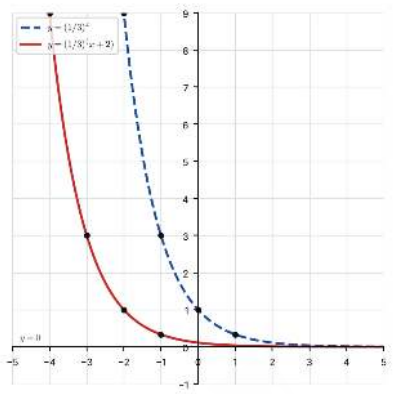
$h = -2$, $k = 0$

جدول قيم دالة المرجع:

x	-2	-1	0	1
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$

نقاط الدالة بعد الانسحاب: $(-1, \frac{1}{3})$, $(-2, 1)$, $(-3, 3)$, $(-4, 9)$

خط التقارب الأفقي: $y = 0$



∴ بيان $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ هو انسحاب بيان دالة المرجع وحدتين لليسار، المجال $= \mathbb{R}$ ، المدى $= (0, \infty)$

بند (2-4) ص 57 – تمرين (9) استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد ناتج كل مقدار مقرباً الناتج إلى أربعة أرقام عشرية:

e^3

الحل:

$$e^3$$

$$e^3 \approx 20.08553692$$

بند (2-4) ص 57 – تمرين (10) استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد ناتج كل مقدار مقرباً الناتج إلى أربعة أرقام عشرية:

$5e^6$

الحل:

$$5e^6$$

$$5e^6 = 5 \times 403.4287935 \approx 2017.143967$$

$$\therefore 5e^6 \approx 2017.1440$$

بند (2-4) ص 57 – تمرين (11) استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد ناتج كل مقدار مقرباً الناتج إلى أربعة أرقام عشرية:

$$\left(\frac{5}{4}\right) e^{\frac{1}{2}}$$

الحل:

$$\left(\frac{5}{4}\right) e^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right) e^{\frac{1}{2}} = 1.25 \times 1.648721271 \approx 2.060901588$$

$$\therefore \left(\frac{5}{4}\right) e^{\frac{1}{2}} \approx 2.0609$$

بند (2-4) ص 57 – تمرين (12) استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد ناتج كل مقدار مقرباً الناتج إلى أربعة أرقام عشرية:

$$\frac{4}{e^6}$$

الحل:

$$\frac{4}{e^6}$$

$$\frac{4}{e^6} = \frac{4}{403.4287935} \approx 0.009915009$$

$$\therefore \frac{4}{e^6} \approx 0.0099$$

بند (2-4) ص 57 – تمرين (13) استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد ناتج كل مقدار مقرباً الناتج إلى أربعة أرقام عشرية:

$$e^e$$

الحل:

$$e^e$$

$$e^e \approx 15.15426224$$

$$\therefore e^e \approx 15.1543$$

البند (3-4) – الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانياً

بند (3-4) ص 59 – تمرين (1) اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

$$4^2 = 16$$

الحل:

$$4^2 = 16$$

الأساس $b = 4$ ، الأس $y = 2$ ، $x = 16$

$$\therefore \log_4 16 = 2$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0 \, , \, b \neq 1 \, , \, x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (2) اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

$$7^3 = 343$$

الحل:

$$7^3 = 343$$

الأساس $b = 7$ ، الأس $y = 3$ ، $x = 343$

$$\therefore \log_7 343 = 3$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0 \, , \, b \neq 1 \, , \, x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (3) اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

الحل:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

الأساس $b = \frac{1}{2}$ ، الأس $y = -2$ ، $x = 4$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0 \, , \, b \neq 1 \, , \, x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (4) اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

الحل:

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

الأساس $b = 8$ ، الأس $y = -\frac{2}{3}$ ، $x = \frac{1}{4}$

$$\therefore \log_8 \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0 \, , \, b \neq 1 \, , \, x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (5) اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

الحل:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

الأساس $b = \frac{1}{3}$ ، الأس $y = 3$ ، $x = \frac{1}{27}$

$$\therefore \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0 \, , \, b \neq 1 \, , \, x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (6) اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

$$10^{-2} = 0.01$$

الحل:

$$10^{-2} = 0.01$$

الأساس $b = 10$ ، الأس $y = -2$ ، $x = 0.01$

$$\therefore \log 0.01 = -2$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0 \, , \, b \neq 1 \, , \, x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (7) اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

$$6^{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{6}$$

الحل:

$$6^{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{6}$$

الأساس $b = 6$ ، الأس $y = \frac{3}{2}$ ، $x = 6\sqrt{6}$

$$\therefore \log_6 6\sqrt{6} = \frac{3}{2}$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0 \, , \, b \neq 1 \, , \, x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (8) اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

$$5^{-3} = \frac{1}{125}$$

الحل:

$$5^{-3} = \frac{1}{125}$$

الأساس $b = 5$ ، الأس $y = -3$ ، $x = \frac{1}{125}$

$$\therefore \log_5 \frac{1}{125} = -3$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0 \, , \, b \neq 1 \, , \, x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (9) اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة الأسية:

$$\log_2 128 = 7$$

الحل:

$$\log_2 128 = 7$$

$$\therefore 2^7 = 128$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0 \, , \, b \neq 1 \, , \, x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (10) اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة الأسية:

$$\log_4 64 = 3$$

الحل:

$$\log_4 64 = 3$$

$$\therefore 4^3 = 64$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0 \, , \, b \neq 1 \, , \, x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (11) اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة الأسية:

$$\log_{10} 100 = 2$$

الحل:

$$\log_{10} 100 = 2$$

$$\therefore 10^2 = 100$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0 \, , \, b \neq 1 \, , \, x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (12) اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة الأسية:

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2$$

الحل:

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2$$

$$\therefore\ 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

تذكر

$$b^y = x \ \Leftrightarrow\ \log_b x = y$$

$$b > 0\ ,\ b \neq 1\ ,\ x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (13) اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة الأسية:

$$\log_{10} 0.0001 = -4$$

الحل:

$$\log_{10} 0.0001 = -4$$

$$\therefore\ 10^{-4} = 0.0001$$

تذكر

$$b^y = x \ \Leftrightarrow\ \log_b x = y$$

$$b > 0\ ,\ b \neq 1\ ,\ x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (14) اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة الأسية:

$$\log_3 \frac{1}{243} = -5$$

الحل:

$$\log_3 \frac{1}{243} = -5$$

$$\therefore\ 3^{-5} = \frac{1}{243}$$

تذكر

$$b^y = x \ \Leftrightarrow\ \log_b x = y$$

$$b > 0\ ,\ b \neq 1\ ,\ x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (15) أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log_2 4$$

الحل:

نفرض $\log_2 4 = y$

$$2^y = 4$$

$$2^y = 2^2$$

$$y = 2$$

$$\therefore\ \log_2 4 = 2$$

تذكر

$$b^y = x \ \Leftrightarrow\ \log_b x = y$$

$$b > 0\ ,\ b \neq 1\ ,\ x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (16) أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log_2 8$$

الحل:

نفرض $\log_2 8 = y$

$$2^y = 8$$

$$2^y = 2^3$$

$$y = 3$$

$$\therefore \log_2 8 = 3$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0\ ,\ b \neq 1\ ,\ x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (17) أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log_8 8$$

الحل:

نفرض $\log_8 8 = y$

$$8^y = 8$$

$$8^y = 8^1$$

$$y = 1$$

$$\therefore \log_8 8 = 1$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0\ ,\ b \neq 1\ ,\ x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (18) أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log_2 2^5$$

الحل:

نفرض $\log_2 2^5 = y$

$$2^y = 2^5$$

$$y = 5$$

$$\therefore \log_2 2^5 = 5$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0\ ,\ b \neq 1\ ,\ x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (19) أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

الحل:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = y \quad \text{نفرض}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$y = 1$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0 \, , \, b \neq 1 \, , \, x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (20) أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log 0.01$$

الحل:

$$\log 0.01 = y \quad \text{نفرض}$$

$$10^y = 0.01$$

$$10^y = 10^{-2}$$

$$y = -2$$

$$\therefore \log 0.01 = -2$$

تذكر

$$b^y = x \Leftrightarrow \log_b x = y$$

$$b > 0 \, , \, b \neq 1 \, , \, x > 0$$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (21) أوجد مجال التعريف لكل دالة مما يلي:

$$y = \log_6(x + 1)$$

الحل:

$$y = \log_6(x + 1)$$

$$x + 1 > 0$$

$$x > -1$$

$$\therefore \text{مجال الدالة} = (-1, \infty)$$

شرط الحل

شرط التعريف: $x + 1 > 0$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (22) أوجد مجال التعريف لكل دالة مما يلي:

$$y = \log_8(x) - 2$$

الحل:

$$y = \log_8(x) - 2$$

$$x > 0$$

$$\therefore \text{مجال الدالة} = (0, \infty)$$

شرط الحل

شرط التعريف: $x > 0$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (23) أوجد مجال التعريف لكل دالة مما يلي:

$$y = \log(x^2 - 4)$$

الحل:

$$y = \log(x^2 - 4)$$

$$x^2 - 4 > 0$$

المعادلة المناظرة: $x^2 - 4 = 0$

$$(x + 2)(x - 2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ أو } x + 2 = 0$$

$$x = 2 \text{ أو } x = -2$$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $(x + 2)(x - 2) > 0$ نتبع التالي:

$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$ | $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$ | $x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x + 2$	$-$	0	$+$		$+$
$x - 2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x + 2)(x - 2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\therefore \text{مجال الدالة} = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

شرط الحل

شرط التعريف: $x^2 - 4 > 0$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (26) مثّل بيانياً كل دالة لوغاريتمية معيناً المجال والمدى:

$$y = \log_3(x)$$

الحل:

معكوس الدالة $y = \log_3 x$ هو $y = 3^x$

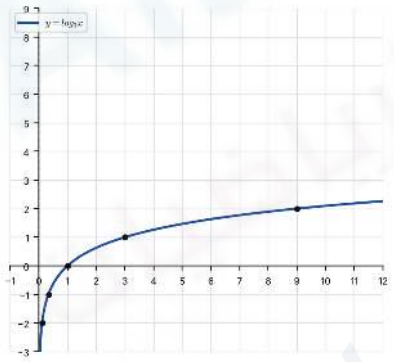
جدول قيم الدالة $y = 3^x$:

2	1	0	-1	-2	x
9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	y

نبدّل x مع y في جدول القيم:

9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	x
2	1	0	-1	-2	y

خط التقارب الرأسي: $x = 0$



∴ **المجال** $= (0, \infty)$ ، **المدى** $= \mathbb{R}$

بند (3-4) ص 59 – تمرين (27) مثّل بيانياً كل دالة لوغاريتمية معيناً المجال والمدى:

$$y = \log_3(x-1) + 2$$

الحل:

$$y = \log_3(x-1) + 2$$

دالة المرجع: $y = \log_3 x$

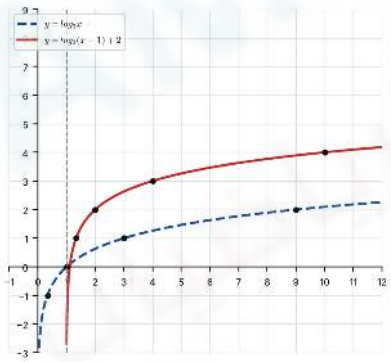
$$h = 1 \ , \ k = 2$$

جدول قيم دالة المرجع:

9	3	1	$\frac{1}{3}$	x
2	1	0	-1	y

نقاط الدالة بعد الانسحاب: $(10,4)$, $(4,3)$, $(2,2)$, $(\frac{4}{3},1)$

خط التقارب الرأسي: $x = 1$



∴ بيان الدالة هو انسحاب بيان دالة المرجع وحدة لليمين ووحدتين للأعلى ، المجال $= (1,\infty)$ ، المدى $= \mathbb{R}$

البند (4-4) – خواص اللوغاريتمات

بند (4-4) ص 62 – تمرين (1) اكتب كل مقدار لوغاريتمي في صورة لوغاريتم واحد:

$$\log 7 + \log 2$$

الحل:

$$\log 7 + \log 2$$
$$= \log(7 \times 2)$$
$$\log 7 + \log 2 = \log 14 \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (2) اكتب كل مقدار لوغاريتمي في صورة لوغاريتم واحد:

$$\frac{1}{2}\log_4 y - \log_4 x\ ,\ (x > 0\ , y > 0)$$

الحل:

$$\frac{1}{2}\log_4 y - \log_4 x$$
$$= \log_4 y^{\frac{1}{2}} - \log_4 x$$
$$= \log_4 \sqrt{y} - \log_4 x$$
$$\frac{1}{2}\log_4 y - \log_4 x = \log_4 \frac{\sqrt{y}}{x} \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (3) اكتب كل مقدار لوغاريتمي في صورة لوغاريتم واحد:

$$4\log M - \log N\ ,\ (M > 0\ , N > 0)$$

الحل:

$$4\log M - \log N$$
$$= \log M^4 - \log N$$
$$4\log M - \log N = \log \frac{M^4}{N} \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (4) اكتب كل مقدار لوغاريتمي في صورة لوغاريتم واحد:

$$\log x + \log y + \log z \ , \ (x > 0 \ , y > 0 \ , z > 0)$$

الحل:

$$\log x + \log y + \log z$$
$$= \log(x \cdot y \cdot z)$$
$$\log x + \log y + \log z = \log xyz \ \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (5) اكتب كل مقدار لوغاريتمي في صورة لوغاريتم واحد:

$$\log \frac{a}{4} + \log \frac{b}{3} - \log \frac{c}{2} \ , \ (a > 0 \ , b > 0 \ , c > 0)$$

الحل:

$$\log \frac{a}{4} + \log \frac{b}{3} - \log \frac{c}{2}$$
$$= \log \left(\frac{a}{4} \times \frac{b}{3} \right) - \log \frac{c}{2}$$
$$= \log \frac{ab}{12} - \log \frac{c}{2}$$
$$= \log \left(\frac{ab}{12} \div \frac{c}{2} \right)$$
$$= \log \left(\frac{ab}{12} \times \frac{2}{c} \right)$$
$$\log \frac{a}{4} + \log \frac{b}{3} - \log \frac{c}{2} = \log \frac{ab}{6c} \ \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (6) اكتب كل مقدار لوغاريتمي في صورة لوغاريتم واحد:

$$\log a + 3 \log b \ , \ (a > 0 \ , b > 0)$$

الحل:

$$\log a + 3 \log b$$
$$= \log a + \log b^3$$
$$\log a + 3 \log b = \log ab^3 \ \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (7) اكتب كل مقدار لوغاريتمي في صورة لوغاريتم واحد:

$$\frac{1}{2}(\log_7 x + \log_7 y) - 3\log_7 a\ ,\ (x>0\ , y>0\ , a>0)$$

الحل:

$$\frac{1}{2}(\log_7 x + \log_7 y) - 3\log_7 a$$
$$= \frac{1}{2}\log_7 xy - 3\log_7 a$$
$$= \log_7 (xy)^{\frac{1}{2}} - \log_7 a^3$$
$$= \log_7 \sqrt{xy} - \log_7 a^3$$

$$\frac{1}{2}(\log_7 x + \log_7 y) - 3\log_7 a = \log_7 \frac{\sqrt{xy}}{a^3}\ \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k\log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (8) اكتب كل مقدار لوغاريتمي في صورة لوغاريتم واحد:

$$7\log r - \log x + \log n\ ,\ (r>0\ , x>0\ , n>0)$$

الحل:

$$7\log r - \log x + \log n$$
$$= \log r^7 - \log x + \log n$$
$$= \log \frac{r^7}{x} + \log n$$

$$7\log r - \log x + \log n = \log \frac{nr^7}{x}\ \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k\log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (9) أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log_5 \frac{y}{x}\ ,\ (x>0\ , y>0)$$

الحل:

$$\log_5 \frac{y}{x}$$

$$\log_5 \frac{y}{x} = \log_5 y - \log_5 x\ \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k\log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (10) أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log x^3 + y^3 \ , \ (x > 0 \ , y > 0)$$

الحل:

$$\log x^3 + y^3$$
$$= 3 \log x + y^3$$
$$\log x^3 + y^3 = 3 \log x + y^3 \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (11) أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log_3 7(2x-3)^2 \ , \ \left(x > \frac{3}{2}\right)$$

الحل:

$$\log_3 7(2x-3)^2$$
$$= \log_3 7 + \log_3 (2x-3)^2$$
$$\log_3 7(2x-3)^2 = \log_3 7 + 2 \log_3 (2x-3) \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (12) أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log \frac{a^2 b^3}{c^4} \ , \ (a > 0 \ , b > 0 \ , c > 0)$$

الحل:

$$\log \frac{a^2 b^3}{c^4}$$
$$= \log a^2 b^3 - \log c^4$$
$$= \log a^2 + \log b^3 - \log c^4$$
$$\log \frac{a^2 b^3}{c^4} = 2 \log a + 3 \log b - 4 \log c \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (13) أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log 3M^4N^{-2}\ ,\ (M>0\ ,N>0)$$

الحل:

$$\log 3M^4N^{-2}$$
$$= \log 3 + \log M^4 + \log N^{-2}$$
$$\log 3M^4N^{-2} = \log 3 + 4\log M - 2\log N\ \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k\log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (14) أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log_4 5\sqrt{x}\ ,\ (x>0)$$

الحل:

$$\log_4 5\sqrt{x}$$
$$= \log_4 5 + \log_4 \sqrt{x}$$
$$= \log_4 5 + \log_4 x^{\frac{1}{2}}$$
$$\log_4 5\sqrt{x} = \log_4 5 + \frac{1}{2}\log_4 x\ \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k\log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (15) أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log\left(2(x+1)\right)^3\ ,\ (x>-1)$$

الحل:

$$\log\left(2(x+1)\right)^3$$
$$= 3\log 2(x+1)$$
$$= 3\left(\log 2 + \log(x+1)\right)$$
$$\log\left(2(x+1)\right)^3 = 3\log 2 + 3\log(x+1)\ \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k\log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (16) أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log \sqrt{\frac{2x}{y}} \ , \ (x > 0 \ , y > 0)$$

الحل:

$$\log \sqrt{\frac{2x}{y}}$$
$$= \log \left(\frac{2x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2} \log \frac{2x}{y}$$
$$= \frac{1}{2} (\log 2x - \log y)$$
$$= \frac{1}{2} (\log 2 + \log x - \log y)$$

$$\log \sqrt{\frac{2x}{y}} = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2} \log y \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (19) استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار:

$$\log_2 4 - \log_2 16$$

الحل:

$$\log_2 4 - \log_2 16$$
$$= \log_2 \frac{4}{16}$$
$$= \log_2 \frac{1}{4}$$
$$= \log_2 2^{-2}$$
$$= -2 \log_2 2$$

$$\log_2 4 - \log_2 16 = -2 \therefore$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (20) استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار:

$$\log_5 5 - \log_5 125$$

الحل:

$$\log_5 5 - \log_5 125$$
$$= \log_5 \frac{5}{125}$$
$$= \log_5 \frac{1}{25}$$
$$= \log_5 5^{-2}$$
$$= -2 \log_5 5$$

$$\therefore \log_5 5 - \log_5 125 = -2$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (21) استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار:

$$3 \log_2 2 - \log_2 4$$

الحل:

$$3 \log_2 2 - \log_2 4$$
$$= \log_2 2^3 - \log_2 4$$
$$= \log_2 \frac{8}{4}$$
$$= \log_2 2$$

$$\therefore 3 \log_2 2 - \log_2 4 = 1$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (22) استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار:

$$\log 1 + \log 100$$

الحل:

$$\log 1 + \log 100$$
$$= \log(1 \times 100)$$
$$= \log 10^2$$
$$= 2 \log 10$$

$$\therefore \log 1 + \log 100 = 2$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (21) استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار:

$$\log 5 + \log 8 - 2\log 2$$

الحل:

$$\log 5 + \log 8 - 2\log 2$$
$$= \log 5 + \log 8 - \log 2^2$$
$$= \log \frac{5 \times 8}{4}$$
$$= \log 10$$

$$\therefore \log 5 + \log 8 - 2\log 2 = 1$$

تذكر

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^k = k \log_b m$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (24) لنفرض: $\log 6 \simeq 0.7782$ ، $\log 5 \simeq 0.6990$ ، $\log 4 \simeq 0.6021$

استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار. قرب إلى أقرب جزء من ألف.

$$\log 20$$

الحل:

$$\log 20 = \log(4 \times 5)$$
$$= \log 4 + \log 5$$
$$\simeq 0.6021 + 0.6990$$
$$\simeq 1.3011$$

$$\therefore \log 20 \simeq 1.301$$

المعطيات

$$\log 4 \simeq 0.6021$$
$$\log 5 \simeq 0.6990$$
$$\log 6 \simeq 0.7782$$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (25) لنفرض: $\log 6 \simeq 0.7782$ ، $\log 5 \simeq 0.6990$ ، $\log 4 \simeq 0.6021$

استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار. قرب إلى أقرب جزء من ألف.

$$\log 16$$

الحل:

$$\log 16 = \log 4^2$$
$$= 2\log 4$$
$$\simeq 2(0.6021)$$
$$\simeq 1.2042$$

المعطيات

$$\log 4 \simeq 0.6021$$
$$\log 5 \simeq 0.6990$$
$$\log 6 \simeq 0.7782$$

$\log 16 \simeq 1.204 \therefore$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (26) لنفرض: $\log 6 \simeq 0.7782$, $\log 5 \simeq 0.6990$, $\log 4 \simeq 0.6021$

استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار. قرب إلى أقرب جزء من ألف.

$\log 1.25$

الحل:

$$\log 1.25 = \log \frac{5}{4}$$
$$= \log 5 - \log 4$$
$$\simeq 0.6990 - 0.6021$$
$$\simeq 0.0969$$

$\log 1.25 \simeq 0.097 \therefore$

المعطيات

$\log 4 \simeq 0.6021$

$\log 5 \simeq 0.6990$

$\log 6 \simeq 0.7782$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (27) لنفرض: $\log 6 \simeq 0.7782$, $\log 5 \simeq 0.6990$, $\log 4 \simeq 0.6021$

استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار. قرب إلى أقرب جزء من ألف.

$\log 125$

الحل:

$$\log 125 = \log 5^3$$
$$= 3 \log 5$$
$$\simeq 3(0.6990)$$
$$\simeq 2.0970$$

$\log 125 \simeq 2.097 \therefore$

المعطيات

$\log 4 \simeq 0.6021$

$\log 5 \simeq 0.6990$

$\log 6 \simeq 0.7782$

بند (4-4) ص 62 – تمرين (28) لنفرض: $\log 6 \simeq 0.7782$, $\log 5 \simeq 0.6990$, $\log 4 \simeq 0.6021$

استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار. قرب إلى أقرب جزء من ألف.

$$\log \frac{1}{36}$$

الحل:

$$\log \frac{1}{36} = \log 1 - \log 36$$
$$= 0 - \log 6^2$$
$$= -2 \log 6$$
$$\simeq -2(0.7782)$$
$$\simeq -1.5564$$

$$\therefore \log \frac{1}{36} \simeq -1.556$$

المعطيات

$\log 4 \simeq 0.6021$

$\log 5 \simeq 0.6990$

$\log 6 \simeq 0.7782$

البند (4-5) – المعادلات الأسية واللوغاريتمية

بند (4-5) ص 65 – تمرين (2) حل كل معادلة مما يلي. اختبر صحة كل حل:

$$12^{y-2} = 20$$

الحل:

$$12^{y-2} = 20$$

بأخذ log للطرفين:

$$\log 12^{y-2} = \log 20$$
$$(y-2) \log 12 = \log 20$$
$$y - 2 = \frac{\log 20}{\log 12}$$
$$y = 2 + \frac{\log 20}{\log 12}$$
$$y \approx 2 + 1.2056 \approx 3.206$$

التحقق: $12^{3.206-2} = 12^{1.206} \approx 20$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \left\{2 + \frac{\log 20}{\log 12}\right\} \approx \{3.206\}$$

بند (4-5) ص 65 – تمرين (3) حل كل معادلة مما يلي. اختبر صحة كل حل:

$$5 - 3^x = -40$$

الحل:

$$5 - 3^x = -40$$

$$-3^x = -45$$

$$3^x = 45$$

بأخذ log للطرفين:

$$\log 3^x = \log 45$$

$$x \log 3 = \log 45$$

$$x = \frac{\log 45}{\log 3} \approx 3.465$$

التحقق: $5 - 3^{3.465} \approx 5 - 45 = -40$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \left\{\frac{\log 45}{\log 3}\right\} \approx \{3.465\}$$

بند (4-5) ص 65 – تمرين (4) حل كل معادلة مما يلي. اختبر صحة كل حل:

$$25^{2x+1} = 144$$

الحل:

$$25^{2x+1} = 144$$

بأخذ log للطرفين:

$$\log 25^{2x+1} = \log 144$$

$$(2x+1)\log 25 = \log 144$$

$$2x + 1 = \frac{\log 144}{\log 25}$$

$$2x + 1 \approx 1.544$$

$$2x \approx 0.544$$

$$x \approx 0.272$$

التحقق: $25^{2(0.272)+1} = 25^{1.544} \approx 144$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\log 144}{\log 25} - 1\right)\right\} \approx \{0.272\}$$

بند (4-5) ص 65 – تمرين (6) حل كل معادلة مما يلي. اختبر صحة كل حل:

$$2 + 8r^{\frac{5}{3}} = 26$$

الحل:

$$2 + 8r^{\frac{5}{3}} = 26$$
$$8r^{\frac{5}{3}} = 24$$
$$r^{\frac{5}{3}} = 3$$
$$\left(r^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{5}} = (3)^{\frac{3}{5}}$$
$$r = 3^{\frac{3}{5}} \approx 1.933$$

التحقق: $2 + 8\left(3^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{3}} = 2 + 8(3) = 26$

$\therefore$ **مجموعة الحل** $= \left\{3^{\frac{3}{5}}\right\} \approx \{1.933\}$

بند (4-5) ص 65 – تمرين (9) استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log_2 7$$

الحل:

$$\log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2} \approx \frac{0.8451}{0.3010}$$

$\therefore \log_2 7 \approx 2.807$

قاعدة تغيير الأساس

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

بند (4-5) ص 65 – تمرين (10) استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log_3 33$$

الحل:

$$\log_3 33 = \frac{\log 33}{\log 3} \approx \frac{1.5185}{0.4771}$$

$\therefore \log_3 33 \approx 3.183$

قاعدة تغيير الأساس

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

بند (4-5) ص 65 – تمرين (11) استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

$$\log_{21} 0.085$$

الحل:

$$\log_{21} 0.085 = \frac{\log 0.085}{\log 21}$$
$$\approx \frac{-1.0706}{1.3222}$$

$$\therefore \log_{21} 0.085 \approx -0.810$$

قاعدة تغيير الأساس

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

بند (4-5) ص 65 – تمرين (15) حل كل معادلة لوغاريتمية مما يلي:

$$\log 6x - 3 = -4$$

الحل:

$$\log 6x - 3 = -4$$
$$\log 6x = -1$$
$$6x = 10^{-1}$$
$$6x = \frac{1}{10}$$
$$x = \frac{1}{60}$$
$$\frac{1}{60} \in (0\,,\infty)$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \left\{\frac{1}{60}\right\}$$

شرط الحل

شرط التعريف: $6x > 0$

$$x > 0 \Rightarrow x \in (0\,,\infty)$$

بند (4-5) ص 65 – تمرين (16) حل كل معادلة لوغاريتمية مما يلي:

$$\log x - \log 3 = 8$$

الحل:

$$\log x - \log 3 = 8$$
$$\log \frac{x}{3} = 8$$
$$\frac{x}{3} = 10^8$$
$$x = 3 \times 10^8$$
$$3 \times 10^8 \in (0\,,\infty)$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{3 \times 10^8\}$$

شرط الحل

شرط التعريف: $x > 0$

$$x \in (0\,,\infty)$$

بند (4-5) ص 65 – تمرين (17) حل كل معادلة لوغاريتمية مما يلي:

$$\log_2(3x-5)=1$$

الحل:

$$\log_2(3x-5)=1$$
$$3x-5=2^1$$
$$3x=7$$
$$x=\frac{7}{3}$$
$$\frac{7}{3}\in\left(\frac{5}{3},\infty\right)$$

$\therefore$ **مجموعة الحل** $=\left\{\frac{7}{3}\right\}$

شرط الحل

شرط التعريف: $3x-5>0$

$$x>\frac{5}{3}\ \Rightarrow\ x\in\left(\frac{5}{3},\infty\right)$$

بند (4-5) ص 65 – تمرين (18) حل كل معادلة لوغاريتمية مما يلي:

$$\log(2x)+\log(x-3)=\log 8$$

الحل:

$$\log(2x)+\log(x-3)=\log 8$$
$$\log\left(2x(x-3)\right)=\log 8$$
$$2x(x-3)=8$$
$$2x^2-6x=8$$
$$x^2-3x-4=0$$
$$(x-4)(x+1)=0$$

إما: $x-4=0$
$x=4$
$4\in(3,\infty)$

أو: $x+1=0$
$x=-1$
$-1\notin(3,\infty)$ (مرفوض)

$\therefore$ **مجموعة الحل** $=\{4\}$

شرط الحل

شروط التعريف: $2x>0$, $x-3>0$

$x>0$, $x>3$

$\therefore x>3\ \Rightarrow\ x\in(3,\infty)$

بند (4-5) ص 65 – تمرين (19) حل كل معادلة لوغاريتمية مما يلي:

$$\log(3x) - \log(x+20) = -\log 2$$

الحل:

$$\log(3x) - \log(x+20) = -\log 2$$

$$\log \frac{3x}{x+20} = \log 2^{-1}$$

$$\log \frac{3x}{x+20} = \log \frac{1}{2}$$

$$\frac{3x}{x+20} = \frac{1}{2}$$

$$6x = x + 20$$

$$5x = 20$$

$$x = 4$$

$$4 \in (0\,,\infty)$$

$\therefore$ **مجموعة الحل** $= \{4\}$

شرط الحل

شروط التعريف: $3x > 0\ ,\ x+20 > 0$

$$x > 0\ ,\ x > -20$$

$$\therefore x > 0 \ \Rightarrow\ x \in (0\,,\infty)$$

البند (4-6) – اللوغاريتم الطبيعي

بند (4-6) ص 67 – تمرين (2) اكتب كل تعبير مما يلي كلوغاريتم طبيعي واحد:

$$\ln 24 - \ln 6$$

الحل:

$$\ln 24 - \ln 6$$

$$= \ln \frac{24}{6}$$

$\therefore \ln 24 - \ln 6 = \ln 4$

تذكر

$$\ln mn = \ln m + \ln n$$

$$\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n$$

$$\ln m^k = k \ln m$$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (3) اكتب كل تعبير مما يلي كلوغاريتم طبيعي واحد:

$$\ln 3 - 5\ln 3$$

الحل:

$$\ln 3 - 5\ln 3$$
$$= \ln 3 - \ln 3^5$$
$$= \ln \frac{3}{243}$$
$$\ln 3 - 5\ln 3 = \ln \frac{1}{81} \therefore$$

تذكر

$$\ln mn = \ln m + \ln n$$
$$\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n$$
$$\ln m^k = k \ln m$$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (4) اكتب كل تعبير مما يلي كلوغاريتم طبيعي واحد:

$$5\ln m + 3\ln n\ ,\ (m > 0\ , n > 0)$$

الحل:

$$5\ln m + 3\ln n$$
$$= \ln m^5 + \ln n^3$$
$$5\ln m + 3\ln n = \ln m^5 n^3 \therefore$$

تذكر

$$\ln mn = \ln m + \ln n$$
$$\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n$$
$$\ln m^k = k \ln m$$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (5) اكتب كل تعبير مما يلي كلوغاريتم طبيعي واحد:

$$2\ln 8 - 3\ln 4$$

الحل:

$$2\ln 8 - 3\ln 4$$
$$= \ln 8^2 - \ln 4^3$$
$$= \ln 64 - \ln 64$$
$$= \ln \frac{64}{64}$$
$$2\ln 8 - 3\ln 4 = \ln 1 = 0 \therefore$$

تذكر

$$\ln mn = \ln m + \ln n$$
$$\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n$$
$$\ln m^k = k \ln m$$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (7) اكتب كل تعبير مما يلي كلوغاريتم طبيعي واحد:

$$\ln a - 2\ln b + \frac{1}{2}\ln c\,,\ (a>0\,, b>0\,, c>0)$$

الحل:

$$\ln a - 2\ln b + \frac{1}{2}\ln c$$
$$= \ln a - \ln b^2 + \ln c^{\frac{1}{2}}$$
$$= \ln \frac{a}{b^2} + \ln \sqrt{c}$$
$$\ln a - 2\ln b + \frac{1}{2}\ln c = \ln \frac{a\sqrt{c}}{b^2} \therefore$$

تذكر

$$\ln mn = \ln m + \ln n$$
$$\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n$$
$$\ln m^k = k \ln m$$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (9) أوجد قيمة y في: $y = 15 + 3\ln 7.2$

الحل:

$$y = 15 + 3\ln 7.2$$
$$y \approx 15 + 3(1.9741)$$
$$y \approx 15 + 5.9222$$
$$y \approx 20.922 \therefore$$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (10) أوجد قيمة y في: $y = 0.05 - 10\ln x\,,\ x = 0.09$

الحل:

$$y = 0.05 - 10\ln x$$
$$y = 0.05 - 10\ln 0.09$$
$$y \approx 0.05 - 10(-2.4079)$$
$$y \approx 0.05 + 24.0795$$
$$y \approx 24.129 \therefore$$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (13) استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل المعادلات التالية:

$$3e^{2x} = 12$$

الحل:

$$3e^{2x} = 12$$
$$e^{2x} = 4$$
$$\ln e^{2x} = \ln 4$$
$$2x = \ln 4$$
$$x = \frac{\ln 4}{2} = \ln 2 \approx 0.693$$

$\therefore$ **مجموعة الحل** $= \{\ln 2\}$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (14) استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل المعادلات التالية:

$$e^{x+1} = 30$$

الحل:

$$e^{x+1} = 30$$
$$\ln e^{x+1} = \ln 30$$
$$x + 1 = \ln 30$$
$$x = \ln 30 - 1 \approx 2.401$$

$\therefore$ **مجموعة الحل** $= \{\ln 30 - 1\}$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (15) استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل المعادلات التالية:

$$e^{\frac{x}{9}} - 8 = 6$$

الحل:

$$e^{\frac{x}{9}} - 8 = 6$$
$$e^{\frac{x}{9}} = 14$$
$$\ln e^{\frac{x}{9}} = \ln 14$$
$$\frac{x}{9} = \ln 14$$
$$x = 9 \ln 14 \approx 23.752$$

$\therefore$ **مجموعة الحل** $= \{9 \ln 14\}$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (16) استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل المعادلات التالية:

$$4e^{x+2} = 32$$

الحل:

$$4e^{x+2} = 32$$

$$e^{x+2} = 8$$

$$\ln e^{x+2} = \ln 8$$

$$x + 2 = \ln 8$$

$$x = \ln 8 - 2 \approx 0.079$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{\ln 8 - 2\}$$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (17) استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل المعادلات التالية:

$$2e^{3x-2} + 4 = 16$$

الحل:

$$2e^{3x-2} + 4 = 16$$

$$2e^{3x-2} = 12$$

$$e^{3x-2} = 6$$

$$\ln e^{3x-2} = \ln 6$$

$$3x - 2 = \ln 6$$

$$3x = \ln 6 + 2$$

$$x = \frac{\ln 6 + 2}{3} \approx 1.264$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \left\{\frac{\ln 6 + 2}{3}\right\}$$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (18) استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل المعادلات التالية:

$$2e^{2x} = e^x + 6$$

الحل:

$$2e^{2x} = e^x + 6$$

$$2e^{2x} - e^x - 6 = 0$$

نفرض $t = e^x \, , \, t > 0$

$$2t^2 - t - 6 = 0$$

$$(2t + 3)(t - 2) = 0$$

إما: $2t + 3 = 0$

$$t = -\frac{3}{2}$$

$e^x = -\frac{3}{2}$ (مرفوض)

لأن $e^x > 0$

أو: $t - 2 = 0$

$$t = 2$$

$$e^x = 2$$

$$x = \ln 2 \approx 0.693$$

∴ **مجموعة الحل** $= \{\ln 2\}$

ملاحظة

$e^x > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (19) حل كل معادلة مما يلي:

$$\ln 3x = 6$$

الحل:

$$\ln 3x = 6$$

$$3x = e^6$$

$$x = \frac{e^6}{3} \approx 134.476$$

$$\frac{e^6}{3} \in (0 \, , \infty)$$

∴ **مجموعة الحل** $= \left\{\frac{e^6}{3}\right\}$

شرط الحل

شرط التعريف: $3x > 0$

$x > 0 \Rightarrow x \in (0 \, , \infty)$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (20) حل كل معادلة مما يلي:

$$\ln(4x-1)=36$$

الحل:

$$\ln(4x-1)=36$$
$$4x-1=e^{36}$$
$$4x=e^{36}+1$$
$$x=\frac{e^{36}+1}{4}\approx 1.078\times 10^{15}$$
$$\frac{e^{36}+1}{4}\in\left(\frac{1}{4},\infty\right)$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل}=\left\{\frac{e^{36}+1}{4}\right\}$$

شرط الحل

شرط التعريف: $4x-1>0$

$$x>\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ x\in\left(\frac{1}{4},\infty\right)$$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (21) حل كل معادلة مما يلي:

$$\ln(x-1)^2=3$$

الحل:

$$\ln(x-1)^2=3$$
$$(x-1)^2=e^3$$
$$\sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{e^3}$$
$$|x-1|=e^{\frac{3}{2}}$$

إما: $x-1=e^{\frac{3}{2}}$

$$x=1+e^{\frac{3}{2}}\approx 5.482$$
$$1+e^{\frac{3}{2}}\in\mathbb{R}-\{1\}$$

أو: $x-1=-e^{\frac{3}{2}}$

$$x=1-e^{\frac{3}{2}}\approx -3.482$$
$$1-e^{\frac{3}{2}}\in\mathbb{R}-\{1\}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل}=\left\{1-e^{\frac{3}{2}},\ 1+e^{\frac{3}{2}}\right\}$$

شرط الحل

شرط التعريف: $(x-1)^2>0$

$$x-1\neq 0\ \Rightarrow\ x\neq 1$$
$$x\in\mathbb{R}-\{1\}$$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (22) حل كل معادلة مما يلي:

$$\ln\left(\frac{x-1}{2}\right)=4$$

الحل:

$$\ln\left(\frac{x-1}{2}\right)=4$$
$$\frac{x-1}{2}=e^4$$
$$x-1=2e^4$$
$$x=2e^4+1\approx 110.196$$
$$2e^4+1\in(1\,,\infty)$$

∴ مجموعة الحل $=\{2e^4+1\}$

شرط الحل

شرط التعريف: $\frac{x-1}{2}>0$

$x>1 \Rightarrow x\in(1\,,\infty)$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (23) حل كل معادلة مما يلي:

$$2\ln 2x^2=1$$

الحل:

$$2\ln 2x^2=1$$
$$\ln 2x^2=\frac{1}{2}$$
$$2x^2=e^{\frac{1}{2}}$$
$$x^2=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}}$$
$$|x|=\sqrt{\frac{\sqrt{e}}{2}}\approx 0.908$$

إما: $x=\sqrt{\frac{\sqrt{e}}{2}}\approx 0.908$ أو: $x=-\sqrt{\frac{\sqrt{e}}{2}}\approx -0.908$

القيمتان $\in \mathbb{R}-\{0\}$

∴ مجموعة الحل $=\left\{-\sqrt{\frac{\sqrt{e}}{2}}\,,\sqrt{\frac{\sqrt{e}}{2}}\right\}$

شرط الحل

شرط التعريف: $2x^2>0$

$x\neq 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{0\}$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (24) حل كل معادلة مما يلي:

$$\ln x - 3\ln 3 = 3$$

الحل:

$$\ln x - 3\ln 3 = 3$$
$$\ln x - \ln 3^3 = 3$$
$$\ln \frac{x}{27} = 3$$
$$\frac{x}{27} = e^3$$
$$x = 27e^3 \approx 542.309$$
$$27e^3 \in (0\,,\infty)$$

∴ مجموعة الحل $= \{27e^3\}$

شرط الحل

شرط التعريف: $x > 0$

$x \in (0\,,\infty)$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (25) حل كل معادلة مما يلي:

$$\frac{1}{2}\ln x + \ln 2 - \ln 3 = 3$$

الحل:

$$\frac{1}{2}\ln x + \ln 2 - \ln 3 = 3$$
$$\ln x^{\frac{1}{2}} + \ln 2 - \ln 3 = 3$$
$$\ln\left(\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3}\right) = 3$$
$$\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3} = e^3$$
$$x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}e^3$$
$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}e^3\right)^2$$
$$x = \frac{9}{4}e^6 \approx 907.7$$
$$\frac{9}{4}e^6 \in (0\,,\infty)$$

∴ مجموعة الحل $= \left\{\frac{9}{4}e^6\right\}$

شرط الحل

شرط التعريف: $x > 0$

$x \in (0\,,\infty)$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (26) حل كل معادلة مما يلي:

$$1.1 + \ln x^2 = 6$$

الحل:

$$1.1 + \ln x^2 = 6$$

$$\ln x^2 = 4.9$$

$$x^2 = e^{4.9}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{e^{4.9}}$$

$$|x| = e^{2.45} \approx 11.588$$

إما: $x = e^{2.45} \approx 11.588$ | أو: $x = -e^{2.45} \approx -11.588$

القيمتان $\in \mathbb{R} - \{0\}$

∴ **مجموعة الحل** $= \{-e^{2.45}\ ,\ e^{2.45}\}$

شرط الحل

شرط التعريف: $x^2 > 0$

$x \neq 0 \ \Rightarrow \ x \in \mathbb{R} - \{0\}$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (27) حل كل معادلة مما يلي:

$$\ln(2x - 1) = 0$$

الحل:

$$\ln(2x - 1) = 0$$

$$2x - 1 = e^0$$

$$2x - 1 = 1$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$$1 \in \left(\frac{1}{2}\ , \infty\right)$$

∴ **مجموعة الحل** $= \{1\}$

شرط الحل

شرط التعريف: $2x - 1 > 0$

$x > \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ x \in \left(\frac{1}{2}\ , \infty\right)$

بند (4-6) ص 67 – تمرين (28) حل كل معادلة مما يلي:

$$\ln(5x-3)^{\frac{1}{3}} = 2$$

الحل:

$$\ln(5x-3)^{\frac{1}{3}} = 2$$
$$\frac{1}{3}\ln(5x-3) = 2$$
$$\ln(5x-3) = 6$$
$$5x-3 = e^6$$
$$5x = e^6+3$$
$$x = \frac{e^6+3}{5} \approx 81.286$$
$$\frac{e^6+3}{5} \in \left(\frac{3}{5}, \infty\right)$$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \left\{\frac{e^6+3}{5}\right\}$

شرط الحل

شرط التعريف: $5x-3>0$

$$x > \frac{3}{5} \Rightarrow x \in \left(\frac{3}{5}, \infty\right)$$

البند (1-5) – المتجه في المستوى

بند (1-5) ص 72 – تمرين (1) ليكن: $A(-3,4)$ ، $B(2,-1)$ ، $C(3,5)$

(a) عين الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكل من $\langle\overrightarrow{AB}\rangle$ ، $\langle\overrightarrow{BC}\rangle$ ، $\langle\overrightarrow{CA}\rangle$

(b) إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ حيث $M(4,3)$ يمثل القطعة الموجهة $\overrightarrow{BE}$. فأوجد إحداثيات E بفرض $E(x,y)$

الحل:

(a)

$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle 2-(-3),\ -1-4\rangle$$
$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle 5,-5\rangle$$
$$\langle\overrightarrow{BC}\rangle = \langle 3-2,\ 5-(-1)\rangle$$
$$\langle\overrightarrow{BC}\rangle = \langle 1,6\rangle$$
$$\langle\overrightarrow{CA}\rangle = \langle -3-3,\ 4-5\rangle$$
$$\langle\overrightarrow{CA}\rangle = \langle -6,-1\rangle$$

(b)

$$\langle\overrightarrow{BE}\rangle = \langle\overrightarrow{OM}\rangle$$
$$\langle x-2,\ y-(-1)\rangle = \langle 4,3\rangle$$
$$\langle x-2,\ y+1\rangle = \langle 4,3\rangle$$
$$x-2=4 \Rightarrow x=6$$
$$y+1=3 \Rightarrow y=2$$

تذكر

$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1\rangle$$

يتساوى المتجهان إذا تساوت المركبات المتناظرة

$$\therefore \overrightarrow{AB}\rangle = \langle 5, -5\rangle \text{ ، } \overrightarrow{BC}\rangle = \langle 1, 6\rangle \text{ ،}$$
$$\overrightarrow{CA}\rangle = \langle -6, -1\rangle \text{ ، } E(6, 2)$$

بند (1-5) ص 72 – تمرين (2) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $E(-3, 2)$ ، $F(2, -1)$ ، $G(4, -2)$

أوجد مركبات كل من المتجهات التالية: $\overrightarrow{EF}\rangle$ ، $\overrightarrow{GF}\rangle$ ، $\overrightarrow{EG}\rangle$

الحل:

$$\overrightarrow{EF}\rangle = \langle 2 - (-3),\ -1 - 2\rangle$$
$$\overrightarrow{EF}\rangle = \langle 5, -3\rangle$$
$$\overrightarrow{GF}\rangle = \langle 2 - 4,\ -1 - (-2)\rangle$$
$$\overrightarrow{GF}\rangle = \langle -2, 1\rangle$$
$$\overrightarrow{EG}\rangle = \langle 4 - (-3),\ -2 - 2\rangle$$
$$\overrightarrow{EG}\rangle = \langle 7, -4\rangle$$

$$\therefore \overrightarrow{EF}\rangle = \langle 5, -3\rangle \text{ ، } \overrightarrow{GF}\rangle = \langle -2, 1\rangle \text{ ،}$$
$$\overrightarrow{EG}\rangle = \langle 7, -4\rangle$$

تذكر

$$\overrightarrow{AB}\rangle = \langle x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1\rangle$$

بند (1-5) ص 72 – تمرين (3) **(a)** لكل من المتجهات التالية: $\vec{u} = \langle 3, 2\rangle$ ، $\vec{v} = \langle -2, 4\rangle$ ، $\vec{w} = \langle -3, -2\rangle$ ، $\vec{t} = \langle 2, -3\rangle$

ارسم متجه الموضع

(b) أوجد طول كل متجه وقياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الحل:

(a)

نرسم كل متجه من نقطة الأصل $O(0, 0)$ إلى النقطة (x, y):

تذكر

$0^\circ \le \theta < 360^\circ$

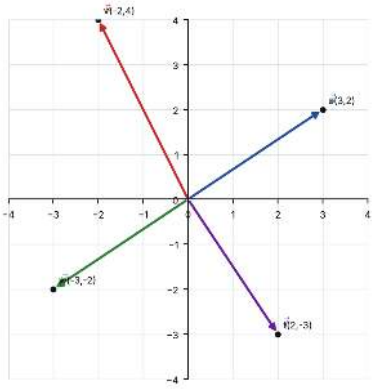
الربع الأول: $\theta = \alpha$

الربع الثاني: $\theta = 180^\circ - \alpha$

الربع الثالث: $\theta = 180^\circ + \alpha$

الربع الرابع: $\theta = 360^\circ - \alpha$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)$$



(b)

$$\vec{u} = \langle 3, 2 \rangle$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2} = \sqrt{13}$$

الربع الأول : $y = 2 > 0 \text{ ، } x = 3 > 0$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33.7^\circ$$

$$\theta = \alpha \approx 33.7^\circ$$

$$\vec{v} = \langle -2, 4 \rangle$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

الربع الثاني : $y = 4 > 0 \text{ ، } x = -2 < 0$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) \approx 63.4^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 63.4^\circ \approx 116.6^\circ$$

$$\vec{w} = \langle -3, -2 \rangle$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

الربع الثالث : $y = -2 < 0 \text{ ، } x = -3 < 0$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33.7^\circ$$

$$\theta = 180^\circ + 33.7^\circ \approx 213.7^\circ$$

$$\vec{t} = \langle 2, -3 \rangle$$

$$\|\vec{t}\| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

الربع الرابع : $y = -3 < 0 \text{ ، } x = 2 > 0$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56.3^\circ$$
$$\theta = 360^\circ - 56.3^\circ \approx 303.7^\circ$$

$\therefore$ ، $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}\ ,\ \theta \approx 33.7^\circ$
، $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{5}\ ,\ \theta \approx 116.6^\circ$
، $\|\vec{w}\| = \sqrt{13}\ ,\ \theta \approx 213.7^\circ$
$\|\vec{t}\| = \sqrt{13}\ ,\ \theta \approx 303.7^\circ$

بند (1-5) ص 72 – تمرين (4) إذا كان $\vec{u} = \left\langle x, \frac{3}{5} \right\rangle$ فأوجد قيمة x بحيث يصبح $\vec{u}$ متجه وحدة

الحل:

$$\|\vec{u}\| = 1$$
$$\sqrt{(x)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1$$
$$\left(\sqrt{x^2 + \frac{9}{25}}\right)^2 = (1)^2$$
$$x^2 + \frac{9}{25} = 1$$
$$x^2 = 1 - \frac{9}{25}$$
$$x^2 = \frac{16}{25}$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{16}{25}}$$
$$|x| = \frac{4}{5}$$

$\therefore x = -\frac{4}{5}$ **أو** $x = \frac{4}{5}$

تذكر

يكون $\vec{u}$ متجه وحدة إذا كان $\|\vec{u}\| = 1$

بند (1-5) ص 72 – تمرين (5) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط $A(3,-1)$ ، $B(5,-4)$ ، $C(2,4)$ ، $D(4,1)$
أثبت أن : $\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle\overrightarrow{CD}\rangle$

الحل:

$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle 5-3,\ -4-(-1)\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle 2,-3\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{CD}\rangle = \langle 4-2,\ 1-4\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{CD}\rangle = \langle 2,-3\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle\overrightarrow{CD}\rangle \therefore$$

تذكر

يتساوى المتجهان إذا تساوت المركبات المتناظرة

بند (1-5) ص 72 – تمرين (6) ليكن : $\vec{A} = \langle 4,-3\rangle$ ، $\vec{B} = \langle 3x-2,\ 4y+1\rangle$ حيث x, y عددان حقيقيان أوجد قيمتي x, y بحيث يكون : $\vec{A} = \vec{B}$

الحل:

$$\vec{A} = \vec{B} \because$$

$$\langle 3x-2,\ 4y+1\rangle = \langle 4,-3\rangle$$

$$3x-2 = 4$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$4y+1 = -3$$

$$4y = -4$$

$$y = \frac{-4}{4} = -1$$

$$y = -1 \text{ ، } x = 2 \therefore$$

تذكر

يتساوى المتجهان إذا تساوت المركبات المتناظرة

بند (1-5) ص 72 – تمرين (7) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(5,2)$ ، $B(-2,6)$ ، $C(-3,3)$ ، $D(4,-1)$

أثبت أن : $\langle\overrightarrow{AB}\rangle$ معاكس لـ $\langle\overrightarrow{CD}\rangle$

الحل:

$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle -2-5,\ 6-2\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle -7, 4\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{CD}\rangle = \langle 4-(-3),\ -1-3\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{CD}\rangle = \langle 7, -4\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle = -1\,\langle\overrightarrow{CD}\rangle$$

$\therefore \langle\overrightarrow{AB}\rangle = -\langle\overrightarrow{CD}\rangle$ أي أن $\langle\overrightarrow{AB}\rangle$ معاكس لـ $\langle\overrightarrow{CD}\rangle$

تذكر

$\vec{A}$ معاكس لـ $\vec{B}$ إذا كان $\vec{A} = -\vec{B}$

بند (1-5) ص 72 – تمرين (8) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(2,-3)$ ، $B(-1,3)$ ، $C(1,-1)$

أثبت أن النقاط الثلاث على استقامة واحدة .

الحل:

$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle -1-2,\ 3-(-3)\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle -3, 6\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{AC}\rangle = \langle 1-2,\ -1-(-3)\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{AC}\rangle = \langle -1, 2\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle = 3\,\langle\overrightarrow{AC}\rangle$$

$\therefore \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ ويشتركان في النقطة A

$\therefore$ النقاط A ، B ، C على استقامة واحدة

تذكر

يكون $\vec{A} \parallel \vec{B}$ إذا كان $\vec{A} = k\vec{B}$ ، $k \neq 0$

بند (1-5) ص 72 – تمرين (10) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(3,2)$ ، $B(1,5)$ ، $C(7,4)$

(a) أوجد إحداثيات النقطة D حيث : $\langle\overrightarrow{BD}\rangle = -\frac{1}{2}\langle\overrightarrow{BA}\rangle$

(c) أثبت أن : $\langle\overrightarrow{DE}\rangle, \langle\overrightarrow{BC}\rangle$ لهما الاتجاه نفسه

الحل:

(a)

نفرض $D(x,y)$

$$\langle \overrightarrow{BA} \rangle = \langle 3-1,\ 2-5 \rangle = \langle 2,-3 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{BD} \rangle = \langle x-1,\ y-5 \rangle$$

$$\langle x-1,\ y-5 \rangle = -\frac{1}{2}\langle 2,-3 \rangle$$

$$\langle x-1,\ y-5 \rangle = \left\langle -1, \frac{3}{2} \right\rangle$$

$$x-1=-1 \Rightarrow x=0$$

$$y-5=\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{13}{2}$$

$$D\left(0,\frac{13}{2}\right) \therefore$$

(c)

من

(b) : $\langle \overrightarrow{CE} \rangle = -\frac{1}{2}\langle \overrightarrow{CA} \rangle$

$$\langle \overrightarrow{CA} \rangle = \langle 3-7,\ 2-4 \rangle = \langle -4,-2 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{CE} \rangle = \langle 2,1 \rangle \Rightarrow E(7+2,\ 4+1) = E(9,5)$$

$$\langle \overrightarrow{DE} \rangle = \left\langle 9-0,\ 5-\frac{13}{2} \right\rangle = \left\langle 9,-\frac{3}{2} \right\rangle$$

$$\langle \overrightarrow{BC} \rangle = \langle 7-1,\ 4-5 \rangle = \langle 6,-1 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{DE} \rangle = \frac{3}{2}\langle \overrightarrow{BC} \rangle$$

$$k=\frac{3}{2}>0$$

$\therefore$

(a) $D\left(0,\frac{13}{2}\right)$ ،

(c) $\langle \overrightarrow{DE} \rangle = \frac{3}{2}\langle \overrightarrow{BC} \rangle$ و $k>0$ **فهما لهما الاتجاه نفسه**

تذكر

$\vec{A}=k\vec{B}$ ، $k>0$: لهما الاتجاه نفسه

$\vec{A}=k\vec{B}$ ، $k<0$: متعاكسان في الاتجاه

البند (2-5) – جمع المتجهات وطرحها

بند (2-5) ص 74 – تمرين (4) A ، B ، C ، D نقاط في المستوى ، بسط :

(a) $2\langle\overrightarrow{AB}\rangle + 4\langle\overrightarrow{BC}\rangle + 2\langle\overrightarrow{CD}\rangle + 2\langle\overrightarrow{DA}\rangle$

الحل:

$$2\langle\overrightarrow{AB}\rangle + 4\langle\overrightarrow{BC}\rangle + 2\langle\overrightarrow{CD}\rangle + 2\langle\overrightarrow{DA}\rangle$$
$$= 2\langle\overrightarrow{AB}\rangle + 2\langle\overrightarrow{BC}\rangle + 2\langle\overrightarrow{CD}\rangle + 2\langle\overrightarrow{DA}\rangle + 2\langle\overrightarrow{BC}\rangle$$
$$= 2\left(\langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{CD}\rangle + \langle\overrightarrow{DA}\rangle\right) + 2\langle\overrightarrow{BC}\rangle$$
$$= 2\langle\overrightarrow{AA}\rangle + 2\langle\overrightarrow{BC}\rangle$$
$$= 2\vec{0} + 2\langle\overrightarrow{BC}\rangle$$

∴ المقدار $= 2\langle\overrightarrow{BC}\rangle$

تذكر

$\langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle = \langle\overrightarrow{AC}\rangle$ (قاعدة شال)

$\langle\overrightarrow{AA}\rangle = \vec{0}$

بند (2-5) ص 74 – تمرين (7) مثل المتجهات التالية في المستوى الإحداثي حيث O نقطة الأصل ، $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ متجهي الوحدة الأساسيان

$$\overrightarrow{OC} = -4\vec{i} - \vec{j} \text{ ، } \overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 3\vec{j} \text{ ، } \overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$$

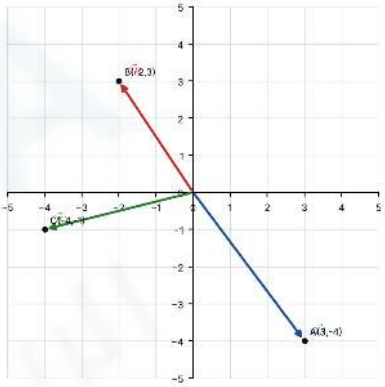
الحل:

$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - 4\vec{j} = \langle 3, -4 \rangle \Rightarrow A(3, -4)$$

$$\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 3\vec{j} = \langle -2, 3 \rangle \Rightarrow B(-2, 3)$$

$$\overrightarrow{OC} = -4\vec{i} - \vec{j} = \langle -4, -1 \rangle \Rightarrow C(-4, -1)$$

نرسم كل متجه من نقطة الأصل $O(0,0)$ إلى النقطة المناظرة:



$\therefore$ ، $\overrightarrow{OA} = \langle 3, -4 \rangle$ ، $\overrightarrow{OB} = \langle -2, 3 \rangle$ ، $\overrightarrow{OC} = \langle -4, -1 \rangle$ **(كما في الرسم)**

تذكر

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} = \langle x, y \rangle$$

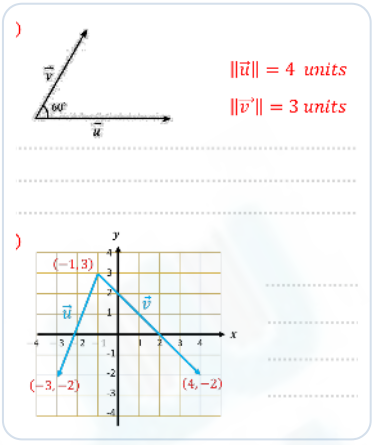
$$\vec{j} = \langle 0, 1 \rangle \text{ ، } \vec{i} = \langle 1, 0 \rangle$$

البند (3-5) – الضرب الداخلي

بند (3-5) ص 77 – تمرين (1) في كل شكل مما يلي أوجد $\vec{u} \cdot \vec{v}$

(a) $\|\vec{u}\| = 4\ units$ ، $\|\vec{v}\| = 3\ units$ ، والزاوية بينهما 60°

(b) الشكل المرسوم في المستوى الإحداثي



الحل:

(a)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4(3)\cos 60^\circ$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

(b)

نقطة البداية للمتجهين $(-1, 3)$

$$\vec{u} = \langle -3-(-1),\ -2-3\rangle = \langle -2, -5\rangle$$

$$\vec{v} = \langle 4-(-1),\ -2-3\rangle = \langle 5, -5\rangle$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle -2, -5\rangle \cdot \langle 5, -5\rangle$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2)(5) + (-5)(-5)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -10 + 25 = 15$$

∴

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$ ،

(b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$

تذكر

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

بند (3-5) ص 77 – تمرين (2) لنأخذ : $\vec{u}=\langle 2,-1\rangle,\ \vec{v}=\langle -3,2\rangle,\ \vec{w}=\langle 1,2\rangle$ أوجد :

(a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

(b) $\vec{u}\cdot\vec{w}$

(c) $\vec{v}\cdot\vec{w}$

(d) $(3\vec{u})\cdot(-2\vec{v})$

(e) $(-4\vec{u})\cdot(3\vec{v})$

الحل:

(a)

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\langle 2,-1\rangle\cdot\langle -3,2\rangle$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=2(-3)+(-1)(2)=-6-2=-8$$

(b)

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=\langle 2,-1\rangle\cdot\langle 1,2\rangle$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=2(1)+(-1)(2)=2-2=0$$

(c)

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\langle -3,2\rangle\cdot\langle 1,2\rangle$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=-3(1)+2(2)=-3+4=1$$

(d)

$$-2\vec{v}=\langle 6,-4\rangle\ .\ 3\vec{u}=\langle 6,-3\rangle$$

$$(3\vec{u})\cdot(-2\vec{v})=6(6)+(-3)(-4)$$

$$(3\vec{u})\cdot(-2\vec{v})=36+12=48$$

(e)

$$3\vec{v}=\langle -9,6\rangle\ .\ -4\vec{u}=\langle -8,4\rangle$$

$$(-4\vec{u})\cdot(3\vec{v})=(-8)(-9)+4(6)$$

$$(-4\vec{u})\cdot(3\vec{v})=72+24=96$$

تذكر

$$\langle x_1,y_1\rangle\cdot\langle x_2,y_2\rangle=x_1x_2+y_1y_2$$

∴
(a) -8 ،
(b) 0 ،
(c) 1 ،
(d) 48 ، (e) 96

بند (3-5) ص 77 – تمرين (3) $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متجهان في المستوي ، حيث $\vec{u}\cdot\vec{v}=-6$ ، $\|\vec{v}\|=5$ ، $\|\vec{u}\|=4$ ، أوجد :

(a) $(2\vec{u}+3\vec{v})^2$

(b) $(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})$

الحل:

(a)

$$(2\vec{u}+3\vec{v})^2=4\vec{u}^2+12\,\vec{u}\cdot\vec{v}+9\vec{v}^2$$
$$=4\|\vec{u}\|^2+12\,\vec{u}\cdot\vec{v}+9\|\vec{v}\|^2$$
$$=4(4)^2+12(-6)+9(5)^2$$
$$=64-72+225=217$$

(b)

$$(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})$$
$$=-6\vec{u}^2+3\vec{u}\cdot\vec{v}+4\vec{v}\cdot\vec{u}-2\vec{v}^2$$
$$=-6\|\vec{u}\|^2+7\,\vec{u}\cdot\vec{v}-2\|\vec{v}\|^2$$
$$=-6(4)^2+7(-6)-2(5)^2$$
$$=-96-42-50=-188$$

∴
(a) $(2\vec{u}+3\vec{v})^2=217$ ،
(b) $(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})=-188$

ملاحظة

$$\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$$
$$\vec{v}^2=\|\vec{v}\|^2$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$

بند (3-5) ص 77 – تمرين (4) لنأخذ : $\vec{u} = \langle x, 4 \rangle,\ \vec{v} = \langle 2, -3 \rangle$

(a) أوجد قيمة x بحيث يكون $\vec{u}$ متعامداً مع $\vec{v}$.

(b) أوجد قيمة x بحيث يكون $\|\vec{u}\| = 5\ units$.

الحل:

(a)

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$
$$\langle x, 4 \rangle \cdot \langle 2, -3 \rangle = 0$$
$$2x + 4(-3) = 0$$
$$2x - 12 = 0$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}$$
$$x = 6$$

(b)

$$\|\vec{u}\| = 5$$
$$\sqrt{x^2 + (4)^2} = 5$$
$$(\sqrt{x^2 + 16})^2 = (5)^2$$
$$x^2 + 16 = 25$$
$$x^2 = 25 - 16$$
$$x^2 = 9$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$
$$|x| = 3$$
$$x = -3 \text{ أو } x = 3$$

$\therefore$

(a) $x = 6$ ،

(b) $x = -3$ **أو** $x = 3$

تذكر

يكون $\vec{u} \perp \vec{v}$ إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

بند (3-5) ص 77 – تمرين (5) لنأخذ في المستوى الإحداثي $\vec{u} = \langle 2, -2 \rangle$ ، $\vec{v} = \langle -\sqrt{2}, 0 \rangle$

أوجد $m(\vec{u}, \vec{v})$

الحل:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (0)^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle 2, -2 \rangle \cdot \langle -\sqrt{2}, 0 \rangle$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(-\sqrt{2}) + (-2)(0) = -2\sqrt{2}$$

$$m(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}\right)$$

$$m(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}\right)$$

$$m(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$m(\vec{u}, \vec{v}) = 135^\circ \therefore$$

تذكر

$0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

بند (3-5) ص 77 – تمرين (6) $A(-1, 3)$ ، $B(-3, 1)$ ، $C(3, -1)$ ثلاث نقاط في المستوى الإحداثي .

(a) أوجد : $\|\overrightarrow{AB}\|$ ، $\|\overrightarrow{AC}\|$ ، $\|\overrightarrow{BC}\|$

(b) أوجد : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC .

الحل:

(a)

$$\langle \overrightarrow{AB} \rangle = \langle -3 - (-1),\ 1 - 3 \rangle = \langle -2, -2 \rangle$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\langle \overrightarrow{AC} \rangle = \langle 3 - (-1),\ -1 - 3 \rangle = \langle 4, -4 \rangle$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\langle \overrightarrow{BC} \rangle = \langle 3 - (-3),\ -1 - 1 \rangle = \langle 6, -2 \rangle$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

(b)

تذكر

يكون المتجهان متعامدين إذا كان ضربهما الداخلي $= 0$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \langle -2, -2 \rangle \cdot \langle 4, -4 \rangle$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2)(4) + (-2)(-4)$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -8 + 8 = 0$$
$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \therefore$$

$\therefore$

(a) $\|\overrightarrow{AB}\| = 2\sqrt{2}$ ، $\|\overrightarrow{AC}\| = 4\sqrt{2}$ ،
$\|\overrightarrow{BC}\| = 2\sqrt{10}$ ،

(b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ والمثلث ABC قائم الزاوية في $\hat{A}$

بند (3-5) ص 77 – تمرين (7) في التمارين $(7 - 10)$ ، أوجد $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$m(\vec{u}, \vec{v}) = 30^\circ$ ، $\|\vec{v}\| = 3$ ، $\|\vec{u}\| = 2$

الحل:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(3) \cos 30^\circ$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{3} \therefore$$

تذكر

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$$

بند (3-5) ص 77 – تمرين (8) في التمارين $(7 - 10)$ ، أوجد $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$m(\vec{u}, \vec{v}) = 135^\circ$ ، $\|\vec{v}\| = 5$ ، $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$

الحل:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{2}(5) \cos 135^\circ$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 \therefore$$

تذكر

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$$

بند (3-5) ص 77 – تمرين (9) في التمارين $(7-10)$ ، أوجد $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$$m(\vec{u},\vec{v})=180^\circ \text{ ، } \|\vec{v}\|=4 \text{ ، } \|\vec{u}\|=\sqrt{3}$$

الحل:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{3}(4)\cos 180^\circ$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=4\sqrt{3}(-1)$$

$$\therefore \vec{u}\cdot\vec{v}=-4\sqrt{3}$$

تذكر

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$$

بند (3-5) ص 77 – تمرين (10) في التمارين $(7-10)$ ، أوجد $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$$m(\vec{u},\vec{v})=90^\circ \text{ ، } \|\vec{v}\|=7\sqrt{6} \text{ ، } \|\vec{u}\|=4\sqrt{2}$$

الحل:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=4\sqrt{2}(7\sqrt{6})\cos 90^\circ$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=28\sqrt{12}(0)$$

$$\therefore \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$ **(المتجهان متعامدان)**

تذكر

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$$

البند (1-6) – المجتمع الإحصائي والمعاينة

بند (1-6) ص 85 – تمرين (1) أذكر مراحل البحث الإحصائي الأربعة مرتبة .

الحل:

مراحل البحث الإحصائي هي:

(1) جمع البيانات .

(2) عرض البيانات (جدولياً وبيانياً) .

(3) وصف البيانات وتحليلها .

(4) تفسير النتائج واتخاذ القرارات .

∴ جمع البيانات ← عرض البيانات ← وصف البيانات وتحليلها ← تفسير النتائج واتخاذ القرارات

بند (1-6) ص 85 – تمرين (2) ماهي أساليب جمع البيانات .

الحل:

أساليب جمع البيانات:

(1) الحصر الشامل : جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة .

(2) المعاينة : اختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقة مدروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع وتحقق أهداف الدراسة .

∴ أساليب جمع البيانات : الحصر الشامل ، المعاينة

بند (1-6) ص 85 – تمرين (3) في التمرينين $(3-4)$ ، اذكر ما نوع البيانات التي تصف كلاً من الحالات التالية :
عدد التذاكر المباعة لإحدى المسرحيات .

الحل:

عدد التذاكر قيمة عددية تكون عدداً صحيحاً (لا يمكن بيع نصف تذكرة)

∴ بيانات كمية متقطعة

تذكر
الكمية المتقطعة: قيمة المتغير عدد صحيح
الكمية المستمرة: قيمة المتغير عدد حقيقي

بند (1-6) ص 85 – تمرين (4) في التمرينين $(3-4)$ ، اذكر ما نوع البيانات التي تصف كلاً من الحالات التالية :
أنواع منتجات معجون الأسنان المباعة للمستهلك .

الحل:

أنواع المنتجات يعبر عنها بأسماء (لا بقيم عددية) ولا تراعي ترتيباً معيناً

∴ بيانات كيفية أسمية

تذكر
الكيفية: يعبر عنها بأسماء أو صفات
الكيفية الأسمية: لا تراعي ترتيباً
الكيفية المرتبة: تراعي ترتيباً معيناً

بند (6-1) ص 85 – تمرين (5) حدد نوع البيانات لكل مما يلي :

(a) أوزان طلاب الصف الحادي عشر في مدرستك .

(b) أنواع الكتب في مكتبة المدرسة .

(c) الدخل الشهري للأسر في دولة ما .

(d) ألوان أحذية الطلاب في صفك .

الحل:

(a) الوزن قيمة عددية تكون عدداً حقيقياً : كمية مستمرة

(b) أنواع الكتب أسماء لا تراعي ترتيباً : كيفية أسمية

(c) الدخل الشهري قيمة عددية تكون عدداً حقيقياً : كمية مستمرة

(d) الألوان صفات لا تراعي ترتيباً : كيفية أسمية

∴ (a) كمية مستمرة ، (b) كيفية أسمية ، (c) كمية مستمرة ، (d) كيفية أسمية

البند (6-2) – العينات

بند (6-2) ص 87 – تمرين (1) أوجد كسر المعاينة عندما يكون حجم العينة 8 وحجم المجتمع 100 .

الحل:

حجم العينة $m = 8$ ، حجم المجتمع $n = 100$

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{m}{n}$$

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{8}{100}$$

∴ كسر المعاينة $= 0.08$

تذكر

كسر المعاينة = حجم العينة ÷ حجم المجتمع

بند (6-2) ص 87 – تمرين (2) أوجد حجم المجتمع الإحصائي إذا كان طول الفترة 5 وحجم العينة 100 .

الحل:

طول الفترة = حجم المجتمع ÷ حجم العينة

$5 = \text{حجم المجتمع} \div 100$

$\text{حجم المجتمع} = 5 \times 100$

∴ حجم المجتمع الإحصائي $= 500$

تذكر

طول الفترة = حجم المجتمع ÷ حجم العينة

بند (2-6) – تمرين (1) في إحدى المؤسسات التعليمية يوجد 50 طالباً مرشحاً لتمثيل المؤسسة في مسابقة لمادة العلوم بحيث تم ترقيم الطلاب من 1 إلى 50. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة حجمها 6 طلاب باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

الحل:

حجم المجتمع = 50 (عدد من منزلتين) ، حجم العينة = 6

لم يُذكر من أين نبدأ ، فنبدأ من الصف الأول والعمود الأول في جدول الأعداد العشوائية

نأخذ أول رقمين من اليسار من كل عدد ونتحرك رأسياً إلى الأسفل

نختار الأعداد من 01 إلى 50 ونهمل ما يزيد على 50 وما يتكرر

نستمر حتى نحصل على 6 أعداد مختلفة

∴ العينة هي أول 6 أعداد مختلفة من 01 إلى 50 نحصل عليها من جدول الأعداد العشوائية بدءاً من الصف الأول والعمود الأول

تذكر

إذا لم يذكر من أين نبدأ في جدول الأعداد العشوائية نبدأ من الصف الأول العمود الأول

بند (2-6) – تمرين (2) مؤسسة للطباعة والنشر يتوزع العاملون فيها وعددهم 60، كما يبين الجدول أدناه: (ص25)

مدراء: 5 ، مستشارون: 10 ، مدققون: 25 ، مصممون: 10 ، مسؤولو طباعة: 10 ، المجموع: 60

المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 12 شخصاً تمثل جميع العاملين في هذه المؤسسة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثالث والعمود الرابع.

مدراء	مستشارون	مدققون	مصممون	مسؤولو طباعة	المجموع
5	10	25	10	10	60
11إلى 15	16 إلى 25	26إلى 50	51 إلى 60	16 إلى 70	الترقيم

الحل:

حجم العينة $= 12$ ، حجم المجتمع $= 60$

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{12}{60}$$

$$\text{كسر المعاينة} = 0.2$$

$$\text{حجم عينة المدراء} = 0.2(5) = 1$$

$$\text{حجم عينة المستشارين} = 0.2(10) = 2$$

$$\text{حجم عينة المدققين} = 0.2(25) = 5$$

$$\text{حجم عينة المصممين} = 0.2(10) = 2$$

$$\text{حجم عينة مسؤولي الطباعة} = 0.2(10) = 2$$

للتحقق: $1 + 2 + 5 + 2 + 2 = 12$

ترقيم الطبقات: المدراء $01 - 05$ ، المستشارون $06 - 15$ ، المدققون $16 - 40$ ، المصممون $41 - 50$ ، مسؤولو الطباعة $51 - 60$

نبدأ من الصف الثالث والعمود الرابع في جدول الأعداد العشوائية ، ونأخذ أعداداً من منزلتين متحركين رأسياً إلى الأسفل

نختار من كل طبقة العدد المطلوب من أرقامها (دون تكرار) ونهمل الأعداد التي تزيد على 60

∴ المدراء: 1 ، المستشارون: 2 ، المدققون: 5 ، المصممون: 2 ، مسؤولو الطباعة: 2

تذكر

كسر المعاينة = حجم العينة ÷ حجم المجتمع

حجم عينة الطبقة = كسر المعاينة × حجم الطبقة

بند (2-6) – تمرين (3) في أحد المصانع للمعلبات الغذائية حيث عدد العمال 600 يعملون على كافة الآلات في المصنع مرقمين من 1 إلى 600. أراد مدير المصنع دراسة كيفية تحسين جودة منتجاته بهدف زيادة المبيع. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 10 مستخدماً جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن والعمود الرابع.

الحل:

$$\text{طول فترة المعاينة} = \frac{600}{10}$$

$$\text{طول فترة المعاينة} = 60$$

نسحب من جدول الأعداد العشوائية (ابتداءً من الصف الثامن والعمود الرابع) رقماً وحيداً r من 01 إلى 60 (منزلتان)

ثم نضيف طول الفترة 60 في كل مرة:

$$r \text{ ، } r+60 \text{ ، } r+120 \text{ ، } r+180 \text{ ، } r+240$$

$$r+300 \text{ ، } r+360 \text{ ، } r+420 \text{ ، } r+480 \text{ ، } r+540$$

∴ **طول الفترة** $= 60$ **وأرقام العينة:** r ، $r+60$ ، ... ، $r+540$ (10 عمال) **حيث** r **أول عدد من** 01 **إلى** 60 **في الجدول**

تذكر

طول فترة المعاينة = حجم المجتمع ÷ حجم العينة

البند (3-6) – أساليب عرض البيانات

أساليب عرض البيانات صفحة 89 – التمرين الأول أثناء عمل الطلاب في مجموعات على نشاط معين في الصف سجل المعلم الملاحظات المبيّنة في الجدول التالي:

(a) أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي لكل فئة.

(b) اعرض هذه البيانات باستخدام القطاعات الدائرية.

الفئة	يحاور ويناقش	يستمع فقط	يتخذ قرارًا	غير مشارك	المجموع
التكرار	5	7	4	6	22

الحل:

(a)

التكرار النسبي = تكرار الفئة ÷ مجموع التكرارات

التكرار المئوي = التكرار النسبي $\times 100\%$

يحاور ويناقش: $\frac{5}{22} \approx 0.227$ ، 22.73%

يستمع فقط: $\frac{7}{22} \approx 0.318$ ، 31.82%

يتخذ قرارًا: $\frac{4}{22} \approx 0.182$ ، 18.18%

غير مشارك: $\frac{6}{22} \approx 0.273$ ، 27.27%

(b)

قياس الزاوية المركزية للقطاع = التكرار النسبي $\times 360^\circ$

يحاور ويناقش: $\frac{5}{22} \times 360^\circ \approx 81.8^\circ$

يستمع فقط: $\frac{7}{22} \times 360^\circ \approx 114.5^\circ$

يتخذ قرارًا: $\frac{4}{22} \times 360^\circ \approx 65.5^\circ$

غير مشارك: $\frac{6}{22} \times 360^\circ \approx 98.2^\circ$

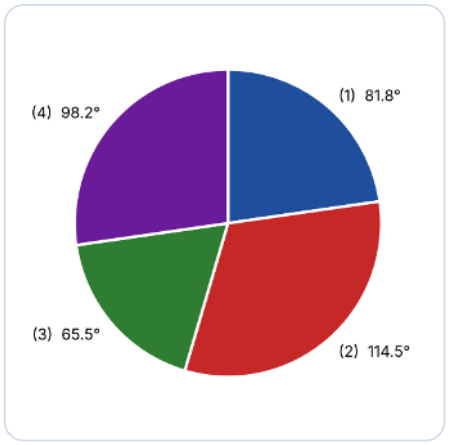
نكوّن الجدول:

الفئة	يحاور ويناقش	يستمع فقط	يتخذ قرارًا	غير مشارك	المجموع
التكرار	5	7	4	6	22
التكرار النسبي	$\frac{5}{22} \approx 0.227$	$\frac{7}{22} \approx 0.318$	$\frac{4}{22} \approx 0.182$	$\frac{6}{22} \approx 0.273$	1
التكرار المئوي	22.73%	31.82%	18.18%	27.27%	100%
قياس الزاوية المركزية	81.8°	114.5°	65.5°	98.2°	360°

تذكر

التكرار النسبي = تكرار الفئة ÷ مجموع التكرارات

قياس الزاوية المركزية = التكرار النسبي $\times 360^\circ$



دليل القطاعات: (1) يحاور ويناقش ، (2) يستمع فقط ،
(3) يتخذ قرارًا ، (4) غير مشارك

∴ **التكرارات المئوية:** 22.73% ، 31.82% ، 18.18%
، 27.27% ، **والزوايا:** 81.8° ، 114.5° ، 65.5° ،
98.2° **(كما في القطاعات الدائرية)**

أساليب عرض البيانات صفحة 89 – التمرين الثاني

يبيّن الجدول التالي وقت خروج السيارات من أحد المنتجات السياحية بعد ظهر أحد الأيام.

(a) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات.

(b) ارسم المنحنى التكراري.

(c) ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

الفئة	4–	5–	6–	7–	8–	9–	المجموع
التكرار	17	31	25	14	7	6	100

الحل:

(a)

مركز الفئة $=$ (الحد الأدنى $+$ الحد الأعلى $\div 2$)

طول الفئة $= 1$ ، الفئة الأولى $4 - 5$: مركزها $= 4.5 = \dfrac{4+5}{2}$

نكوّن الجدول:

الفئة	4–	5–	6–	7–	8–	9–	المجموع
مركز الفئة	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	
التكرار	17	31	25	14	7	6	100

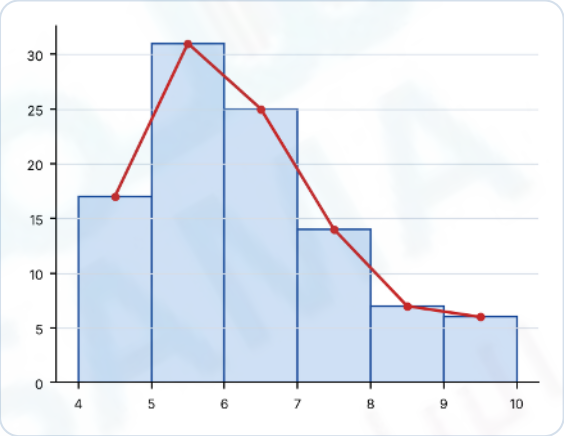
(b) نعين النقاط (مركز الفئة ، التكرار):

$(4.5, 17)$ ، $(5.5, 31)$ ، $(6.5, 25)$ ، $(7.5, 14)$ ، $(8.5, 7)$ ، $(9.5, 6)$

ونصل بينها بمنحنى ممهد فنحصل على المنحنى التكراري

(c) نرسم على كل فئة مستطيلاً ارتفاعه تكرار الفئة فنحصل على المدرج التكراري

ثم نصل بين منتصفات القواعد العليا للمستطيلات بمنحنى ممهد فنحصل على المنحنى التكراري



∴ مراكز الفئات: 4.5 ، 5.5 ، 6.5 ، 7.5 ، 8.5 ، 9.5 ، **والمدرج والمنحنى التكراري كما في الرسم**

البند (4-6) – الانحراف المعياري

الانحراف المعياري صفحة 91-92 – التمرين الأول أوجد الانحراف المعياري للبيانات التالية: 5 , 5 , 5 , 5. فسّر إجابتك.

الحل:

$$\bar{x} = \frac{5+5+5+5}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$x_i - \bar{x} = 5 - 5 = 0$ لجميع القيم

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{0+0+0+0}{4}}$$

$$\sigma = 0$$

التفسير: جميع القيم متساوية وتساوي المتوسط الحسابي ، فلا يوجد تشتت (تباعد) بين البيانات

$\therefore \sigma = 0$ لأن جميع البيانات متساوية ولا تتشتت عن متوسطها

تذكر

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

الانحراف المعياري صفحة 91-92 – التمرين الثاني سجّل صاحب متجر أن مبيع السلع بحسب أسعارها هو كما يلي:

(a) أوجد المتوسّط الحسابي.

(b) أوجد التباين والانحراف المعياري لأسعار السلع.

الفئة (بالدينار)	0–	10–	20–	30–	40–	50–	المجموع
التكرار	190	300	470	280	260	100	1 600

الحل:

نكمل الجدول بإيجاد مركز كل فئة (طول الفئة $= 10$):

تذكر

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$$

$$v = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i}$$

$$\sigma = \sqrt{v}$$

الفئة	مركز الفئة x_i	التكرار n_i	$n_i x_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$n_i(x_i-\bar{x})^2$
$0-$	5	190	950	511.890625	97259.21875
$10-$	15	300	4500	159.390625	47817.1875
$20-$	25	470	11750	6.890625	3238.59375
$30-$	35	280	9800	54.390625	15229.375
$40-$	45	260	11700	301.890625	78491.5625
$50-$	55	100	5500	749.390625	74939.0625
المجموع		1600	44200		316975

(a)

$$\bar{x}=\frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$$

$$\bar{x}=\frac{44200}{1600}$$

$$\bar{x}=27.625$$

(b)

$$v=\frac{\sum n_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum n_i}$$

$$v=\frac{316975}{1600}$$

$$v=198.109375\approx 198.11$$

$$\sigma=\sqrt{v}$$

$$\sigma=\sqrt{198.109375}$$

∴

(a) $\bar{x}=27.625$ **دينار**،

(b) $v\approx 198.11$ ، $\sigma\approx 14.08$ **دينار**

البند (5-6) – القاعدة التجريبية

بند (5-6) ص 93 – تمرين (2) ما هي خصائص التوزيع الطبيعي ؟

الحل:

من خواص منحنى التوزيع الطبيعي:

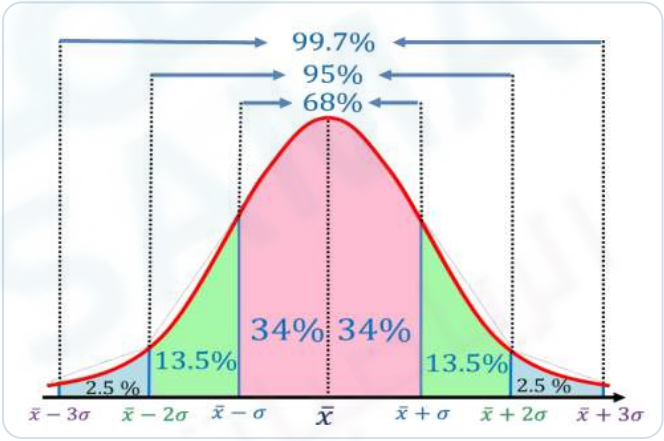
(1) أن يكون على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي .

(2) أن تتساوى فيه قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

(3) أن ينحدر طرفاه تدريجياً ويمتدان إلى ما لا نهاية ولا يلتقيان مع المحور الأفقي أبداً .

∴ منحنى جرسي متماثل حول $\bar{x}$ ، المتوسط = الوسيط = المنوال ، وطرفاه لا يلتقيان مع المحور الأفقي

بند (5-6) ص 93 – تمرين (4) أكمل الرسم أدناه .



الحل:

حوالي 68% من البيانات في الفترة $[\bar{x}-\sigma,\ \bar{x}+\sigma]$: $34\%+34\%$

حوالي 95% من البيانات في الفترة $[\bar{x}-2\sigma,\ \bar{x}+2\sigma]$: $13.5\%+34\%+34\%+13.5\%$

حوالي 99.7% من البيانات في الفترة $[\bar{x}-3\sigma,\ \bar{x}+3\sigma]$

بين $\bar{x}-3\sigma$ و $\bar{x}-2\sigma$: $\dfrac{99.7\%-95\%}{2}=2.35\%$ (تكتب في الكتاب تقريباً 2.5%)

بين $\bar{x}+2\sigma$ و $\bar{x}+3\sigma$: 2.35%

∴ النسب من اليسار إلى اليمين: 2.35% ، 13.5% ، 34% ، 34% ، 13.5% ، 2.35% ، والفترات 99.7% ، 95% ، 68%

بند (6-5) ص 93 – تمرين (5) تبين لإحدى المؤسسات الصناعية أن المتوسط الحسابي لأرباحها الشهرية 1250 ديناراً بانحراف معياري 225 ديناراً وأن المنحنى التكراري لهذه الأرباح هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

(a) طبق القاعدة التجريبية.

(b) هل وصلت أرباح هذه المؤسسة إلى 2000 ديناراً ؟

الحل:

(a) $\sigma = 225 \text{ ، } \bar{x} = 1250$

حوالي 68% من البيانات تقع في الفترة $[\bar{x} - \sigma,\ \bar{x} + \sigma]$

$$[1250 - 225,\ 1250 + 225]$$

$$[1025,\ 1475]$$

حوالي 95% من البيانات تقع في الفترة $[\bar{x} - 2\sigma,\ \bar{x} + 2\sigma]$

$$[1250 - 2(225),\ 1250 + 2(225)]$$

$$[800,\ 1700]$$

حوالي 99.7% من البيانات تقع في الفترة $[\bar{x} - 3\sigma,\ \bar{x} + 3\sigma]$

$$[1250 - 3(225),\ 1250 + 3(225)]$$

$$[575,\ 1925]$$

(b) $2000 \notin [575,\ 1925]$

∴ لا ، لم تصل الأرباح إلى 2000 دينار لأنها خارج الفترة التي تحوي 99.7% من البيانات

بند (6-5) ص 93 – تمرين (6) يعلن مصنع لإنتاج الأسلاك المعدنية أن متوسط تحمل السلك هو $1400\ kg$ بانحراف معياري $200\ kg$. على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع تحمل الأسلاك المعدنية يقترب كثيراً من التوزيع الطبيعي

(a) طبق القاعدة التجريبية

(b) أوجد النسبة المئوية للأسلاك المعدنية التي يزيد متوسط تحملها عن $1000\ kg$.

الحل:

(a) $\sigma = 200 \text{ ، } \bar{x} = 1400$

حوالي 68% من البيانات تقع في الفترة $[\bar{x} - \sigma,\ \bar{x} + \sigma]$

$$[1400 - 200,\ 1400 + 200]$$

تذكر

المنحنى متماثل حول $\bar{x}$

50% من البيانات أكبر من $\bar{x}$

$$[1200,\ 1600]$$

حوالي 95% من البيانات تقع في الفترة

$$[\bar{x}-2\sigma,\ \bar{x}+2\sigma]$$

$$[1400-2(200),\ 1400+2(200)]$$

$$[1000,\ 1800]$$

حوالي 99.7% من البيانات تقع في الفترة

$$[\bar{x}-3\sigma,\ \bar{x}+3\sigma]$$

$$[1400-3(200),\ 1400+3(200)]$$

$$[800,\ 2000]$$

(b) $1000 = 1400 - 2(200) = \bar{x} - 2\sigma$

النسبة المئوية = النسبة في $[\bar{x}-2\sigma,\ \bar{x}]$ + النسبة

فوق $\bar{x}$

$$= \frac{95\%}{2} + 50\%$$
$$= 47.5\% + 50\%$$

∴ (b) النسبة المئوية للأسلاك التي يزيد تحملها عن $1000\ kg = 97.5\%$

البند (6-6) – القيمة المعيارية

بند (6-6) ص 95 – تمرين (1) أكمل الجملة التالية :

القيمة المعيارية هي مؤشر يدل على ..... قيمة مفردة من بيانات عن ..... وذلك باستخدام ..... لقيم هذه البيانات .

الحل:

القيمة المعيارية هي مؤشر يدل على انحراف قيمة مفردة من بيانات عن المتوسط الحسابي وذلك باستخدام الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات .

∴ انحراف ، المتوسط الحسابي ، الانحراف المعياري

بند (6-6) ص 95 – تمرين (2)

في أحد الاختبارات حيث الدرجة العظمى 20 ، جاءت درجة أحد الطلاب 15 مع متوسط حسابي 14 وانحراف معياري 4. ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة ببقية درجات هذا الاختبار؟

الحل:

$$\sigma = 4 \text{ ، } \bar{x} = 14 \text{ ، } x = 15$$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

$$z = \frac{15 - 14}{4}$$

$$z = \frac{1}{4}$$

$\therefore z = 0.25$ (الدرجة أعلى من المتوسط بربع انحراف معياري)

تذكر

القيمة المعيارية: $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$

بند (6-6) ص 95 – تمرين (4)

في المدينة A يزن أحد الرجال $75\ kg$ مع متوسط حسابي للرجال $70\ kg$ وانحراف معياري $5\ kg$. و في المدينة B يزن أحد الرجال $80\ kg$ مع متوسط حسابي للرجال $76\ kg$ وانحراف معياري $8\ kg$. أوجد القيمة المعيارية z_1 لوزن $75\ kg$ في المدينة A و القيمة المعيارية z_2 لوزن $80\ kg$ في المدينة B .

الحل:

المدينة A: $\sigma = 5 \text{ ، } \bar{x} = 70 \text{ ، } x = 75$

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

$$z_1 = \frac{75 - 70}{5}$$

$$z_1 = \frac{5}{5} = 1$$

المدينة B: $\sigma = 8 \text{ ، } \bar{x} = 76 \text{ ، } x = 80$

$$z_2 = \frac{80 - 76}{8}$$

$$z_2 = \frac{4}{8} = 0.5$$

$\therefore z_1 = 1 \text{ ، } z_2 = 0.5$

تذكر

القيمة المعيارية: $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$