سما
SAMA

مذكرات سما

حل
كراسة التمارين

12

الصف الثاني عشر

المرحلة الثانوية- علمي



الفصل الدراسي الأول
2027 - 2026

www.samakw.com
samakw_net
60084568 /50855008/97442417
حولي مجمع بيروت الدور الأول

الرياضيات · الصف الثاني عشر علمي · العام الدراسي 2026 / 2027 · الفصل الدراسي الأول

حل كراسة التمارين – الحل النموذجي

محلولة خطوة بخطوة بطرق حل أ. وليد حسين – منصة سما التعليمية



المحتوى

حل جميع تمارين كراسة التمارين مرتبة حسب البنود

الوحدات: النهايات والاتصال – الاشتقاق – تطبيقات الاشتقاق – الإحصاء

البند (1-1) – النهايات

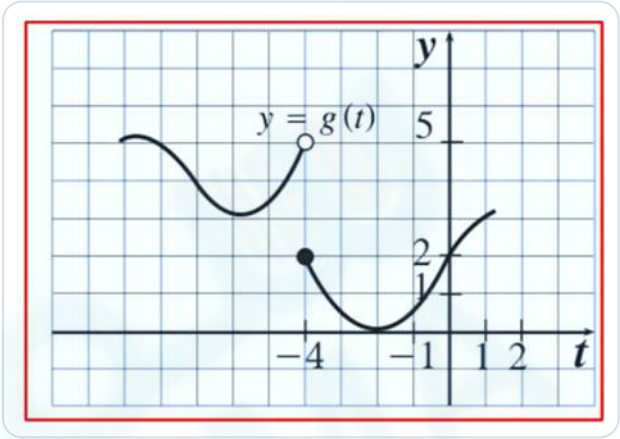
بند (1-1) ص 9 – تمرين (1) الشكل المقابل يمثل بيان الدالة g . أوجد إن أمكن :

(a) $\lim_{t\to -4^-} g(t)$

(b) $\lim_{t\to -4^+} g(t)$

(c) $\lim_{t\to -4} g(t)$

(d) $g(-4)$



الحل:

(b) من جهة اليمين:

من الرسم :

$$\lim_{t\to -4^+} g(t) = 2$$

(a) من جهة اليسار:

من الرسم :

$$\lim_{t\to -4^-} g(t) = 5$$

(c)

$$\lim_{t\to -4^-} g(t) \neq \lim_{t\to -4^+} g(t) \because$$

$\lim_{t\to -4} g(t)$ غير موجودة $\therefore$

(d)

من الرسم (النقطة المظللة) :

$$g(-4) = 2$$

(a) $= 5$ ،

(b) $= 2$ ،

(c) غير موجودة ،

(d) $= 2$

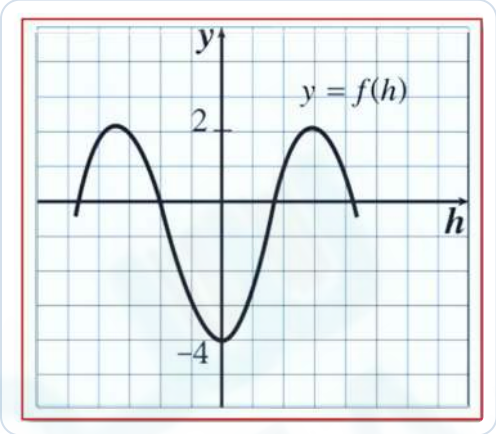
بند (1-1) ص 9 – تمرين (2) الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f . أوجد إن أمكن :

(a) $\lim_{h\to 0^-} f(x)$

(b) $\lim_{h\to 0^+} f(x)$

(c) $\lim_{h\to 0} f(x)$

(d) $f(0)$



الحل:

(b) من جهة اليمين:

من الرسم :

$$\lim_{h\to 0^+} f(h) = -4$$

(a) من جهة اليسار:

من الرسم :

$$\lim_{h\to 0^-} f(h) = -4$$

(c)

$$\lim_{h\to 0^-} f(h) = \lim_{h\to 0^+} f(h) = -4 \because$$

$$\lim_{h\to 0} f(h) = -4 \therefore$$

(d)

من الرسم :

$$f(0) = -4$$

(a) $= -4$ ،

(b) $= -4$ ،

(c) $= -4$ ،

(d) $= -4$

بند (1-1) ص 9 – تمرين (3) بفرض أن : $\lim_{x\to4} g(x)=3$ ، $\lim_{x\to4} f(x)=0$ أوجد :

(a) $\lim_{x\to4}\big(g(x)+3\big)$

(b) $\lim_{x\to4} x f(x)$

(c) $\lim_{x\to4}\big(g(x)\cdot g(x)\big)$

(d) $\lim_{x\to4}\dfrac{g(x)}{f(x)-1}$

الحل:

(a)

$$\lim_{x\to4}\big(g(x)+3\big)$$
$$=\lim_{x\to4} g(x)+\lim_{x\to4} 3$$
$$=3+3=6$$

(b)

$$\lim_{x\to4} x f(x)$$
$$=\lim_{x\to4} x\cdot\lim_{x\to4} f(x)$$
$$=4(0)=0$$

(c)

$$\lim_{x\to4}\big(g(x)\cdot g(x)\big)$$
$$=\lim_{x\to4} g(x)\cdot\lim_{x\to4} g(x)$$
$$=3(3)=9$$

(d)

$$\lim_{x\to4}\frac{g(x)}{f(x)-1}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to4} g(x)}{\lim\limits_{x\to4} f(x)-\lim\limits_{x\to4} 1}$$
$$=\frac{3}{0-1}=-3$$

شرط المقام

(d)

$$\lim_{x\to4}\big(f(x)-1\big)$$
$$=\lim_{x\to4} f(x)-\lim_{x\to4} 1$$
$$=0-1=-1\neq0$$

(a) $=6$ ،
(b) $=0$ ،
(c) $=9$ ،
(d) $=-3$

بند (1-1) ص 9 – تمرين (4) أوجد :

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \left(3x^2(2x-1)\right)$$

الحل:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \left(3x^2(2x-1)\right)$$

كثيرة حدود (تعويض مباشر)

$$= 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)$$

$$= 3\cdot\frac{1}{4}\cdot(-2)$$

$$= -\frac{3}{2}$$

بند (1-1) ص 9 – تمرين (5) أوجد :

$$\lim_{y\to -3} \frac{y^2+4y+3}{y^2-3}$$

الحل:

$$= \frac{\lim\limits_{y\to -3}(y^2+4y+3)}{\lim\limits_{y\to -3}(y^2-3)}$$

$$= \frac{(-3)^2+4(-3)+3}{(-3)^2-3}$$

$$= \frac{9-12+3}{9-3} = \frac{0}{6}$$

شرط المقام

$$\lim_{y\to -3}(y^2-3)$$
$$= 9-3 = 6 \neq 0$$

بند (1-1) ص 9 – تمرين (6) أوجد :

$$\lim_{x\to -4}(x+3)^{1998}$$

الحل:

$$= \left(\lim_{x\to -4}(x+3)\right)^{1998}$$

$$= (-4+3)^{1998}$$

$$= (-1)^{1998}$$

$$= 1$$

بند (1-1) ص 9 – تمرين (7) أوجد :

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x-2}$$

الحل:

$$= \sqrt{\lim_{x\to 3}(x-2)}$$
$$= \sqrt{3-2} = \sqrt{1}$$
$$= 1$$

شرط ما تحت الجذر

$$\lim_{x\to 3}(x-2)$$
$$= 3-2 = 1 > 0$$

بند (1-1) ص 10 – تمرين (8)

لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & : x < 2 \\ 2 & : x = 2 \\ \frac{x}{2} & : x > 2 \end{cases}$$

أوجد : $\lim_{x\to 2} f(x)$

الحل:

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)$$
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{2}$$
$$= \frac{2}{2} = 1$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)$$
$$= \lim_{x\to 2^-} (3-x)$$
$$= 3-2 = 1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1 \because$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1 \therefore$$

بند (1-1) ص 10 – تمرين (10)

لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+4 & : -1 \le x < 1 \\ 2 & : 1 \le x < 2 \\ x & : 2 \le x < 4 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن :

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$

(b) $\lim_{x\to 2} f(x)$

الحل:

(a)

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$= \lim_{x \to 1^-} (-x^2 + 4)$$
$$= -(1)^2 + 4 = 3$$

$$= \lim_{x \to 1^+} 2$$
$$= 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) \because$$
$$\lim_{x \to 1} f(x) \text{ غير موجودة} \therefore$$

(b)

من جهة اليسار:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x)$$
$$= \lim_{x \to 2^-} 2$$
$$= 2$$

من جهة اليمين:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x)$$
$$= \lim_{x \to 2^+} x$$
$$= 2$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 \because$$
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 \therefore$$

(a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ **غير موجودة ،**
(b) $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$

بند (1-1) – في التمارين (11-16) – تمرين (11) في التمارين (11-16) ، أوجد :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(4+x)^2 - 16}{x}$$

الحل:

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\big((4+x) - 4\big)\big((4+x) + 4\big)}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(x+8)}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} (x+8)$$
$$= 0 + 8$$

$$= 8$$

بند (1-1) – في التمارين (11-16) – تمرين (12) في التمارين (11-16) ، أوجد :

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^2-3t+2}{t^2-4}$$

الحل:

$$\frac{0}{0} \text{ صيغة غير معينة}$$
$$=\lim_{t\to 2}\frac{(t-1)(t-2)}{(t-2)(t+2)}$$
$$=\lim_{t\to 2}\frac{t-1}{t+2}$$
$$=\frac{\lim\limits_{t\to 2}(t-1)}{\lim\limits_{t\to 2}(t+2)}=\frac{2-1}{2+2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

شرط المقام

$$\lim_{t\to 2}(t+2)$$
$$=2+2=4\neq 0$$

بند (1-1) – في التمارين (11-16) – تمرين (13) في التمارين (11-16) ، أوجد :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^3-27}{x}$$

الحل:

$$\frac{0}{0} \text{ صيغة غير معينة}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\big((3+x)-3\big)\big((3+x)^2+3(3+x)+9\big)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\big((3+x)^2+9+3x+9\big)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\big((3+x)^2+3x+18\big)$$
$$=\Big(\lim_{x\to 0}(3+x)\Big)^2+\lim_{x\to 0}(3x+18)$$
$$=(3)^2+18$$
$$=27$$

بند (1-1) – في التمارين (11-16) – تمرين (14) في التمارين (11-16) ، أوجد :

$$\lim_{x\to -2}\frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$$

الحل:

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

نفرض $f(x)=\frac{|x+2|}{x^2+3x+2}=\frac{|x+2|}{(x+2)(x+1)}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{-(x+2)}{(x+2)(x+1)}=\frac{-1}{x+1} & :x<-2\\ \frac{x+2}{(x+2)(x+1)}=\frac{1}{x+1} & :x>-2\end{cases}$$

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to -2^+}f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to -2^+}1}{\lim\limits_{x\to -2^+}(x+1)}=\frac{1}{-1}=-1$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to -2^-}f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{-1}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to -2^-}(-1)}{\lim\limits_{x\to -2^-}(x+1)}=\frac{-1}{-1}=1$$

$\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)\because$

$\therefore \lim\limits_{x\to -2}f(x)$ **غير موجودة**

تفريغ المطلقة

$$|x+2|=\begin{cases}x+2 & :x\geq -2\\ -(x+2) & :x<-2\end{cases}$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to -2^-}(x+1)=-2+1=-1\neq 0$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to -2^+}(x+1)=-2+1=-1\neq 0$$

بند (1-1) – في التمارين (11-16) – تمرين (15) في التمارين (11-16) ، أوجد :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$$

الحل:

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة (نضرب بالمرافق)

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x^2+7}-4)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+7-16}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

شرط ما تحت الجذر

$$\lim_{x\to 3}(x^2+7)=9+7=16>0$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-1)\cdot\left(\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+7)}+\lim\limits_{x\to 3}4\right)}$$
$$= \frac{6}{2(4+4)} = \frac{6}{16}$$
$$= \frac{3}{8}$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 3}(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)$$
$$= \lim_{x\to 3}(x-1)\cdot\left(\sqrt{\lim_{x\to 3}(x^2+7)}+\lim_{x\to 3}4\right)$$
$$= (3-1)(\sqrt{16}+4)$$
$$= 2(8) = 16 \neq 0$$

بند (1-1) – في التمارين (17-19) – تمرين (17) في التمارين (17-19) ، أوجد النهايات التالية :

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-3x^2-7x+6}{x+2}$$

الحل:

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

باستخدام القسمة التركيبية:

-2	1	-3	-7	6
		-2	10	-6
	1	-5	3	0
		معاملات ناتج القسمة		الباقي

الباقي : 0

القسمة التركيبية

انظر الجدول

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-5x+3)}{x+2}$$
$$= \lim_{x\to -2}(x^2-5x+3)$$
$$= (-2)^2-5(-2)+3$$
$$= 17$$

بند (1-1) – في التمارين (17-19) – تمرين (18) في التمارين (17-19) ، أوجد النهايات التالية :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-7x^2-18}{x-3}$$

الحل:

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

باستخدام القسمة التركيبية:

3	1	0	−7	0	−18
		3	9	6	18
	1	3	2	6	0
		معاملات ناتج القسمة			الباقي

القسمة التركيبية

انظر الجدول

الباقي : 0

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^3+3x^2+2x+6)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}(x^3+3x^2+2x+6)$$
$$=(3)^3+3(3)^2+2(3)+6$$
$$=66$$

بند (1-1) – في التمارين (17-19) – تمرين (19) في التمارين (17-19) ، أوجد النهايات التالية :

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^3-5x^2-12}{x-2}$$

الحل:

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

باستخدام القسمة التركيبية:

2	4	−5	0	−12
		8	6	12
	4	3	6	0
		معاملات ناتج القسمة		الباقي

القسمة التركيبية

انظر الجدول

الباقي : 0

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(4x^2+3x+6)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(4x^2+3x+6)$$

$$= 4(2)^2 + 3(2) + 6$$

$$= 28$$

البند (2-1) – نهايات تشتمل على ∞ ، $-\infty$

بند (2-1) ص 13 – تمرين (1) أوجد :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x - 2}$$

الحل:

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot \frac{1}{x}}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x}}$$

$$= \frac{0}{1 - 0}$$

شرط المقام

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 1 - \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x}$$

$$= 1 - 0 = 1 \neq 0$$

بند (2-1) ص 13 – تمرين (3) أوجد :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - 1}{2x + 3}$$

الحل:

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x\left(2 + \frac{3}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 1 - \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{1 - 0}{2 + 0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

شرط المقام

$$\lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} 2 + \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x}$$

$$= 2 + 0 = 2 \neq 0$$

البند (1-3) – صيغ غير معينة

بند (1-3) ص 15 – تمرين (1) في التمارين (1-10) ، أوجد كلا مما يلي :

$$\lim_{x\to\infty}(3x^2-5x+4)$$

الحل:

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\left(3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}3-\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=3-0+0=3$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}(3x^2-5x+4)=\infty\cdot(3)$$

بند (1-3) ص 15 – تمرين (2) في التمارين (1-10) ، أوجد كلا مما يلي :

$$\lim_{x\to\infty}(-4x^2+x-1)$$

الحل:

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\left(-4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(-4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(-4)+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=-4+0-0=-4$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}(-4x^2+x-1)=\infty\cdot(-4)$$

$$=-\infty$$

بند (1-3) ص 15 – تمرين (3) في التمارين (1-10) ، أوجد كلا مما يلي :

$$\lim_{x\to-\infty}(2x^3-3x+7)$$

الحل:

$$=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}2-\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}+\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{x^3}=2-0+0=2$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(2x^3-3x+7) = -\infty\cdot(2)$$

بند (1-3) ص 15 – تمرين (4) في التمارين (1-10) ، أوجد كلا مما يلي :

$$\lim_{x\to-\infty}(-4x^3+2x+5)$$

الحل:

$$= \lim_{x\to-\infty} x^3\left(-4+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-4+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(-4)+\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}+\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x^3} = -4+0+0 = -4$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(-4x^3+2x+5) = -\infty\cdot(-4)$$

$$= \infty$$

بند (1-3) ص 15 – تمرين (5) في التمارين (1-10) ، أوجد كلا مما يلي :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-5x+7}{-2x^2+3x-1}\right)$$

الحل:

درجة البسط = درجة المقام $= 2$

∴ النهاية = معامل أعلى قوة في البسط ÷ معامل أعلى قوة في المقام

$$= \frac{4}{-2}$$

$$= -2$$

بند (1-3) ص 15 – تمرين (6) في التمارين (1-10) ، أوجد كلا مما يلي :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+7x-1}{-5x^3+x+2}\right)$$

الحل:

درجة البسط = درجة المقام $= 3$

∴ النهاية = معامل أعلى قوة في البسط ÷ معامل أعلى قوة في المقام

$$= \frac{2}{-5}$$

$$= -\frac{2}{5}$$

بند (3-1) ص 15 – تمرين (7) في التمارين (1-10) ، أوجد كلا مما يلي :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3x+5}{2x^3+x-1}\right)$$

الحل:

درجة البسط (2) < درجة المقام (3)

∴ النهاية = صفر

$$=0$$

بند (3-1) ص 15 – تمرين (8) في التمارين (1-10) ، أوجد كلا مما يلي :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x^2-2x+3}\right)$$

الحل:

درجة البسط (0) < درجة المقام (2)

∴ النهاية = صفر

$$=0$$

بند (3-1) ص 15 – تمرين (9) أوجد :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}}$$

الحل:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}}}$$

تفريغ المطلقة

$$\sqrt{x^2}=|x|=x\ :\ x\to\infty$$

شرط ما تحت الجذر

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}$$
$$=1+0+0=1>0$$

$$= \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}}$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)} = \sqrt{1} = 1 \neq 0$$

بند (1-3) ص 15 – تمرين مشابه (10) أوجد :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}$$

الحل:

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(-2+\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2+\frac{3}{x}}{\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty}\left(-2+\frac{3}{x}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty}(-2)+\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}}{\sqrt{\lim_{x\to-\infty}4+\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x^2}}}$$

$$= \frac{-2+0}{\sqrt{4+0+0}} = \frac{-2}{2}$$

$$= -1$$

تفريغ المطلقة

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x \ : \ x \to -\infty$$

شرط ما تحت الجذر

$$\lim_{x\to-\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}4+\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x^2} = 4+0+0 = 4 > 0$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)} = \sqrt{4} = 2 \neq 0$$

بند (1-3) ص 15 – تمرين (11) إذا كانت : $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^3+bx^2+4}{3x^2-2x+1} = -1$

أوجد قيم a , b .

الحل:

$\because -1 \neq 0 \ \therefore$ حسب نظرية (11) درجة البسط = درجة المقام $= 2$

$\therefore$ معامل x^3 في البسط $= a = 0 \Rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{bx^2+4}{3x^2-2x+1} = -1$$

النهاية = معامل أعلى قوة في البسط ÷ معامل أعلى قوة في المقام

$$\frac{b}{3} = -1 \Rightarrow b = -3$$

$$\therefore a = 0 \ , \ b = -3$$

بند (1-3) ص 15 – تمرين (12) إذا كانت : $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+2x-5}{ax^3+bx^2+3} = -1$

أوجد قيم $a \ , \ b$.

الحل:

$\because -1 \neq 0 \ \therefore$ حسب نظرية (11) درجة البسط = درجة المقام $= 2$

$\therefore$ معامل x^3 في المقام $= 0 \Rightarrow a = 0$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+2x-5}{bx^2+3} = -1$$

النهاية = معامل أعلى قوة في البسط ÷ معامل أعلى قوة في المقام

$$\frac{2}{b} = -1 \Rightarrow b = -2$$

$$\therefore a = 0 \ , \ b = -2$$

البند (1-4) – نهايات بعض الدوال المثلثية

بند (1-4) ص 17 – تمرين (1) في التمارين (1-9) ، أوجد النهاية في كل مما يلي :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin 5x}{3x}$$

الحل:

$$= \lim_{x\to0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5x}{3x} \right)$$
$$= \frac{5}{3} \lim_{x\to0} \frac{\sin 5x}{5x}$$
$$= \frac{5}{3}(1)$$

بند (1-4) ص 17 – تمرين (2) في التمارين (1-9) ، أوجد النهاية في كل مما يلي :

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$$

الحل:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{\sin 2x\,(1+\cos 2x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 2x}{\sin 2x\,(1+\cos 2x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{\sin 2x\,(1+\cos 2x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \sin 2x}{\lim\limits_{x\to 0} 1 + \lim\limits_{x\to 0} \cos 2x}$$
$$= \frac{0}{1+1}$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos 2x)$$
$$= \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \cos 2x$$
$$= 1+1 = 2 \neq 0$$

بند (1-4) ص 17 – تمرين (3) في التمارين (1-9) ، أوجد النهاية في كل مما يلي :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos 2x}$$

الحل:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\cos 2x)}{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\cos 2x)}{1-\cos^2 2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\cos 2x)}{\sin^2 2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 2x} \cdot \lim_{x\to 0}(1+\cos 2x)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 2x}\right)^2 \cdot \left(\lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \cos 2x\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 1\right)^2 (1+1) = \frac{1}{4}\cdot 2$$
$$= \frac{1}{2}$$

بند (1-4) ص 17 – تمرين (4) في التمارين (1-9) ، أوجد النهاية في كل مما يلي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+\cos x}$$

الحل:

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0} x^2}{\lim\limits_{x\to 0} 1+\lim\limits_{x\to 0}\cos x}$$
$$=\frac{0}{1+1}=\frac{0}{2}$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$
$$=\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos x$$
$$=1+1=2\neq 0$$

بند (1-4) ص 17 – تمرين (5) في التمارين (1-9) ، أوجد النهاية في كل مما يلي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}$$

الحل:

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0} 1-\lim\limits_{x\to 0}\tan x}{\lim\limits_{x\to 0}\sin x-\lim\limits_{x\to 0}\cos x}$$
$$=\frac{1-0}{0-1}$$
$$=-1$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 0}(\sin x-\cos x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\sin x-\lim_{x\to 0}\cos x$$
$$=0-1=-1\neq 0$$

بند (1-4) ص 17 – تمرين (8) في التمارين (1-9) ، أوجد النهاية في كل مما يلي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

الحل:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} 1+\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\frac{1}{1+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$
$$=\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos x$$
$$=1+1=2\neq 0$$

بند (1-4) ص 17 – تمرين (9) في التمارين (1-9) ، أوجد النهاية في كل مما يلي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$$

الحل:

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)\\&=\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos x=1+1\end{aligned}$$

$$=2$$

بند (1-4) ص 17 – تمرين (10) في التمارين (10-12) ، أوجد النهاية في كل مما يلي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 7x}$$

الحل:

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{7x}{\sin 7x}\cdot\frac{4x}{7x}\right)\\&=\frac{4}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 7x}\\&=\frac{4}{7}(1)(1)\end{aligned}$$

بند (1-4) ص 17 – تمرين (11) في التمارين (10-12) ، أوجد النهاية في كل مما يلي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\tan 2x}$$

الحل:

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\tan 2x}\cdot\frac{3x}{2x}\right)\\&=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 2x}\\&=\frac{3}{2}(1)(1)\end{aligned}$$

بند (1-4) ص 17 – تمرين (12) في التمارين (12-10) ، أوجد النهاية في كل مما يلي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}$$

الحل:

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos 5x}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x}$$
$$= \frac{\cos 0}{\cos 0} = \frac{1}{1}$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 0}\cos 3x$$
$$= \cos 0 = 1 \neq 0$$

البند (1-5) – الاتصال

بند (1-5) ص 19 – تمرين (6) في التمارين (9-6) : ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & : x \geq 0 \\ 5-x & : x < 0 \end{cases} \quad , \quad x = 0$$

الحل:

$$f(0) = 0 + 5 = 5 \ ①$$

②

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$
$$= \lim_{x\to 0^+}(x+5)$$
$$= 0 + 5 = 5$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)$$
$$= \lim_{x\to 0^-}(5-x)$$
$$= 5 - 0 = 5$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 5 \therefore$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 5 \therefore$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 5 \ ③$$

$\therefore f$ **متصلة عند** $x = 0$

بند (1-5) ص 19 – تمرين (7) في التمارين (6-9) : ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} & : x \neq -1 \\ -1 & : x = -1 \end{cases} \quad , \quad x = -1$$

الحل:

$$h(-1) = -1 \ ①$$

$$\lim_{x \to -1} h(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} \ ②$$

$\dfrac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x - 4)(x + 1)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1} (x - 4)$$

$$= -1 - 4 = -5$$

$$\lim_{x \to -1} h(x) = -5 \neq h(-1) = -1 \ ③$$

$\therefore h$ **ليست متصلة عند** $x = -1$

بند (1-5) ص 19 – تمرين (8) ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{|x|} & : x \neq 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases} \quad , \quad x = 0$$

الحل:

تفريغ المطلقة

$$|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-3)}{x} = x - 3 & : x > 0 \\ \dfrac{x(x-3)}{-x} = -x + 3 & : x < 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$

$$f(0) = -3 \therefore$$

من جهة اليمين:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 3)$$

$$= 0 - 3 = -3$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x + 3)$$

$$= -0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) \because$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة $\therefore$

$\therefore f$ **ليست متصلة عند** $x = 0$

بند (1-5) ص 19 – تمرين (9) ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & : x = 1 \end{cases} \quad , \quad x = 1$$

الحل:

$$g(1) = \frac{1}{2} \text{ ①}$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} \text{ ②}$$

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة (نضرب بالمرافق)

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)} + \lim\limits_{x\to 1} 2}$$

$$= \frac{1+1}{\sqrt{4}+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = \frac{1}{2} \text{ ③}$$

$\therefore g$ متصلة عند $x = 1$

شرط ما تحت الجذر

$$\lim_{x\to 1}(x^2+3)$$
$$= 1+3 = 4 > 0$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 1}(\sqrt{x^2+3}+2)$$
$$= \sqrt{\lim_{x\to 1}(x^2+3)} + \lim_{x\to 1} 2$$
$$= 2+2 = 4 \neq 0$$

بند (1-5) ص 19 – تمرين (10) أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & : x < 3 \\ 2ax & : x \geq 3 \end{cases}$$

الحل:

$\because f$ متصلة عند $x = 3$

$\therefore \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = f(3)$

من جهة اليمين:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 2ax$$
$$= 2a(3) = 6a$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x^2 - 1)$$
$$= (3)^2 - 1 = 8$$

$\therefore 6a = 8$

$$a = \frac{8}{6}$$

$\therefore a = \frac{4}{3}$

حساب

$f(3) = 2a(3) = 6a$

البند (1-6) – نظريات الاتصال

بند (1-6) ص 23 – تمرين (2) ابحث اتصال كل دالة مما يلي عند $x = c$:

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} - \frac{3}{x} \quad , \quad x = -1$$

الحل:

نفرض $g(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ ، $h(x) = \frac{3}{x}$

فيكون $f(x) = g(x) - h(x)$

① ندرس اتصال g

g دالة نسبية متصلة عند كل

$x \in \mathbb{R}$

$\therefore g$ متصلة عند $x = -1$

② ندرس اتصال h

h دالة نسبية متصلة عند كل

$x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\therefore h$ متصلة عند $x = -1$

من ① ، ② $f = g - h$ متصلة عند $x = -1$ (فرق دالتين متصلتين)

$\therefore f$ **متصلة عند** $x = -1$

شرط مقام g

$x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$ (لا يوجد حل)

$x^2 + 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

شرط مقام h

$x = 0$

$-1 \neq 0$

بند (1-6) ص 23 – تمرين (3) ابحث اتصال كل دالة مما يلي عند $x = c$:

$$f(x) = x^2 + 3x + |x| \quad , \quad x = 3$$

الحل:

نفرض $g(x) = x^2 + 3x$ ، $h(x) = |x|$

فيكون $f(x) = g(x) + h(x)$

① ندرس اتصال g

g كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore g$ متصلة عند $x = 3$

② ندرس اتصال h

$h(x) = |x|$ دالة القيمة المطلقة

متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

$\therefore h$ متصلة عند $x = 3$

من ① ، ② $f = g + h$ متصلة عند $x = 3$ (مجموع دالتين متصلتين)

$\therefore f$ **متصلة عند** $x = 3$

بند (1-6) ص 23 – تمرين (4) ابحث اتصال كل دالة مما يلي عند $x = c$:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1} \quad , \quad x = -1$$

الحل:

نفرض $h(x) = \sqrt[3]{x}$ ، $g(x) = x^2 + 1$

فيكون $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$

(1) $h(x) = \sqrt[3]{x}$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

$\therefore h$ متصلة عند $x = -1$

(2) $g(x) = x^2 + 1$ كثيرة حدود متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

$\therefore g$ متصلة عند $x = -1$

(3) $g(-1) = (-1)^2 + 1 = 2 \neq 0$

من (1) ، (2) ، (3) $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ متصلة عند $x = -1$ (نظرية)

$\therefore f$ **متصلة عند** $x = -1$

بند (1-6) ص 23 – تمرين (5) ابحث اتصال كل دالة مما يلي عند $x = c$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 4} \quad , \quad x = -5$$

الحل:

نفرض $h(x) = x^2 + 5x + 4$ فيكون $f(x) = \sqrt{h(x)}$

(1) h كثيرة حدود متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ $\therefore$ h متصلة عند $x = -5$

$$h(-5) = (-5)^2 + 5(-5) + 4 = 4 > 0 \quad (2)$$

من (1) ، (2) دالة الجذر f متصلة عند $x = -5$ (نظرية)

بند (1-6) ص 23 – تمرين (6) الدالتان g , f معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x^2-3$, $f(x)=-x+2$

أوجد :

(a) $(g\circ f)(x)$

(b) $(g\circ f)(-1)$

(c) $(f\circ g)(x)$

(d) $(f\circ g)(-1)$

الحل:

(a)

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-x+2)$$
$$=(-x+2)^2-3$$
$$=x^2-4x+4-3=x^2-4x+1$$
$$D_{g\circ f}=\mathbb{R}$$

(b)

$$(g\circ f)(-1)=(-1)^2-4(-1)+1$$
$$=1+4+1=6$$

تحقق

$f(-1)=1+2=3$

$g(3)=9-3=6$

$g(-1)=1-3=-2$

$f(-2)=2+2=4$

(c)

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-3)$$
$$=-(x^2-3)+2$$
$$=-x^2+3+2=-x^2+5$$
$$D_{f\circ g}=\mathbb{R}$$

(d)

$$(f\circ g)(-1)=-(-1)^2+5$$
$$=-1+5=4$$

(a) $(g\circ f)(x)=x^2-4x+1$ ،

(b) $=6$ ،

(c) $(f\circ g)(x)=-x^2+5$ ،

(d) $=4$

بند (1-6) ص 23 – تمرين (7) الدالتان g , f معرفتان كما يلي : $g(x)=x^2+4$, $f(x)=\sqrt{x}$

أوجد :

(a) $(f\circ g)(x)$

(b) $(f\circ g)(2)$

(c) $(g\circ f)(x)$

(d) $(g\circ f)(2)$

الحل:

(a)

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+4)$$
$$=\sqrt{x^2+4}$$
$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}=\mathbb{R}$$

(b)

$$(f\circ g)(2)=\sqrt{(2)^2+4}$$
$$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

(c)

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})$$
$$=(\sqrt{x})^2+4=x+4$$
$$D_{g\circ f}=\{x\in D_f : f(x)\in D_g\}=[0,\infty)$$
$$(g\circ f)(x)=x+4\ :\ x\geq 0\ \therefore$$

(d)

$$(g\circ f)(2)=2+4=6$$

الشروط

$D_g=\mathbb{R}$ ، $D_f=[0,\infty)$

$x^2+4>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

$\sqrt{x}\ :\ x\geq 0$

(a) $(f\circ g)(x)=\sqrt{x^2+4}$ ،

(b) $=2\sqrt{2}$ ،

(c) $(g\circ f)(x)=x+4\ :\ x\geq 0$ ،

(d) $=6$

بند (1-6) ص 23 – تمرين (9) لتكن : $g(x)=\sqrt{x+4}$ ، $f(x)=2x^2-3$ ابحث اتصال الدالة $g\circ f$ عند $x=-2$.

الحل:

$$g(x)=\sqrt{x+4}\ ،\ f(x)=2x^2-3$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x^2-3)$$
$$=\sqrt{2x^2-3+4}=\sqrt{2x^2+1}$$

$f(x)=2x^2-3$ (1)

f كثيرة حدود متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة عند $x=-2$

$f(-2)=2(-2)^2-3=5$ (2)

$g(x)=\sqrt{x+4}$ (3)

نفرض $h(x)=x+4$ فيكون $g(x)=\sqrt{h(x)}$

(I) h كثيرة حدود متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}\ \therefore$

متصلة عند $x=5$

(II) $h(5)=5+4=9>0$

من (I) ، (II) g متصلة عند $x=5$ (نظرية)

من (1) ، (2) ، (3) $g\circ f$ متصلة عند $x=-2$ (نظرية)

بند (1-6) ص 23 – تمرين (10) ابحث اتصال الدالة f : $f(x)=\left|\sqrt{x}-3\right|$ عند $x=4$

الحل:

نفرض $h(x)=|x|\ ،\ g(x)=\sqrt{x}-3$

$$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(\sqrt{x}-3)$$
$$=|\sqrt{x}-3|=f(x)$$

ندرس اتصال $h\circ g$ عند $x=4$

(1) $g(x)=\sqrt{x}-3$ متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}^+$

$\therefore g$ متصلة عند $x=4$

(2) $g(4)=\sqrt{4}-3=-1$

(3) $h(x)=|x|$ متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$

$\therefore h$ متصلة عند $x=-1$

من (1) ، (2) ، (3) $f=h\circ g$ متصلة عند $x=4$ (نظرية)

بند (1-6) ص 23 – تمرين (11) ابحث اتصال الدالة g : $g(x)=\sqrt{x^2+1}-|x-3|$ عند $x=3$

الحل:

نفرض $k(x)=\sqrt{x^2+1}$ ، $m(x)=|x-3|$

فيكون $g(x)=k(x)-m(x)$

① ندرس اتصال k

نفرض $p(x)=x^2+1$

فيكون $k(x)=\sqrt{p(x)}$

(1) p كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore p$ متصلة عند $x=3$

(2) $p(3)=(3)^2+1=10>0$

من (1) ، (2) $\therefore k$ متصلة عند $x=3$

② ندرس اتصال m

نفرض $u(x)=x-3$ ، $v(x)=|x|$

$(v\circ u)(x)=v(x-3)$

$=|x-3|=m(x)$

(1) u كثيرة حدود متصلة عند $x=3$

(2) $u(3)=3-3=0$

(3) $v(x)=|x|$ متصلة عند $x=0$

من (1) ، (2) ، (3) $\therefore m$ متصلة عند $x=3$

من ① ، ② $g=k-m$ متصلة عند $x=3$ (فرق دالتين متصلتين)

$\therefore g$ متصلة عند $x=3$

البند (1-7) – الاتصال على فترة

بند (1-7) ص 26 – تمرين (1) ادرس اتصال كل دالة مما يلي على الفترة المبينة :

$$f(x)=x^2+2x-3 \quad , \quad [-2\,,5]$$

الحل:

f كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$[-2\,,5]\subset\mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة على $[-2\,,5]$

بند (1-7) ص 26 – تمرين (2) ادرس اتصال كل دالة مما يلي على الفترة المبينة :

$$f(x)=\frac{7x}{x^2+5} \quad , \quad [1\,,3]$$

الحل:

f دالة نسبية متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

$[1\,,3] \subset \mathbb{R}$

$\therefore f$ **متصلة على** $[1\,,3]$

شرط المقام

$x^2+5=0$

$x^2=-5$ (لا يوجد حل)

$x^2+5 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

بند (1-7) ص 26 – تمرين (3) ادرس اتصال كل دالة مما يلي على الفترة المبينة :

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-3} \quad , \quad [0\,,5]$$

الحل:

f دالة نسبية متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}-\{3\}$

$3 \in [0\,,5]$ ، $f(3)$ غير معرفة

$\therefore f$ غير متصلة عند $x=3$

$\therefore f$ متصلة على $[0\,,3) \cup (3\,,5]$ فقط

$\therefore f$ **غير متصلة على** $[0\,,5]$

شرط المقام

$x-3=0$

$x=3$

$3 \in [0\,,5]$

بند (1-7) ص 26 – تمرين (4) ادرس اتصال كل دالة مما يلي على الفترة المبينة :

$$f(x)=\frac{-x+3}{x^2-5x+4} \quad , \quad [-2\,,6]$$

الحل:

f دالة نسبية متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}-\{1\,,4\}$

$1 \in [-2\,,6]$ ، $4 \in [-2\,,6]$

$f(1)$ ، $f(4)$ غير معرفتين

$\therefore f$ غير متصلة عند $x=1$ ، $x=4$

$\therefore f$ متصلة على $[-2\,,1) \cup (1\,,4) \cup (4\,,6]$ فقط

$\therefore f$ **غير متصلة على** $[-2\,,6]$

شرط المقام

$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$x=1\,,\ x=4$

بند (1-7) ص 26 – تمرين (5) ادرس اتصال كل دالة مما يلي على الفترة المبينة :

$$f(x)=\begin{cases}-5 & : x=-3\\ -x^2+4 & : -3<x<4\\ -10 & : x=4\end{cases} \quad , \quad [-3\,,4]$$

الحل:

$$D_f=[-3\,,4]$$

① ندرس اتصال f عند $x=-3$ من جهة اليمين

$$f(-3)=-5$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^+}(-x^2+4)$$

$$=-(-3)^2+4=-5$$

$$f(-3)=\lim_{x\to -3^+} f(x)$$

$\therefore f$ متصلة عند $x=-3$ من جهة اليمين

② ندرس اتصال f عند $x=4$ من جهة اليسار

$$f(4)=-10$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(-x^2+4)$$

$$=-(4)^2+4=-12$$

$$f(4)\neq \lim_{x\to 4^-} f(x)$$

$\therefore f$ غير متصلة عند $x=4$ من جهة اليسار

③ نفرض $g(x)=-x^2+4$

g كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore g$ متصلة على الفترة $(-3\,,4)\subset\mathbb{R}$

ولكن $f(x)=g(x) \quad \forall x\in(-3\,,4)$

$\therefore f$ متصلة على $(-3\,,4)$

من ① ، ③ f متصلة على $[-3\,,4)$

$\therefore f$ متصلة على $[-3\,,4)$ وغير متصلة على $[-3\,,4]$

بند (1-7) ص 26 – تمرين (6)

الدالة معرفة كما يلي : $f(x)=\begin{cases}-x+4 & : x\le 7\\ \dfrac{9}{-x+4} & : x>7\end{cases}$ ادرس اتصال الدالة

الحل:

$D_f=(-\infty,7]\cup(7,\infty)=\mathbb{R}$

① نفرض $g(x)=-x+4$

g كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore g$ متصلة على $(-\infty,7]$

ولكن $f(x)=g(x)\quad \forall x\in(-\infty,7]$

$\therefore f$ متصلة على $(-\infty,7]$

② نفرض $h(x)=\dfrac{9}{-x+4}$

h دالة نسبية متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}-\{4\}$

$\therefore h$ متصلة على $(7,\infty)$ حيث $4\notin(7,\infty)$

ولكن $f(x)=h(x)\quad \forall x\in(7,\infty)$

$\therefore f$ متصلة على $(7,\infty)$

③ ندرس اتصال f عند $x=7$ من جهة اليمين

$f(7)=-7+4=-3$

$$\lim_{x\to 7^+} f(x)=\lim_{x\to 7^+}\frac{9}{-x+4}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 7^+}9}{\lim\limits_{x\to 7^+}(-x+4)}=\frac{9}{-3}=-3$$

$\therefore f(7)=\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)$

$\therefore f$ متصلة عند $x=7$ من جهة اليمين

من ① ، ② ، ③ f متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

شرط المقام

$-x+4=0\Rightarrow x=4$

$4\notin(7,\infty)$

شرط المقام

$\lim\limits_{x\to 7^+}(-x+4)$

$=-7+4=-3\neq 0$

بند (1-7) ص 26 – تمرين (7)

الدالة معرفة كما يلي : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+9} & : x\le 0\\ \dfrac{6}{x+3} & : x>0\end{cases}$ ادرس اتصال الدالة

على مجالها .

الحل:

$$D_f = (-\infty, 0] \cup (0, \infty) = \mathbb{R}$$

① نفرض $g(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

نفرض $p(x) = x^2 + 9$ فيكون $g(x) = \sqrt{p(x)}$

(1) p كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

(2) $p(x) = x^2 + 9 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

من (1) ، (2) g متصلة على $\mathbb{R}$ (نظرية) $\therefore g$ متصلة على

$(-\infty, 0]$

ولكن $f(x) = g(x) \quad \forall x \in (-\infty, 0]$

$\therefore f$ متصلة على $(-\infty, 0]$

② نفرض $h(x) = \dfrac{6}{x + 3}$

h دالة نسبية متصلة عند كل $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

$\therefore h$ متصلة على $(0, \infty)$ حيث $-3 \notin (0, \infty)$

ولكن $f(x) = h(x) \quad \forall x \in (0, \infty)$

$\therefore f$ متصلة على $(0, \infty)$

③ ندرس اتصال f عند $x = 0$ من جهة اليمين

$$f(0) = \sqrt{0 + 9} = 3$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{6}{x + 3}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 0^+} 6}{\lim\limits_{x \to 0^+} (x + 3)} = \frac{6}{3} = 2$$

$$f(0) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) \therefore$$

$\therefore f$ غير متصلة عند $x = 0$ من جهة اليمين

$\therefore f$ غير متصلة عند $x = 0$

$\therefore f$ متصلة على $(-\infty, 0]$ وعلى $(0, \infty)$ وغير متصلة عند $x = 0$ ، أي غير متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

شرط المقام

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$-3 \notin (0, \infty)$

شرط المقام

$\lim\limits_{x \to 0^+} (x + 3)$

$= 0 + 3 = 3 \neq 0$

بند (1-7) ص 26 – تمرين (12) لتكن $f : f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$ ، أوجد D_f ثم ادرس اتصالها على $[0\,,4]$

الحل:

$$D_f = \{x : -x^2 + 5x + 6 \geq 0\}$$

المعادلة المناظرة: $-x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$$x = 6 \quad , \quad x = -1$$

x	$-\infty$	-1		6	$+\infty$
إشارة $-x^2 + 5x + 6$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$D_f = [-1\,,6]$$

نفرض $g(x) = -x^2 + 5x + 6$ فيكون

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$

(1) g كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore g$ متصلة على $[0\,,4]$

(2) $\forall x \in [0\,,4] \subseteq D_f \quad g(x) \geq 0$

من (1) ، (2) $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة على $[0\,,4]$

(نظرية)

f ، $D_f = [-1\,,6]$ متصلة على $[0\,,4]$

شرط ما تحت الجذر

$-x^2 + 5x + 6 \geq 0$

بند (1-7) ص 26 – تمرين (13) ادرس اتصال كل من الدوال التالية على مجالها .

$$f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$$

الحل:

$$D_f = \{x : 8 - 2x^2 \geq 0\}$$

المعادلة المناظرة: $8 - 2x^2 = 0$

$$2(4 - x^2) = 0$$

$$2(2 - x)(2 + x) = 0$$

$$x = 2 \quad , \quad x = -2$$

شرط ما تحت الجذر

$8 - 2x^2 \geq 0$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
إشارة $8-2x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$D_f=[-2\,,2]$$

نفرض $h(x)=8-2x^2$ فيكون $f(x)=\sqrt{h(x)}$

(1) h كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore h$ متصلة على $[-2\,,2]$

(2) $\forall x\in[-2\,,2]\quad h(x)\geq 0$

من (1) ، (2) $f(x)=\sqrt{h(x)}$ متصلة على $[-2\,,2]$

(نظرية)

$\therefore f$ متصلة على مجالها $[-2\,,2]$

بند (1-7) ص 26 – تمرين (14) ادرس اتصال كل من الدوال التالية على مجالها .

$$f(x)=\sqrt{x^2-1}$$

الحل:

شرط ما تحت الجذر

$x^2-1\geq 0$

$$D_f=\{x:x^2-1\geq 0\}$$

المعادلة المناظرة: $x^2-1=0$

$$(x-1)(x+1)=0$$

$$x=1\quad,\quad x=-1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
إشارة x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

$$D_f=(-\infty\,,-1]\cup[1\,,\infty)$$

نفرض $h(x)=x^2-1$ فيكون $f(x)=\sqrt{h(x)}$

(1) h كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore h$ متصلة على $(-\infty\,,-1]$ وعلى $[1\,,\infty)$

(2) $\forall x\in(-\infty\,,-1]\cup[1\,,\infty)\quad h(x)\geq 0$

من (1) ، (2) $f(x)=\sqrt{h(x)}$ متصلة على $(-\infty\,,-1]$

وعلى $[1\,,\infty)$ (نظرية)

$\therefore f$ **متصلة على مجالها** $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

بند (1-7) ص 26 – تمرين (15) ادرس اتصال كل من الدوال التالية على $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 2}$$

الحل:

نفرض $h(x) = x^2 + 3x - 2$ فيكون $f(x) = \sqrt[3]{h(x)}$

(1) h كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

(2) دليل الجذر فردي $(n = 3)$ فلا يوجد شرط على $h(x)$

$$D_f = \mathbb{R}$$

من (1) ، (2) $f(x) = \sqrt[3]{h(x)}$ متصلة على $\mathbb{R}$ (نظرية)

$\therefore f$ **متصلة على** $\mathbb{R}$

بند (1-7) ص 26 – تمرين (16) ادرس اتصال كل من الدوال التالية على $\mathbb{R}$.

$$f(x) = |3x^2 + 4x - 1|$$

الحل:

نفرض $g(x) = 3x^2 + 4x - 1$ ، $h(x) = |x|$

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(3x^2 + 4x - 1)$$

$$= |3x^2 + 4x - 1| = f(x)$$

(1) $g(x) = 3x^2 + 4x - 1$ كثيرة حدود

$\therefore g$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

(2) $h(x) = |x|$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

$\therefore h$ متصلة عند $g(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$

من (1) ، (2) $f = h \circ g$ متصلة على $\mathbb{R}$ (نظرية)

البند (1-2) – معدلات التغير وخطوط التماس

بند (1-2) ص 33 – تمرين (4) أوجد ميل المماس في كل مما يلي عند النقاط المبينة :

$$f(x) = 4 - x^2 \quad , \quad x = 1$$

الحل:

إذا وجدت $m = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 - (1+h)^2 - 3}{h}$$

$\dfrac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 - 1 - 2h - h^2 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2h - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-2-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-2 - h)$$

$$= -2 - 0 = -2$$

ميل المماس $m = -2$

حساب $f(1)$

$$f(1) = 4 - (1)^2$$

$$= 3$$

بند (1-2) ص 33 – تمرين (3) أوجد ميل المماس في كل مما يلي عند النقاط المبينة :

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3} \quad , \quad x = 2$$

الحل:

إذا وجدت $m = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2+h+2}{2+h-3} - (-4)}{h}$$

$\dfrac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{h+4}{h-1} + 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h + 4 + 4(h-1)}{h(h-1)}$$

حساب $f(2)$

$$f(2) = \frac{2+2}{2-3}$$

$$= -4$$

شرط المقام

$$\lim_{h \to 0} (h - 1)$$

$$= 0 - 1 = -1 \neq 0$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5h}{h(h-1)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{5}{h-1}$$
$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0} 5}{\lim\limits_{h\to 0}(h-1)}$$
$$= \frac{5}{-1} = -5$$

ميل المماس $m = -5$

البند (2-2) – المشتقة

بند (2-2) ص 35 – تمرين (1)

استخدم التعريف $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لإيجاد مشتقة الدالة f :

$f(x) = \frac{3}{x}$ عند $x = 3$

الحل:

إذا وجدت $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{3+h} - 1}{h}$$

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3-(3+h)}{h(3+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(3+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{3+h}$$
$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0}(-1)}{\lim\limits_{h\to 0}(3+h)}$$
$$= \frac{-1}{3+0} = -\frac{1}{3}$$

$f'(3) = -\frac{1}{3}$

حساب $f(3)$

$$f(3) = \frac{3}{3} = 1$$

شرط المقام

$$\lim_{h\to 0}(3+h) = 3+0 = 3 \neq 0$$

بند (2-2) ص 35 – تمرين (2) استخدم التعريف $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لإيجاد مشتقة الدالة f :

$f(x)=3x^2$ عند $x=1$

الحل:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$ إذا وجدت

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{x-1}$$

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x^2-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}3(x+1)$$

$$=3(1+1)=6$$

$$f'(1)=6$$

حساب $f(1)$

$$f(1)=3(1)^2$$

$$=3$$

بند (2-2) ص 35 – تمرين (3) بيّن أنّ الدالة f لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار عند $x=1$ لكن ليس لها مشتقة عند $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & ,x\le 1\\ x & ,x>1\end{cases}$$

الحل:

من جهة اليمين:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}$$

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$=\lim_{x\to 1^+}1$$

$$=1$$

من جهة اليسار:

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}(x^2+x+1)$$

$$=1+1+1=3$$

$\therefore$ للدالة مشتقة لجهة اليمين $=1$ ومشتقة لجهة اليسار $=3$ عند

$$x=1$$

حساب $f(1)$

$$f(1)=(1)^3$$

$$=1$$

$\because f'_+(1) \neq f'_-(1) \therefore f'(1)$ غير موجودة

$f'(1)$ غير موجودة $\therefore f'_+(1) = 1 \ ، \ f'_-(1) = 3$

بند (2-2) ص 35 – تمرين (4)

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & , x \leq 1 \\ 4x - 1 & , x > 1 \end{cases}$

ابحث قابلية الاشتقاق عند $x = 1$.

الحل:

من جهة اليمين:

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{4x - 1 - 3}{x - 1}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{4(x-1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} 4$$
$$= 4$$

من جهة اليسار:

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+3)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1^-} (x + 3)$$
$$= 1 + 3 = 4$$

حساب $f(1)$

$$f(1) = (1)^2 + 2(1)$$
$$= 3$$

$\because f'_+(1) = f'_-(1) = 4$

$f'(1) = 4$ $\therefore f$ قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

بند (2-2) ص 35 – تمرين (5)

لتكن الدالة f : $f(x) = |x - 3|$

بيّن أن الدالة f متصلة عند $x = 3$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها .

الحل:

أولًا: الاتصال عند $x = 3$

نفرض $g(x) = x - 3$ ، $h(x) = |x|$

$$(h \circ g)(x) = h(g(x))$$
$$= h(x - 3) = |x - 3| = f(x)$$

ندرس اتصال $h \circ g$ عند $x = 3$

(1) $g(x) = x - 3$

(3) $h(x) = |x|$

h متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

تفريغ المطلقة

$|x - 3| = x - 3 \ : \ x \geq 3$

$|x - 3| = -(x - 3) \ : \ x < 3$

حساب $f(3)$

$$f(3) = |3 - 3|$$
$$= 0$$

كثيرة حدود متصلة عند كل

$x \in \mathbb{R}$

$\therefore g$ متصلة عند $x = 3$

$g(3) = 3 - 3$ (2)

$= 0$

$\therefore h$ متصلة عند $x = 0$

من (1) ، (2) ، (3) $f(x) = (h \circ g)(x)$ متصلة عند $x = 3$ (نظرية)

ثانيًا: قابلية الاشتقاق عند $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & : x \geq 3 \\ -(x-3) & : x < 3 \end{cases}$$

من جهة اليمين:

$$f'_+(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

إذا وجدت

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{(x-3) - 0}{x - 3}$$

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x \to 3^+} 1$$

$$= 1$$

من جهة اليسار:

$$f'_-(3) = \lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

إذا وجدت

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{-(x-3) - 0}{x - 3}$$

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x \to 3^-} (-1)$$

$$= -1$$

$\because f'_+(3) \neq f'_-(3)$

$\therefore f'(3)$ غير موجودة

$\therefore f$ متصلة عند $x = 3$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها

بند (2-2) ص 35 – تمرين (6)

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 & , x = 0 \\ 2 & , x > 0 \end{cases}$

بيّن أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

الحل:

ندرس اتصال f عند $x = 0$

$f(0) = 1$

من جهة اليمين:

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

$\because \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

$\therefore f$ غير متصلة عند $x = 0$

$\because$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند $x = a$ فإنها متصلة عند $x = a$ (نظرية)

$\therefore$ الدالة غير المتصلة عند $x = 0$ غير قابلة للاشتقاق عنده

$\therefore f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

بند (2-2) ص 35 – تمرين (7)

لتكن الدالة g : $g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & , x \leq 0 \\ 2x+1 & , x > 0 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $g'(0)$.

الحل:

من جهة اليمين:

$$g'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

إذا وجدت

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x+1-1}{x}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 2$$

$$= 2$$

من جهة اليسار:

$$g'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

إذا وجدت

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(x+1)^2-1}{x}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x+2)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} (x+2)$$

$$= 0+2 = 2$$

حساب $g(0)$

$$g(0) = (0+1)^2$$

$$= 1$$

$\because g'_+(0) = g'_-(0) = 2$

$\therefore g'(0) = 2$

بند (2-2) ص 35 – تمرين مشابه (8)

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}x^2 & ,x\le 2\\ 4x-4 & ,x>2\end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(2)$.

الحل:

من جهة اليمين:

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

إذا وجدت

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-4-4}{x-2}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{4(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}4$$

$$=4$$

من جهة اليسار:

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

إذا وجدت

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}(x+2)$$

$$=2+2=4$$

حساب $f(2)$

$$f(2)=(2)^2$$

$$=4$$

$\because f'_+(2)=f'_-(2)=4$

$\therefore f'(2)=4$

بند (2-2) ص 35 – تمرين (9)

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}x^3 & ,x\le 1\\ 3x+k & ,x>1\end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$

فأوجد قيمة k

الحل:

$\because f$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$

$\therefore f$ متصلة عند $x=1$ (نظرية)

$\therefore \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3x+k)$$

$$=3(1)+k$$

$$=3+k$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^3$$

$$=(1)^3$$

$$=1$$

$$3+k=1$$

حساب $f(1)$

$$f(1)=(1)^3$$

$$=1$$

$$k = -2 \Rightarrow$$

التحقق: $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & : x > 1 \\ x^3 & : x \leq 1 \end{cases}$

من جهة اليمين:

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{3x - 2 - 1}{x - 1}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{3(x-1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} 3$$
$$= 3$$

من جهة اليسار:

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1^-} (x^2 + x + 1)$$
$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

$\because f'_+(1) = f'_-(1) = 3$

$\therefore f$ قابلة للاشتقاق عند $x = 1$ عندما $k = -2$

البند (2-3) – قواعد الاشتقاق

بند (2-3) ص 38 – تمرين (1)

أوجد $\frac{dy}{dx}$:

$$y = \frac{x^3}{3} - x$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(3x^2) - 1$$
$$= x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 1$$

بند (2-3) ص 38 – تمرين (2)

أوجد $\frac{dy}{dx}$:

$$y = 2x + 1$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2(1) + 0$$
$$= 2$$

بند (2-3) ص 38 – تمرين (3) أوجد $\frac{dy}{dx}$:

$$y = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 15$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 7(3x^2) + 2(2x) + 0$$
$$= 4x^3 - 21x^2 + 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 21x^2 + 4x$$

بند (2-3) ص 38 – تمرين (4) أوجد $\frac{dy}{dx}$:

$$y = 4x^2 - 8x + 1$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x) - 8(1) + 0$$
$$= 8x - 8$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x - 8$$

بند (2-3) ص 38 – تمرين (5) أوجد $f'(x)$:

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^3 + 2x^2 + 1)$$

الحل:

$$f'(x) = (x^2 - 5x + 6)'(x^3 + 2x^2 + 1) + (x^2 - 5x + 6)(x^3 + 2x^2 + 1)'$$
$$= (2x - 5)(x^3 + 2x^2 + 1) + (x^2 - 5x + 6)(3x^2 + 4x)$$
$$= (2x^4 + 4x^3 + 2x - 5x^3 - 10x^2 - 5)$$
$$+(3x^4 + 4x^3 - 15x^3 - 20x^2 + 18x^2 + 24x)$$
$$= (2x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x - 5) + (3x^4 - 11x^3 - 2x^2 + 24x)$$
$$= 5x^4 - 12x^3 - 12x^2 + 26x - 5$$

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 - 12x^2 + 26x - 5$$

بند (2-3) ص 38 – تمرين (6) أوجد $f'(x)$:

$$f(x) = (2x^5 + 4x)(5 - x^2)$$

الحل:

$$f'(x) = (2x^5 + 4x)'(5 - x^2) + (2x^5 + 4x)(5 - x^2)'$$
$$= (10x^4 + 4)(5 - x^2) + (2x^5 + 4x)(-2x)$$
$$= (50x^4 - 10x^6 + 20 - 4x^2) + (-4x^6 - 8x^2)$$
$$= -14x^6 + 50x^4 - 12x^2 + 20$$

$$f'(x) = -14x^6 + 50x^4 - 12x^2 + 20$$

بند (2-3) ص 38 – تمرين (7) لتكن: $y = \dfrac{x^2 + 3}{x}$ أوجد $\dfrac{dy}{dx}$

(a) باستخدام قاعدة القسمة

(b) بقسمة حدود البسط على المقام أولًا ثم إجراء الاشتقاق

الحل:

(a)

$$\frac{(x_1^2 + 3)' \cdot x - (x^2 + 3) \cdot (x)'}{x^2}$$
$$= \frac{2x \cdot x - (x^2 + 3)(1)}{x^2}$$
$$= \frac{2x^2 - x^2 - 3}{x^2}$$
$$= \frac{x^2 - 3}{x^2}$$

(b)

$$y = \frac{x^2}{x} + \frac{3}{x} = x + 3x^{-1}$$
$$\frac{dy}{dx} = 1 + 3(-1)x^{-2}$$
$$= 1 - \frac{3}{x^2}$$
$$= \frac{x^2 - 3}{x^2}$$ وهي نفس النتيجة

شرط المقام

$x \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 3}{x^2}$$ **(a)**، $$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 - 3}{x^2}$$ **(b)**

بند (2-3) ص 38 – تمرين (8)

أوجد $\frac{dy}{dx}$:

$$y = \frac{x^2}{1 - x^3}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2)'(1 - x^3) - x^2(1 - x^3)'}{(1 - x^3)^2}$$
$$= \frac{2x(1 - x^3) - x^2(-3x^2)}{(1 - x^3)^2}$$
$$= \frac{2x - 2x^4 + 3x^4}{(1 - x^3)^2}$$
$$= \frac{x^4 + 2x}{(1 - x^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + 2x}{(1 - x^3)^2}$$

شرط المقام

$1 - x^3 \neq 0$

$x^3 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$

بند (2-3) ص 38 – تمرين (9)

أوجد $\frac{dy}{dx}$:

$$y = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{x} - 1)'(\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)'}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x} - 1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left[(\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x} - 1)\right]}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x} + 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x} + 1)^2}$$

الشروط

$x \geq 0$ (ما تحت الجذر)

$\sqrt{x} + 1 \neq 0$ لكل $x \geq 0$

الاشتقاق عند $x > 0$

بند (2-3) ص 38 – تمرين (10)

بفرض أنّ : u , v دالتان في x وقابلتين للاشتقاق عند $x = 0$ ، وأنّ

$$u(0) = 5 \text{ ، } u'(0) = -3 \text{ ، } v(0) = -1 \text{ ، } v'(0) = 2$$

أوجد قيم المشتقات التالية عند $x = 0$

(a) $(uv)'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'$ (b)

$\left(\frac{v}{u}\right)'$ (c)

$(7v-2u)'$ (d)

الحل:

(a)

$$(uv)'(0) = u'(0)\,v(0) + u(0)\,v'(0)$$
$$= (-3)(-1) + (5)(2)$$
$$= 3 + 10 = 13$$

(b)

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(0) = \frac{u'(0)\,v(0) - u(0)\,v'(0)}{\left(v(0)\right)^2}$$
$$= \frac{(-3)(-1) - (5)(2)}{(-1)^2}$$
$$= \frac{3-10}{1} = -7$$

(c)

$$\left(\frac{v}{u}\right)'(0) = \frac{v'(0)\,u(0) - v(0)\,u'(0)}{\left(u(0)\right)^2}$$
$$= \frac{(2)(5) - (-1)(-3)}{(5)^2}$$
$$= \frac{10-3}{25} = \frac{7}{25}$$

(d)

$$(7v-2u)'(0) = 7v'(0) - 2u'(0)$$
$$= 7(2) - 2(-3)$$
$$= 14 + 6 = 20$$

شرط المقام

$v(0) = -1 \neq 0$

$u(0) = 5 \neq 0$

(a) $= 13$،

(b) $= -7$،

(c) $= \frac{7}{25}$،

(d) $= 20$

بند (2-3) ص 38 – تمرين (11) أوجد معادلة المماس للمنحني $y = x^3 + x$ عند النقطة $(1, 2)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = 3(1)^2 + 1 = 4$$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = 4(x - 1)$$

$$y - 2 = 4x - 4$$

$$y = 4x - 2$$

التحقق من النقطة

$x = 1 \Rightarrow y = 1^3 + 1$

$\therefore (1, 2) = 2$ على المنحنى

بند (2-3) ص 38 – تمرين (13) أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم لمنحني الدالة $y = \frac{8}{4 + x^2}$ عند النقطة $(2, 1)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8(4 + x^2)'}{(4 + x^2)^2} = \frac{-8(2x)}{(4 + x^2)^2} = \frac{-16x}{(4 + x^2)^2}$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=2} = \frac{-16(2)}{(4 + 4)^2} = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

ميل الناظم: $m_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$

معادلة الناظم: $y - y_1 = m_1(x - x_1)$

$$y - 1 = 2(x - 2)$$

$$y - 1 = 2x - 4$$

المماس: $y = -\frac{1}{2}x + 2$ ، **الناظم:** $y = 2x - 3$

شرط المقام

$4 + x^2 \neq 0$

لكل $x \in \mathbb{R}$

التحقق من النقطة

$x = 2 \Rightarrow y = \frac{8}{4 + 4}$

$= 1$

البند (2-4) – مشتقات الدوال المثلثية

بند (2-4) ص 41 – تمرين (1)

أوجد $\frac{dy}{dx}$:

$$y = 2\sin x - \tan x$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2(\sin x)' - (\tan x)'$$
$$= 2\cos x - \sec^2 x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 2\cos x - \sec^2 x}$$

الشروط

$$\cos x \neq 0$$
$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

بند (2-4) ص 41 – تمرين (2)

أوجد $\frac{dy}{dx}$:

$$y = 4 - x^2 \sin x$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 0 - \left[(x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)'\right]$$
$$= -\left[2x \sin x + x^2 \cos x\right]$$
$$= -2x \sin x - x^2 \cos x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -2x \sin x - x^2 \cos x}$$

بند (2-4) ص 41 – تمرين (3)

أوجد $\frac{dy}{dx}$:

$$y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cot x)'(1 + \cot x) - \cot x\,(1 + \cot x)'}{(1 + \cot x)^2}$$
$$= \frac{-\csc^2 x\,(1 + \cot x) - \cot x\,(-\csc^2 x)}{(1 + \cot x)^2}$$
$$= \frac{-\csc^2 x - \csc^2 x \cot x + \csc^2 x \cot x}{(1 + \cot x)^2}$$
$$= \frac{-\csc^2 x}{(1 + \cot x)^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-\csc^2 x}{(1 + \cot x)^2}}$$

الشروط

$$\sin x \neq 0 \ (\cot x \text{ معرفة})$$
$$1 + \cot x \neq 0$$
$$\cot x \neq -1$$

بند (2-4) ص 41 – تمرين (4)

أوجد $\frac{dy}{dx}$:

$$y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

الحل:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(\cos x)'(1+\sin x) - \cos x\,(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2} \\
&= \frac{-\sin x\,(1+\sin x) - \cos x \cos x}{(1+\sin x)^2} \\
&= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} \\
&= \frac{-\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1+\sin x)^2} \\
&= \frac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2} \\
&= \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} \\
&= \frac{-1}{1+\sin x}
\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+\sin x}$$

شرط المقام

$1 + \sin x \neq 0$

$\sin x \neq -1$

بند (2-4) ص 41 – تمرين (5)

أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{\tan x}{x}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

الحل:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(\tan x)' \cdot x - \tan x \cdot (x)'}{x^2} \\
&= \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} \\
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} &= \frac{\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{4}}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{\pi}{4}(2) - 1}{\frac{\pi^2}{16}} \\
&= \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{\frac{\pi^2}{16}} \\
&= \frac{16}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \\
&= \frac{8\pi - 16}{\pi^2}
\end{aligned}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{8\pi - 16}{\pi^2}$$

الشروط

$x \neq 0$

$\cos x \neq 0$

$\frac{\pi}{4}$ تحقق الشروط

حساب

$\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$\sec^2\frac{\pi}{4} = 2$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1$

بند (2-4) ص 41 – تمرين (6)

ملاحظة : يكون لمنحني دالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق مماس أفقي عند $x = a$ إذا وفقط إذا وجد حل للمعادلة : $f'(a) = 0$

أثبت أن منحني كل من الدالتين $y = \cos x$ ، $y = \dfrac{1}{\cos x}$ له مماس أفقي عند $x = 0$

الحل:

$$y = \cos x \ ①$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -\sin 0 = 0$$

$\therefore$ منحني $y = \cos x$ له مماس أفقي عند $x = 0$

$$y = \frac{1}{\cos x} = \sec x \ ②$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \sec 0 \cdot \tan 0 = (1)(0) = 0$$

$\therefore$ منحني $y = \dfrac{1}{\cos x}$ له مماس أفقي عند $x = 0$

$\therefore$ لكل من المنحنيين مماس أفقي عند $x = 0$

شرط المقام

$\cos 0 = 1 \neq 0$

$\therefore \sec x$ قابلة

للاشتقاق عند $x = 0$

بند (2-4) ص 41 – تمرين (7)

لتكن $y = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{\sin x} + \cot x$ ، أوجد معادلة المماس لمنحني الدالة عند النقطة $\left(\dfrac{\pi}{4}\ ,\ 4\right)$

الحل:

$$y = 1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + \sqrt{2}(-\csc x \cot x) + (-\csc^2 x)$$

$$= -\sqrt{2}\csc x \cot x - \csc^2 x$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}(\sqrt{2})(1) - (\sqrt{2})^2$$

$$= -2 - 2 = -4$$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 4 = -4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y - 4 = -4x + \pi$$

الشروط

$\sin x \neq 0$

$\sin \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$

حساب

$\csc \dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$\cot \dfrac{\pi}{4} = 1$

$$y = -4x + \pi + 4$$

التحقق من النقطة

$$y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 1$$
$$= 1 + 2 + 1 = 4$$

البند (2-5) – قاعدة السلسلة

بند (2-5) ص 43 – تمرين (1) أوجد : $(f \circ g)'(x)$

$$g(x) = 3x^2 \text{ ، } f(x) = 2x + 1$$

الحل:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = 2 \text{ ①}$$

$$f'(g(x)) = 2$$

$$g'(x) = 6x \text{ ②}$$

$$\therefore (f \circ g)'(x) = 2 \cdot 6x$$

$$= 12x$$

$$(f \circ g)'(x) = 12x$$

بند (2-5) ص 43 – تمرين (2) أوجد : $(f \circ g)'(x)$

$$g(x) = x^2 + 1 \text{ ، } f(x) = \frac{x-1}{x}$$

الحل:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)' \cdot x - (x-1) \cdot (x)'}{x^2} \text{ ①}$$

$$f'(x) = \frac{x-(x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(g(x)) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$g(x) = x^2 + 1 \text{ ②}$$

$$g'(x) = 2x$$

$$\therefore (f \circ g)'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

الشروط

$g(x) = x^2 + 1 \neq 0$

لكل $x \in \mathbb{R}$

بند (2-5) ص 43 – تمرين مشابه أوجد : $(f \circ g)'(x)$

$$g(x) = x^{15} \text{ ، } f(x) = 5x^2 - 1$$

الحل:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = 10x \text{ ①}$$

$$f'(g(x)) = 10x^{15}$$

$$g'(x) = 15x^{14} \text{ ②}$$

$$\therefore (f \circ g)'(x) = 10x^{15} \cdot 15x^{14}$$

$$= 150x^{29}$$

$$(f \circ g)'(x) = 150x^{29}$$

بند (2-5) ص 43 – تمرين (4) أوجد $(f \circ g)'$ عند القيم المعطاة لـ x

$$x = 1 \text{ ، } g(x) = \sqrt{x} \text{ ، } f(x) = x^5 + 1$$

الحل:

$$(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1)$$

$$f'(x) = 5x^4$$

$$f'(g(1)) = f'(1) = 5(1)^4 = 5$$

$$\therefore (f \circ g)'(1) = 5 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$(f \circ g)'(1) = \frac{5}{2}$$

حساب $g(1)$ ، $g'(1)$

$$g(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(1) = \frac{1}{2}$$

الشروط

g قابلة للاشتقاق عند 1

لأن $1 > 0$

بند (2-5) ص 43 – تمرين (5) أوجد $(f \circ g)'$ عند القيم المعطاة لـ x

$$x = \frac{1}{4} \text{ ، } g(x) = \pi x \text{ ، } f(x) = x + \frac{1}{\cos^2 x}$$

الحل:

$$(f \circ g)'\left(\tfrac{1}{4}\right) = f'\left(g\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) \cdot g'\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

$$f(x) = x + \sec^2 x$$

$$f'(x) = 1 + 2\sec x \cdot (\sec x \tan x)$$

$$= 1 + 2\sec^2 x \tan x$$

$$f'\left(g\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2\sec^2 \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4}$$

$$= 1 + 2(2)(1) = 5$$

$$\therefore (f \circ g)'\left(\tfrac{1}{4}\right) = 5 \cdot \pi$$

$$= 5\pi$$

$$(f \circ g)'\left(\frac{1}{4}\right) = 5\pi$$

حساب $g\left(\frac{1}{4}\right)$ ، $g'\left(\frac{1}{4}\right)$

$$g\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$g'(x) = \pi$$

$$g'\left(\tfrac{1}{4}\right) = \pi$$

الشروط

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$$

بند (2-5) ص 43 – تمرين (7) أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

$$u = 6x + 2 \text{ ، } y = \cos u \quad \textbf{(a)}$$

$$u = 3x^2 + 1 \text{ ، } y = 5u^3 + 4 \quad \textbf{(b)}$$

الحل:

(a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$\frac{dy}{du} = -\sin u \ ①$$
$$\frac{du}{dx} = 6 \ ②$$
$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = -\sin u \cdot 6$$
$$= -6\sin(6x+2)$$

(b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$\frac{dy}{du} = 15u^2 \ ①$$
$$\frac{du}{dx} = 6x \ ②$$
$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = 15u^2 \cdot 6x$$
$$= 90x\,u^2$$
$$= 90x(3x^2+1)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -6\sin(6x+2) \ \textbf{(a)}$$
$$\frac{dy}{dx} = 90x(3x^2+1)^2 \ \textbf{(b)}$$

بند (2-5) ص 43 – تمرين (8)

أوجد $\frac{ds}{dt}$ حيث $s = \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$

الحل:

$$\frac{ds}{dt} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) \cdot \left(\frac{3\pi}{2}t\right)' - \sin\left(\frac{7\pi}{4}t\right) \cdot \left(\frac{7\pi}{4}t\right)'$$
$$= \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) \cdot \frac{3\pi}{2} - \sin\left(\frac{7\pi}{4}t\right) \cdot \frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) - \frac{7\pi}{4}\sin\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$$

بند (2-5) ص 43 – تمرين (9)

أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \tan(2x - x^3)$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(2x-x^3) \cdot (2x-x^3)'$$
$$= \sec^2(2x-x^3) \cdot (2-3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = (2-3x^2)\sec^2(2x-x^3)$$

الشروط

$$\cos(2x-x^3) \neq 0$$

بند (2-5) ص 43 – تمرين (10)

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$

$$y = \sin(3x + 1)$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(3x + 1) \cdot (3x + 1)'$$
$$= \cos(3x + 1) \cdot 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\cos(3x + 1)$$

بند (2-5) ص 43 – تمرين (11)

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$

$$y = (\tan x + \sec x)^2$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2(\tan x + \sec x) \cdot (\tan x + \sec x)'$$
$$= 2(\tan x + \sec x)(\sec^2 x + \sec x \tan x)$$
$$= 2(\tan x + \sec x) \cdot \sec x(\sec x + \tan x)$$
$$= 2\sec x\,(\tan x + \sec x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sec x\,(\tan x + \sec x)^2$$

الشروط

$$\cos x \neq 0$$
$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

بند (2-5) ص 43 – تمرين (12)

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$

$$y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$$
$$= 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$= 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2}$$
$$= 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$$

شرط المقام

$$x + 1 \neq 0$$
$$x \neq -1$$

بند (2-5) ص 43 – تمرين (13)

أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = (1-6x)^{\frac{2}{3}}$$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{2}{3}(1-6x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (1-6x)' \\ &= \frac{2}{3}(1-6x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-6) \\ &= -4(1-6x)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{-4}{\sqrt[3]{1-6x}}\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{\sqrt[3]{1-6x}}$$

شرط المقام

$1-6x \neq 0$

$x \neq \frac{1}{6}$

بند (2-5) ص 43 – تمرين (14)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند x

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x)'\sqrt{1+x^2} - x\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

الشروط

$1+x^2 > 0$

لكل $x \in \mathbb{R}$

بند (2-5) ص 43 – تمرين (15)

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$

$$y = \sin^2(3x - 2)$$

الحل:

$$y = \big(\sin(3x - 2)\big)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin(3x - 2) \cdot \big(\sin(3x - 2)\big)'$$

$$= 2\sin(3x - 2) \cdot \cos(3x - 2) \cdot (3x - 2)'$$

$$= 2\sin(3x - 2)\cos(3x - 2) \cdot 3$$

$$= 6\sin(3x - 2)\cos(3x - 2)$$

$$= 3\sin\big(2(3x - 2)\big) = 3\sin(6x - 4)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6\sin(3x - 2)\cos(3x - 2) = 3\sin(6x - 4)$$

بند (2-5) ص 43 – تمرين (16)

أوجد :

(a) معادلة المماس على منحنى الدالة.

(b) معادلة الخط العموديّ على المماس في النقاط المعطاة على منحنى كل دالة مما يلي.

$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ عند $(2\ ,\ 3)$

الحل:

$$f(x) = (x^2 + 5)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

$$m = f'(2) = \frac{2}{\sqrt{4 + 5}} = \frac{2}{3}$$

الشروط

$x^2 + 5 > 0$

لكل $x \in \mathbb{R}$

حساب

$f(2) = \sqrt{9} = 3$

(a)

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

$$y - 3 = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

(b)

$$\text{ميل العمودي} = -\frac{1}{m} = -\frac{3}{2}$$

معادلة العمودي: $y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 2)$

$$y - 3 = -\frac{3}{2}x + 3$$

(a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ ،

(b) $y = -\frac{3}{2}x + 6$

بند (2-5) ص 43 – تمرين (17) أوجد :

(a) معادلة المماس على منحنى الدالة.

(b) معادلة الخط العموديّ على المماس في النقاط المعطاة على منحنى كل دالة مما يلي.

$g(x) = (x^3 + 1)^8$ عند $(0\ ,\ 1)$

الحل:

$$g'(x) = 8(x^3 + 1)^7 \cdot 3x^2$$

$$g'(x) = 24x^2(x^3 + 1)^7$$

$$m = g'(0) = 24(0)(0 + 1)^7 = 0$$

(a)

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = 0(x - 0)$$

∴ المماس أفقي

(b)

∵ المماس أفقي ∴ العمودي رأسي يمر بالنقطة

$(0\ ,\ 1)$

(a) $y = 1$ ،

(b) $x = 0$

حساب

$$g(0) = (0 + 1)^8 = 1$$

البند (2-6) – المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

بند (2-6) ص 45 – تمرين (1)

أوجد : $\frac{d^3y}{dx^3}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{dy}{dx}$

$$y = 2x^4 - x^3 + x^2 - 3x$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 3x^2 + 2x - 3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24x^2 - 6x + 2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 48x - 6$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 48x - 6 \text{ ، } \frac{d^2y}{dx^2} = 24x^2 - 6x + 2 \text{ ، } \frac{dy}{dx} = 8x^3 - 3x^2 + 2x - 3$$

بند (2-6) ص 45 – تمرين (3)

أوجد : $\frac{d^3y}{dx^3}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{dy}{dx}$

$$y = \frac{3}{x-2}$$

الحل:

$$y = 3(x-2)^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -3(x-2)^{-2} \cdot 1 = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(x-2)^{-3} \cdot 1 = \frac{6}{(x-2)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -18(x-2)^{-4} \cdot 1 = \frac{-18}{(x-2)^4}$$

$$\text{، } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6}{(x-2)^3} \text{ ، } \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-18}{(x-2)^4}$$

شرط المقام

$$x - 2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

بند (2-6) ص 45 – تمرين (4)

أوجد : $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$

$$y = \sin 2x$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(-\sin 2x) \cdot 2 = -4\sin 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4\cos 2x \cdot 2 = -8\cos 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -8\cos 2x \text{ ، } \frac{d^2y}{dx^2} = -4\sin 2x \text{ ، } \frac{dy}{dx} = 2\cos 2x$$

بند (2-6) ص 45 – تمرين (5)

أوجد : $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$

$$y = \cos 4x$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin 4x \cdot 4 = -4\sin 4x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4\cos 4x \cdot 4 = -16\cos 4x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -16(-\sin 4x) \cdot 4 = 64\sin 4x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 64\sin 4x \text{ ، } \frac{d^2y}{dx^2} = -16\cos 4x \text{ ، } \frac{dy}{dx} = -4\sin 4x$$

بند (2-6) ص 45 – تمرين (6)

أوجد : $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$

$$y = \sin^2 x$$

الحل:

$$y = (\sin x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2(-\sin 2x) \cdot 2 = -4\sin 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4\sin 2x \text{ ، } \frac{d^2y}{dx^2} = 2\cos 2x \text{ ، } \frac{dy}{dx} = \sin 2x$$

بند (2-6) ص 45 – تمرين (7)

أوجد : $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$y^2 = x^2 + 4x + 2$$

الحل:

نشتق الطرفين بالنسبة إلى x

$$2yy' = 2x + 4$$

$$y' = \frac{2x+4}{2y} = \frac{x+2}{y}$$

$$y'' = \frac{(x+2)' \cdot y - (x+2) \cdot y'}{y^2}$$

$$= \frac{y - (x+2) \cdot \frac{x+2}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{y^2 - (x+2)^2}{y^3}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 2 - (x^2 + 4x + 4)}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{y^3} \text{ ، } \frac{dy}{dx} = \frac{x+2}{y}$$

شرط المقام

$y \neq 0$

بند (2-6) ص 45 – تمرين (9)

أوجد : $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$$

الحل:

نشتق الطرفين بالنسبة إلى x

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\,y' = 0$$

$$y^{-\frac{1}{3}}\,y' = -x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y' = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = -x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

$$y'' = -\left[-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\,y^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\,y'\right]$$

$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}\left(-x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{1}{3}} \cdot 4$$

شرط المقام

$x \neq 0\,,\ y \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \quad ، \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{3x^{\frac{4}{3}}\, y^{\frac{1}{3}}}$$

بند (2-6) ص 45 – تمرين (10) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي على منحني الدالة عند كل نقطة معطاة على هذا المنحني

$$x^2 + 2xy - y^2 = 7 \quad , \quad (2\,,\,3)$$

الحل:

نشتق الطرفين بالنسبة إلى x

$$2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0$$

$$x + y + xy' - yy' = 0$$

$$y'(x - y) = -(x + y)$$

$$y' = \frac{x + y}{y - x}$$

$$m = y'\Big|_{(2,3)} = \frac{2 + 3}{3 - 2} = 5$$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 3 = 5(x - 2)$$

$$y - 3 = 5x - 10$$

ميل العمودي $= -\frac{1}{m} = -\frac{1}{5}$

معادلة العمودي: $y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 2)$

$$y - 3 = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$$

المماس: $y = 5x - 7$ ، **العمودي:**

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$$

شرط المقام

$y - x \neq 0$

عند $(2,3) : 3 - 2 = 1 \neq 0$

النقطة على المنحنى

$4 + 12 - 9 = 7$

بند (2-6) ص 45 – تمرين (11) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي على منحني الدالة عند كل نقطة معطاة على هذا المنحني

$$6x^2 + 3xy - 2y^2 - 7y - 6 = 0 \quad , \quad (-1\,,\,0)$$

الحل:

نشتق الطرفين بالنسبة إلى x

$$12x + 3y + 3xy' - 4yy' - 7y' = 0$$

$$y'(3x - 4y - 7) = -12x - 3y$$

$$y' = \frac{-12x - 3y}{3x - 4y - 7} = \frac{12x + 3y}{7 + 4y - 3x}$$

$$m = y'\Big|_{(-1,0)} = \frac{12(-1) + 0}{7 + 0 + 3} = \frac{-12}{10} = -\frac{6}{5}$$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 0 = -\frac{6}{5}(x + 1)$$

$$-\frac{1}{m} = \frac{5}{6} = \text{ميل العمودي}$$

معادلة العمودي: $y - 0 = \frac{5}{6}(x + 1)$

المماس: $y = -\frac{6}{5}x - \frac{6}{5}$ ، **العمودي:** $y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6}$

شرط المقام

$7 + 4y - 3x \neq 0$

عند $(-1, 0)$:

$7 + 0 + 3 = 10 \neq 0$

النقطة على المنحنى

$6(1) + 0 - 0 - 0 - 6 = 0$

بند (2-6) ص 45 – تمرين (12) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي على منحني الدالة عند كل نقطة معطاة على هذا المنحني

$$2xy + \pi \sin y = 2\pi \quad , \quad \left(1\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$$

الحل:

نشتق الطرفين بالنسبة إلى x

$$2y + 2xy' + \pi \cos y \cdot y' = 0$$

$$y'(2x + \pi \cos y) = -2y$$

$$y' = \frac{-2y}{2x + \pi \cos y}$$

$$m = y'\Big|_{(1,\frac{\pi}{2})} = \frac{-2 \cdot \frac{\pi}{2}}{2(1) + \pi \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{-\pi}{2 + 0} = -\frac{\pi}{2}$$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(x - 1)$$

شرط المقام

$2x + \pi \cos y \neq 0$

عند $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$:

$2 + \pi \cos \frac{\pi}{2} = 2 \neq 0$

النقطة على المنحنى

$2(1)\frac{\pi}{2} + \pi \sin \frac{\pi}{2}$

$= \pi + \pi = 2\pi$

$$y = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{1}{m} = \frac{2}{\pi} = \text{ميل العمودي}$$

$$y - \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}(x - 1) \text{ معادلة العمودي:}$$

المماس: $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$ ، **العمودي:**

$$y = \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$$

بند (2-6) ص 45 – تمرين (14) أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = \frac{\cos x}{1 + \tan x}$ واكتب معادلة المماس على منحني الدالة عند $A(0\,,\,1)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos x)'(1 + \tan x) - \cos x\,(1 + \tan x)'}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x(1 + \tan x) - \cos x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin x \tan x - \sec x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$m = y'\Big|_{x=0} = \frac{-0 - 0 - 1}{(1 + 0)^2} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ معادلة المماس:}$$

$$y - 1 = -1(x - 0)$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x(1 + \tan x) - \cos x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$ ،

المماس: $y = -x + 1$

شرط المقام

$$1 + \tan x \neq 0$$

$$\cos x \neq 0$$

النقطة على المنحنى

$$y(0) = \frac{\cos 0}{1 + \tan 0} = \frac{1}{1} = 1$$

بند (2-6) ص 45 – تمرين (15) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

فأثبت أن : $4x^2 f''(x) - 3f(x) = 0$

الحل:

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$4x^2 f''(x) - 3f(x) = \text{الطرف الأيمن}$$

$$= 4x^2 \cdot \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}}$$

الشروط

$$x > 0$$

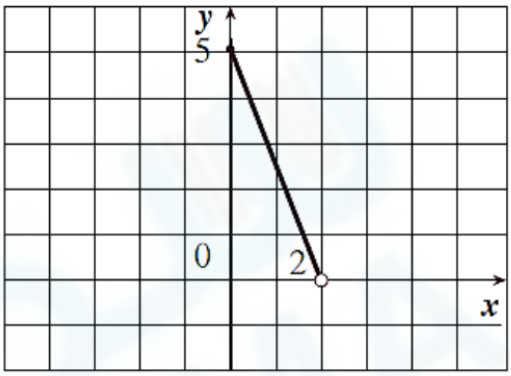
$$= 3x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$4x^2 f''(x) - 3f(x) = 0 \therefore$$

البند (1-3) – القيم القصوى (العظمى / الصغرى) للدوال

بند (1-3) ص 51 – تمرين (1) أوجد النقاط التي توجد عندها قيم قصوى :

(الشكل المقابل)



الحل:

من الشكل: f متناقصة على $[0\ ,\ 2)$

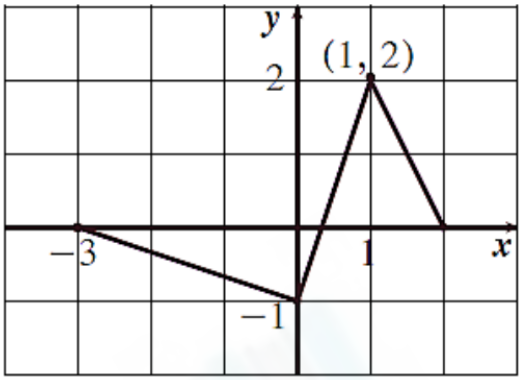
عند $x = 0$: $f(0) = 5$ قيمة عظمى مطلقة

عند $x = 2$ دائرة مفرغة ($f(2)$ غير معرفة)

$\therefore$ لا توجد قيمة صغرى مطلقة

قيمة عظمى مطلقة 5 عند $x = 0$ ، لا توجد قيمة صغرى مطلقة

بند (3-1) ص 51 – تمرين (2) أوجد النقاط التي توجد عندها قيم قصوى :
(الشكل المقابل)



الحل:

من الشكل: f متناقصة على $[-3\ ,\ 0]$

متزايدة على $[0\ ,\ 1]$ ، متناقصة على $[1\ ,\ 2]$

عند $x = 1$: قيمة عظمى مطلقة $= 2$

عند $x = 0$: قيمة صغرى مطلقة $= -1$

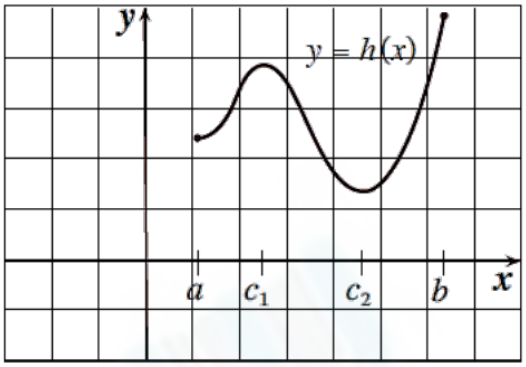
عند $x = -3$ (طرف) : قيمة عظمى محلية $= 0$

عند $x = 2$ (طرف) : قيمة صغرى محلية $= 0$

عظمى مطلقة 2 عند $x = 1$ ، صغرى مطلقة -1 عند $x = 0$ ، عظمى محلية 0 عند $x = -3$ ، صغرى محلية 0 عند $x = 2$

بند (3-1) ص 51 – تمرين (3) حدد قيمة x التي قد تقع عندها إحدى القيم القصوى المطلقة للدوال الموضح بيانها فيما يلي مستخدما نظرية القيم القصوى :

(الشكل المقابل)



الحل:

h متصلة على الفترة المغلقة $[a\ ,\ b]$

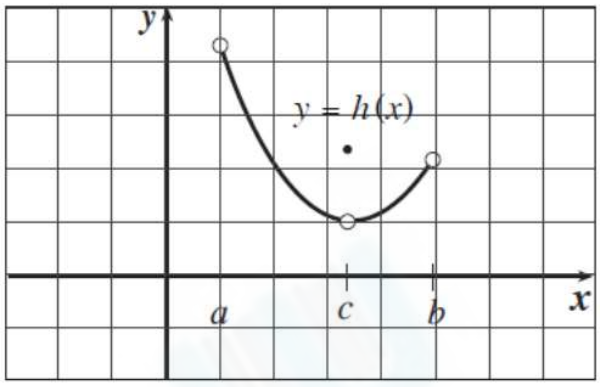
$\therefore$ لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة (نظرية القيم القصوى)

من الشكل: القيمة العظمى المطلقة $h(b)$ عند $x = b$

القيمة الصغرى المطلقة $h(c_2)$ عند $x = c_2$

قيمة عظمى مطلقة عند $x = b$ ، قيمة صغرى مطلقة عند $x = c_2$

بند (1-3) ص 51 – تمرين (4) حدد قيمة x التي قد تقع عندها إحدى القيم القصوى المطلقة للدوال الموضح بيانها فيما يلي مستخدما نظرية القيم القصوى :
(الشكل المقابل)



الحل:

h معرفة على الفترة المفتوحة $(a\ ,\ b)$ وغير متصلة عند $x = c$

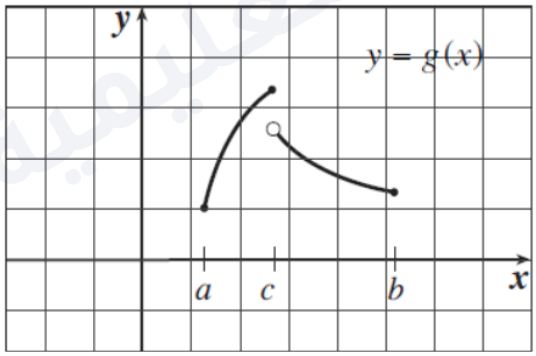
∴ لا تنطبق نظرية القيم القصوى

عند $x = a\ ،\ x = b$ دائرتان مفرغتان ∴ لا توجد قيمة عظمى مطلقة

عند $x = c$ دائرة مفرغة و $h(c)$ أعلى منها ∴ لا توجد قيمة صغرى مطلقة

لا توجد قيمة عظمى مطلقة ولا قيمة صغرى مطلقة

بند (1-3) ص 51 – تمرين (5) حدد قيمة x التي قد تقع عندها إحدى القيم القصوى المطلقة للدوال الموضح بيانها فيما يلي مستخدما نظرية القيم القصوى :
(الشكل المقابل)



الحل:

g معرفة على $[a\ ,\ b]$ لكنها غير متصلة عند $x = c$

∴ لا تنطبق نظرية القيم القصوى (لكن قد توجد قيم قصوى)

من الشكل: القيمة العظمى المطلقة $g(c)$ عند $x = c$

القيمة الصغرى المطلقة $g(a)$ عند $x = a$

قيمة عظمى مطلقة عند $x = c$ ، قيمة صغرى مطلقة عند $x = a$

بند (3-1) ص 51 – تمرين (7) حدد النقاط الحرجة :

$$y = x^2(x + 2)$$

الحل:

$y = x^3 + 2x^2$ كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 + 4x$$

نضع $y' = 0$: $3x^2 + 4x = 0$

$$x(3x + 4) = 0$$

$$x = -\frac{4}{3} \text{ أو } x = 0$$

النقاط الحرجة: $(0\ ,\ 0)$ ، $\left(-\frac{4}{3}\ ,\ \frac{32}{27}\right)$

حساب القيم

$$y(0) = 0$$

$$y\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9}\left(-\frac{4}{3} + 2\right)$$

$$= \frac{16}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{27}$$

بند (3-1) ص 51 – تمرين (10) أوجد القيم القصوى المطلقة لكل دالة من الدوال التالية في الفترة المبينة

$$y = 2x^2 - 8x + 9 \quad , \quad [0\ ,\ 4]$$

الحل:

f كثيرة حدود متصلة على $[0, 4]$

∵ f متصلة على $[0, 4]$ ∴ يوجد قيمة عظمى مطلقة

وقيمة صغرى مطلقة (نظرية)

$$f'(x) = 4x - 8$$

نضع $f'(x) = 0$: $4x - 8 = 0$

$$x = 2 \in (0, 4)$$

النقطة الحرجة: $x = 2$

x	0	2	4
y	9	1	9

حساب القيم

$$f(0) = 9$$

$$f(2) = 8 - 16 + 9$$

$$= 1$$

$$f(4) = 32 - 32 + 9$$

$$= 9$$

قيمة عظمى مطلقة 9 عند $x=0$ ، $x=4$ ، قيمة صغرى مطلقة 1 عند $x=2$

بند (3-1) ص 51 – تمرين (11) أوجد القيم القصوى المطلقة لكل دالة من الدوال التالية في الفترة المبينة

$$y=x^{\frac{3}{5}} \quad , \quad [-2\,,\,3]$$

الحل:

$f(x)=x^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{x^3}$ متصلة على $\mathbb{R}$ ∴ متصلة على $[-2,3]$

∵ f متصلة على $[-2,3]$ ∴ يوجد قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة (نظرية)

$$f'(x)=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

f قابلة للاشتقاق على $(-2,3)-\{0\}$

النقطة الحرجة: $x=0\in(-2,3)$

x	-2	0	3
y	$-\sqrt[5]{8}\approx-1.52$	0	$\sqrt[5]{27}\approx1.93$

قيمة عظمى مطلقة $\sqrt[5]{27}$ عند $x=3$ ، قيمة صغرى مطلقة $-\sqrt[5]{8}$ عند $x=-2$

$f'(x)$ غير موجودة

$5\sqrt[5]{x^2}=0$

$x=0\in(-2,3)$

$f'(x)=0$

$f'(x)\neq0$

لأن البسط $3\neq0$

حساب القيم

$f(-2)=\sqrt[5]{(-2)^3}$

$=\sqrt[5]{-8}=-\sqrt[5]{8}$

$f(0)=0$

$f(3)=\sqrt[5]{27}$

البند (3-2) – تزايد وتناقص الدوال

بند (3-2) ص 54 – السؤال الأول (بدون رقم) بين أن الدالة $f(x)=x+\frac{1}{x}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $\left[\frac{1}{2}\,,\,2\right]$ ثم اوجد قيمة c التي تحقق شروط النظرية, وفسر اجابتك.

الحل:

نفرض $g(x)=x$ ، $h(x)=\frac{1}{x}$

فيكون $f(x)=g(x)+h(x)$

① ندرس اتصال g

g كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

② ندرس اتصال h

شرط المقام

$x\neq0$

$0\notin\left[\frac{1}{2},2\right]$

$\therefore g$ متصلة على $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

h دالة نسبية متصلة عند كل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\because 0 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

$\therefore h$ متصلة على $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

من ① ، ② $f = g + h$ متصلة على $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ (مجموع دالتين متصلتين)

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ موجودة لكل $x \neq 0$

$\therefore f$ قابلة للاشتقاق على $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$\therefore f$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

$\therefore$ يوجد $c \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ حيث $f'(c) = \frac{f(2) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{2 - \frac{1}{2}}$

$$1 - \frac{1}{c^2} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\frac{1}{c^2} = 1 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

$c = 1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ، $c = -1 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ (مرفوض)

التفسير: عند $c = 1$ يكون المماس موازيًا للقاطع المار بالنقطتين $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ، $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ (ميل كل منهما 0)

حساب

$$f(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

بند (3-2) ص 54 – تمرين (4) حدد الفترات التي تكون فيها الدوال التالية متزايدة والفترات التي تكون فيها متناقصة .

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24$$

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x$$

نضع $f'(x) = 0$: $3x^2 - 18x = 0$

$$3x(x - 6) = 0$$

$x = 0$ أو $x = 6$

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	↗	24	↘	-84	↗		

حساب القيم

$$f(0) = 24$$
$$f(6) = 216 - 324 + 24 = -84$$

f متزايدة على $(-\infty, 0)$ ، $(6, \infty)$

f متناقصة على $(0, 6)$

f متزايدة على $(-\infty, 0)$ ، $(6, \infty)$ ، متناقصة على $(0, 6)$

بند (2-3) ص 54 – تمرين (5) حدد الفترات التي تكون فيها الدوال التالية متزايدة والفترات التي تكون فيها متناقصة .

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

الحل:

مجال f هو $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f(x) = x^{-2}$$

$$f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

$f'(x) \neq 0$ لأن البسط $-2 \neq 0$

$f'(x)$ غير معرفة عند $x = 0 \notin$ مجال f ∴ لا توجد نقاط حرجة

شرط المقام

$x^2 \neq 0$

$x \neq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	غير معرفة		$-$	
$f(x)$	↗	غير معرفة		↘	

f متزايدة على $(-\infty, 0)$

f متناقصة على $(0, \infty)$

f متزايدة على $(-\infty, 0)$ ، متناقصة على $(0, \infty)$

بند (2-3) ص 54 – تمرين (6) حدد الفترات التي تكون فيها الدوال التالية متزايدة والفترات التي تكون فيها متناقصة .

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 + 4}$$

الحل:

f دالة نسبية متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{(-x)'(x^2+4)-(-x)(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}$$
$$=\frac{-(x^2+4)+x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}$$
$$=\frac{x^2-4}{(x^2+4)^2}$$

نضع $f'(x)=0$: $x^2-4=0$

$$(x-2)(x+2)=0$$

$x=-2$ أو $x=2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗		

f متزايدة على $(-\infty,-2)$ ، $(2,\infty)$

f متناقصة على $(-2,2)$

f متزايدة على $(-\infty,-2)$ ، $(2,\infty)$ ، متناقصة على $(-2,2)$

شرط المقام

$x^2+4\neq 0$

$x^2+4>0$

لكل $x\in\mathbb{R}$

حساب القيم

$f(-2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$f(2)=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}$

بند (3-2) ص 54 – تمرين (7) حدد الفترات التي تكون فيها الدوال التالية متزايدة والفترات التي تكون فيها متناقصة .

$$f(x)=x^4-2x^2$$

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=4x^3-4x$$

نضع $f'(x)=0$: $4x^3-4x=0$

$$4x(x^2-1)=0$$

$$4x(x-1)(x+1)=0$$

$x=-1$ أو $x=1$ أو $x=0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		

حساب القيم

$f(-1)=1-2=-1$

$f(0)=0$

$f(1)=1-2=-1$

x		-1		0		-1	
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

f متزايدة على $(-1,0)$ ، $(1,\infty)$

f متناقصة على $(-\infty,-1)$ ، $(0,1)$

f متزايدة على $(-1,0)$ ، $(1,\infty)$ ، متناقصة على $(-\infty,-1)$ ، $(0,1)$

البند (3-3) – ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

بند (3-3) ص 56 – تمرين (1) أوجد النقاط الحرجة و القيم القصوى المحلية وعين فترات التزايد وفترات التناقص لكل دالة مما يلي :

$$f(x)=x^3-9x^2+24x$$

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=3x^2-18x+24$$

نضع $f'(x)=0$: $3x^2-18x+24=0$

$$3(x^2-6x+8)=0$$

$$3(x-2)(x-4)=0$$

$x=2$ أو $x=4$

النقاط الحرجة: $(2\ ,\ 20)$ ، $(4\ ,\ 16)$

x	$-\infty$		2		4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗	20	↘	16	↗	

f متزايدة على $(-\infty,2)$ ، $(4,\infty)$

f متناقصة على $(2,4)$

عند $x=2$ قيمة عظمى محلية هي $f(2)=20$

عند $x=4$ قيمة صغرى محلية هي $f(4)=16$

النقاط الحرجة $(2,20)$ ، $(4,16)$ ؛ عظمى محلية $f(2)=20$ ، صغرى محلية $f(4)=16$ ؛ متزايدة على $(-\infty,2)$ ، $(4,\infty)$ ، متناقصة على $(2,4)$

حساب القيم

$$f(2)=8-36+48$$
$$=20$$
$$f(4)=64-144+96$$
$$=16$$

بند (3-3) ص 56 – تمرين (3) أوجد النقاط الحرجة و القيم القصوى المحلية وعين فترات التزايد وفترات التناقص لكل دالة مما يلي :

$$h(x) = -x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 1$$

الحل:

h كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$h'(x) = -4x^3 - 12x^2 - 8x$$

نضع $h'(x) = 0$: $-4x^3 - 12x^2 - 8x = 0$

$$-4x(x^2 + 3x + 2) = 0$$

$$-4x(x+1)(x+2) = 0$$

$x = 0$ أو $x = -1$ أو $x = -2$

النقاط الحرجة: $(-2\ ,\ 1)$ ، $(-1\ ,\ 0)$ ، $(0\ ,\ 1)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	↗	1	↘		0	↗	1	↘	

h متزايدة على $(-\infty, -2)$ ، $(-1, 0)$

h متناقصة على $(-2, -1)$ ، $(0, \infty)$

عند $x = -2$ قيمة عظمى محلية هي $h(-2) = 1$

عند $x = -1$ قيمة صغرى محلية هي $h(-1) = 0$

عند $x = 0$ قيمة عظمى محلية هي $h(0) = 1$

النقاط الحرجة $(-2, 1)$ ، $(-1, 0)$ ، $(0, 1)$ ؛ عظمى محلية $h(-2) = 1$ ، $h(0) = 1$ ، صغرى محلية $h(-1) = 0$ ؛ متزايدة على $(-\infty, -2)$ ، $(-1, 0)$ ، متناقصة على $(-2, -1)$ ، $(0, \infty)$

حساب القيم

$$h(-2) = -16 + 32 - 16 + 1$$
$$= 1$$
$$h(-1) = -1 + 4 - 4 + 1$$
$$= 0$$
$$h(0) = 1$$

بند (3-3) ص 56 – تمرين (7) استخدم مشتقة الدالة $y = f(x)$ لإيجاد قيم x التي تكون عندها لـ f :

(a) قيمة عظمى محلية .

(b) قيمة صغرى محلية .

(c) نقطة انعطاف .

$$y' = (x-1)^2(x-2)$$

الحل:

نضع $y' = 0 : (x-1)^2(x-2) = 0$

$x = 1$ أو $x = 2$

x	$-\infty$		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘			↘		↗

(a)

لا توجد قيمة عظمى محلية

(b)

y' تتغير من $-$ إلى $+$ عند $x = 2 \therefore x = 2$ قيمة صغرى محلية عند

(عند $x = 1$ لا تتغير إشارة $y' \therefore$ لا توجد قيمة قصوى)

(c)

$$y'' = 2(x-1)(x-2) + (x-1)^2 \cdot 1$$
$$= (x-1)\left[2(x-2) + (x-1)\right]$$
$$= (x-1)(3x-5)$$

نضع $y'' = 0 : (x-1)(3x-5) = 0$

$x = 1$ أو $x = \frac{5}{3}$

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
التقعر	∪	انعطاف	∩	انعطاف	∪	

y'' تتغير إشارتها عند $x = 1$ ، $x = \frac{5}{3} \therefore x = \frac{5}{3}$ ، $x = 1$ نقطتا انعطاف عند

(a) لا توجد ،

$x = 2$ **(b)** ،

$x = 1$ ، $x = \frac{5}{3}$ **(c)**

بند (3-3) ص 56 – تمرين (8) استخدم مشتقة الدالة $y = f(x)$ لإيجاد قيم x التي تكون عندها لـ f :

(a) قيمة عظمى محلية .

(b) قيمة صغرى محلية .

(c) نقطة انعطاف .

$$y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$$

الحل:

نضع $y' = 0$: $(x-1)^2(x-2)(x-4) = 0$

$x = 1$ أو $x = 2$ أو $x = 4$

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗			↗		↘		↗	

(a)

y' تتغير من $+$ إلى $-$ عند $x = 2$ ∴ قيمة عظمى محلية عند $x = 2$

(b)

y' تتغير من $-$ إلى $+$ عند $x = 4$ ∴ قيمة صغرى محلية عند $x = 4$

(عند $x = 1$ لا تتغير إشارة y' ∴ لا توجد قيمة قصوى)

(c)

$$y' = (x-1)^2(x^2 - 6x + 8)$$

$$y'' = 2(x-1)(x^2 - 6x + 8) + (x-1)^2(2x - 6)$$

$$= (x-1)\left[2x^2 - 12x + 16 + (x-1)(2x-6)\right]$$

$$= (x-1)\left[2x^2 - 12x + 16 + 2x^2 - 8x + 6\right]$$

$$= (x-1)(4x^2 - 20x + 22)$$

$$= 2(x-1)(2x^2 - 10x + 11)$$

نضع $y'' = 0$: $x = 1$ أو $2x^2 - 10x + 11 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 88}}{4} = \frac{10 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x \approx 3.37 \text{ أو } x \approx 1.63$$

x	$-\infty$		1		$\frac{5-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0		$+$	0	$-$	0	$+$	
التقعر	$\cap$	انعطاف		$\cup$	انعطاف	$\cap$	انعطاف		$\cup$

$\therefore x = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$ ، $x = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$ ، $x = 1$ تتغير إشارتها عند y'' نقاط انعطاف

(a) $x = 2$ ،

(b) $x = 4$ ،

(c) $x = 1$ ، $x = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$ ، $x = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$

بند (3-3) ص 56 – تمرين (10) أوجد فترات التقعر ونقطة الانعطاف لمنحني للدالة f :

$$f(x) = 3x^2 - 2x^3$$

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x - 6x^2$$

$$f''(x) = 6 - 12x$$

نضع $f''(x) = 0$: $6 - 12x = 0$

$$x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
التقعر	$\cup$	انعطاف	$\cap$

منحنى f مقعر للأعلى في $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

منحنى f مقعر للأسفل في $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

نقطة الانعطاف $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

مقعر للأعلى في $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ، مقعر للأسفل في $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ ، نقطة الانعطاف $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

حساب القيم

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

بند (3-3) ص 56 – تمرين (12) بين أن منحني الدالة $f(x) = 1 - x^4$ ليس له نقاط انعطاف.

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -4x^3$$

$$f''(x) = -12x^2$$

نضع $f''(x) = 0$: $-12x^2 = 0$

$$x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$-$
التقعر	∩	1	∩

$f''(x) \leq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ (لا تتغير الإشارة عند $x = 0$)

∴ منحنى f مقعر للأسفل على $\mathbb{R}$

∴ منحنى f ليس له نقاط انعطاف

بند (3-3) ص 56 – تمرين (16) استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة f

$$f(x) = x^4 - 18x^2$$

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 36x$$

نضع $f'(x) = 0$: $4x(x^2 - 9) = 0$

$$4x(x - 3)(x + 3) = 0$$

$x = -3$ أو $x = 3$ أو $x = 0$

$$f''(x) = 12x^2 - 36$$

∴ $f''(0) = -36 < 0$ عند $x = 0$ قيمة عظمى محلية

هي $f(0) = 0$

∴ $f''(3) = 108 - 36 = 72 > 0$ عند $x = 3$ قيمة

صغرى محلية هي $f(3) = -81$

حساب القيم

$f(0) = 0$

$f(3) = 81 - 162$

$= -81$

$f(-3) = 81 - 162$

$= -81$

$\therefore f''(-3) = 108 - 36 = 72 > 0$ عند $x = -3$ قيمة صغرى محلية هي $f(-3) = -81$

عظمى محلية $f(0) = 0$ ، صغرى محلية
$f(-3) = -81$ ، $f(3) = -81$

بند (3-3) ص 56 – سؤال (بدون رقم) أوجد قيمة كل من الثوابت a, b, c لمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ الذي يمر من نقطة الأصل وله نقطة حرجة $(4\ ,\ 16)$

الحل:

$\because$ المنحنى يمر بنقطة الأصل $\therefore f(0) = 0$

$0 + 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$\because (4, 16)$ نقطة حرجة $\therefore f'(4) = 0$

$48 + 8a + b = 0 \Rightarrow 8a + b = -48 \quad (1)$

$\because (4, 16)$ تقع على المنحنى $\therefore f(4) = 16$

$64 + 16a + 4b + 0 = 16$

$16a + 4b = -48 \Rightarrow 4a + b = -12 \quad (2)$

بطرح (2) من (1) : $4a = -36 \Rightarrow a = -9$

بالتعويض في (2) : $-36 + b = -12 \Rightarrow b = 24$

$\therefore a = -9\ ,\ b = 24\ ,\ c = 0$

تحقق

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

$f(4) = 64 - 144 + 96$

$= 16$

$f'(4) = 48 - 72 + 24$

$= 0$

البند (3-4) – رسم بيان دوال كثيرات الحدود

بند (3-4) ص 56 – تمرين (3) ادرس تغيرات الدالة التالية وارسم بيانها : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7$

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

نضع $f'(x) = 0$: $3x^2 - 4x - 4 = 0$

$$(3x+2)(x-2) = 0$$

$$x = 2 \text{ أو } x = -\frac{2}{3}$$

النقاط الحرجة: $\left(-\frac{2}{3}, \frac{229}{27}\right)$ ، $(2,-1)$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{229}{27}$	↘	-1	↗	

f متزايدة على $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ ، $(2,\infty)$

f متناقصة على $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$

عند $x = -\frac{2}{3}$ قيمة عظمى محلية هي

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{229}{27}$$

عند $x = 2$ قيمة صغرى محلية هي $f(2) = -1$

$$f''(x) = 6x - 4$$

نضع $f''(x) = 0$: $6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
التقعر		∩	$\frac{101}{27}$	∪	

منحنى f مقعر للأسفل في $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$

منحنى f مقعر للأعلى في $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$

نقطة الانعطاف $\left(\frac{2}{3}, \frac{101}{27}\right)$

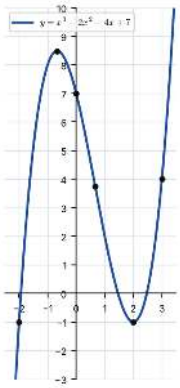
حساب القيم

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 7 = \frac{229}{27} \approx 8.48$$

$$f(2) = 8 - 8 - 8 + 7 = -1$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} - \frac{8}{3} + 7 = \frac{101}{27} \approx 3.74$$

x	-2	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	2	3
y	-1	≈ 8.48	7	≈ 3.74	-1	4
النوع	إضافية	عظمى محلية	إضافية	انعطاف	صغرى محلية	إضافية



عظمى محلية $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{229}{27}$ ، **صغرى محلية** $f(2)=-1$ ، **انعطاف** $\left(\frac{2}{3},\frac{101}{27}\right)$

بند (3-4) ص 56 – تمرين (6) ادرس تغيرات الدالة التالية وارسم بيانها : $f(x)=-x^3-3x^2$

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x^3)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(-x^3)=-\infty$$

$$f'(x)=-3x^2-6x$$

نضع $f'(x)=0$: $-3x^2-6x=0$

$$-3x(x+2)=0$$

$x=-2$ أو $x=0$

النقاط الحرجة: $(0,0)$ ، $(-2,-4)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\searrow$		-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	

حساب القيم

$f(0)=0$

$f(-2)=8-12$

$=-4$

$f(-1)=1-3$

$=-2$

f متناقصة على $(-\infty, -2)$ ، $(0, \infty)$

f متزايدة على $(-2, 0)$

عند $x = -2$ قيمة صغرى محلية هي $f(-2) = -4$

عند $x = 0$ قيمة عظمى محلية هي $f(0) = 0$

$$f''(x) = -6x - 6$$

نضع $f''(x) = 0 : -6x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

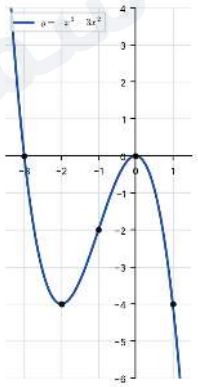
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
التقعر	$\cup$	-2	$\cap$

منحنى f مقعر للأعلى في $(-\infty, -1)$

منحنى f مقعر للأسفل في $(-1, \infty)$

نقطة الانعطاف $(-1, -2)$

x	-3	-2	-1	0	1
y	0	-4	-2	0	-4
النوع	إضافية	صغرى محلية	انعطاف	عظمى محلية	إضافية



صغرى محلية $f(-2) = -4$ ، عظمى محلية $f(0) = 0$ ، انعطاف $(-1, -2)$

بند (3-4) – تمرين إضافي (غير مرقم) ادرس تغيرات الدالة : $f(x)=3x^4+4x^3+2$ وارسم بيانها

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 3x^4=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} 3x^4=\infty$$

$$f'(x)=12x^3+12x^2$$

نضع $f'(x)=0$: $12x^3+12x^2=0$

$$12x^2(x+1)=0$$

$x=-1$ أو $x=0$

النقاط الحرجة: $(0,2)$ ، $(-1,1)$

x	$-\infty$		-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	↘	1	↗	2	↗	

f متناقصة على $(-\infty,-1)$

f متزايدة على $(-1,0)$ ، $(0,\infty)$

عند $x=-1$ قيمة صغرى محلية هي $f(-1)=1$

عند $x=0$ لا توجد قيمة قصوى (f' لا تغير إشارتها)

$$f''(x)=36x^2+24x$$

نضع $f''(x)=0$: $12x(3x+2)=0$

$x=-\frac{2}{3}$ أو $x=0$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
التقعر	∪	$\frac{38}{27}$	∩	2	∪	

منحنى f مقعر للأعلى في $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$ ، $(0,\infty)$

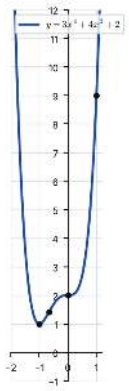
منحنى f مقعر للأسفل في $\left(-\frac{2}{3},0\right)$

نقطتا الانعطاف $\left(-\frac{2}{3},\frac{38}{27}\right)$ ، $(0,2)$

حساب القيم

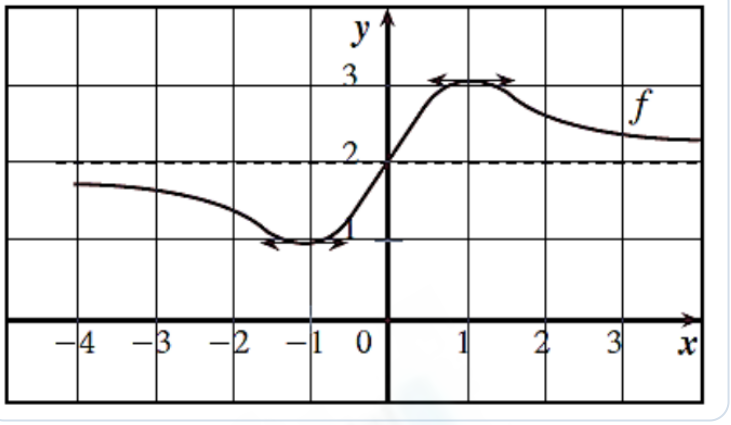
$$f(-1)=3-4+2$$
$$=1$$
$$f(0)=2$$
$$f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{48}{81}-\frac{32}{27}+2$$
$$=\frac{38}{27}\approx 1.41$$

x	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	0	1
y	18	1	≈ 1.41	2	9
النوع	إضافية	صغرى محلية	انعطاف	انعطاف	إضافية



صغرى محلية $f(-1)=1$ ، لا قيمة قصوى عند $x=0$ ، انعطاف $\left(-\frac{2}{3},\frac{38}{27}\right)$ ، $(0,2)$

بند (3-4) – تمرين (10) كوّن جدولاً لدراسة إشارة f' من بيان الدالة f الممثلة بالرسم أدناه .



الحل:

من الرسم : المماس أفقي عند $x = -1 \, ، \, x = 1$

$\therefore f'(-1) = 0 \, ، \, f'(1) = 0$

$\therefore (-\infty, -1)$ على f متناقصة $f'(x) < 0$

$\therefore (-1, 1)$ على f متزايدة $f'(x) > 0$

$\therefore (1, \infty)$ على f متناقصة $f'(x) < 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$	0		$-$
$f(x)$	↘		1	↗	3		↘

عند $x = -1$ قيمة صغرى محلية هي $f(-1) = 1$

عند $x = 1$ قيمة عظمى محلية هي $f(1) = 3$

$f'(-1) = f'(1) = 0 \, ، \, (-1, 1)$ على $f' > 0 \, ، \, (1, \infty) \, ، \, (-\infty, -1)$ على $f' < 0$

البند (3-5) – تطبيقات على القيم القصوى

بند (3-5) ص 63 – تمرين (3) أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8\ cm$ واحداً منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعاً .

الحل:

المساحة = الطول × العرض

$$A = x \cdot y$$

$$A = x(4 - x)$$

$$A(x) = 4x - x^2$$

$$A'(x) = 4 - 2x$$

نضع $A'(x) = 0 : 4 - 2x = 0$

$$x = 2$$

$$A''(x) = -2 < 0$$

$\therefore$ عند $x = 2$ تكون المساحة أكبر ما يمكن

$$y = 4 - x = 4 - 2 = 2$$

$\therefore x = y = 2\ cm$ **أي أن المستطيل مربع**

المحيط

مستطيل بعداه x ، y

$2x + 2y = 8$

$x + y = 4$

$y = 4 - x$

الشروط

$0 < x < 4$

$x = 2 \in (0, 4)$

بند (3-5) ص 63 – تمرين (7) ضلعان في مثلّث طولاهما a و b والزاوية بينهما θ ما قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن؟ (إرشاد مساحة المثلث $\frac{1}{2}ab\sin\theta$)

الحل:

$$A(\theta) = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

$$A'(\theta) = \frac{1}{2}ab\cos\theta$$

نضع $\frac{1}{2}ab\cos\theta = 0 : A'(\theta) = 0$

$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$A''(\theta) = -\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

$$A''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}ab < 0$$

$\therefore$ عند $\theta = \frac{\pi}{2}$ تكون المساحة أكبر ما يمكن

الشروط

a , b ثابتان موجبان

$0 < \theta < \pi$

$\frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}ab$$

$\frac{1}{2}ab$ = مساحة ، وأكبر $\theta = \frac{\pi}{2}$

بند (3-5) – تمرين إضافي (غير مرقم) ، الجزءان 1 ، 2

مجموع عددين غير سالبين هو 20 أوجد العددين إذا كان :

(1) مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن

(2) أحد العددين مضافاً إليه الجذر التربيعي للآخر أكبر ما يمكن

الحل:

(1)

$$S = x^2 + y^2$$

$$S(x) = x^2 + (20 - x)^2$$

$$S'(x) = 2x - 2(20 - x)$$

$$= 4x - 40$$

نضع $S'(x) = 0 : 4x - 40 = 0$

$$x = 10$$

$$S''(x) = 4 > 0$$

$\therefore$ عند $x = 10$ يكون مجموع المربعين أصغر ما يمكن

$$y = 20 - 10 = 10$$

(2)

$$F = x + \sqrt{y}$$

$$F(x) = x + \sqrt{20 - x}$$

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{20 - x}}$$

نضع $F'(x) = 0 : \frac{1}{2\sqrt{20 - x}} = 1$

$$\sqrt{20 - x} = \frac{1}{2}$$

$$20 - x = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{79}{4} = 19.75$$

$$F''(x) = \frac{-1}{4(20 - x)^{\frac{3}{2}}}$$

العلاقة

العددان x ، y

$x + y = 20$

$y = 20 - x$

الشروط

$x \geq 0$, $y \geq 0$

$0 \leq x \leq 20$

$10 \in [0, 20]$

$\frac{79}{4} \in [0, 20]$

$$F''\left(\frac{79}{4}\right) = \frac{-1}{4\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = -2 < 0$$

$\therefore$ عند $x = \frac{79}{4}$ يكون المقدار أكبر ما يمكن

$$y = 20 - \frac{79}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{79}{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{81}{4} = 20.25 = \text{أكبر قيمة}$$

(1) العددان 10 ، 10 ، (2) العددان $\frac{79}{4} = 19.75$ ، $\frac{1}{4} = 0.25$

بند (3-5) – تمرين إضافي (غير مرقم) مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم . يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى , ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله 800 متر ؟ وما أبعادها ؟

الحل:

المساحة = الطول × العرض

$$A = x \cdot y$$

$$A = (800 - 2y)\, y$$

$$A(y) = 800y - 2y^2$$

$$A'(y) = 800 - 4y$$

نضع $A'(y) = 0$: $800 - 4y = 0$

$$y = 200$$

$$A''(y) = -4 < 0$$

$\therefore$ عند $y = 200$ تكون المساحة أكبر ما يمكن

$$x = 800 - 2(200) = 400$$

$$A = 400 \times 200 = 80000\ m^2$$

أكبر مساحة $= 80000\ m^2$ ، الأبعاد $400\ m$ (موازٍ للنهر) ، $200\ m$

طول السياج

x : الضلع الموازي للنهر

y : الضلع العمودي

$$x + 2y = 800$$

$$x = 800 - 2y$$

الشروط

$$0 < y < 400$$

$$y = 200 \in (0, 400)$$

بند (3-5) – تمرين إضافي (غير مرقم) ما أكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية وطول وتره يساوي 6 سم ؟ وما أبعاده ؟

الحل:

$$A = \frac{1}{2}x \cdot y$$

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{36 - x^2}$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{36 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{36 - x^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{36 - x^2 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = \frac{18 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$$

نضع $A'(x) = 0 : 18 - x^2 = 0$

$$x^2 = 18$$

$x = 3\sqrt{2}$ ($x = -3\sqrt{2}$ مرفوض)

x	0		$3\sqrt{2}$		6
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$\nearrow$	9	$\searrow$	

∴ عند $x = 3\sqrt{2}$ تكون المساحة أكبر ما يمكن

$$y = \sqrt{36 - 18} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 9\ cm^2$$

أكبر مساحة $= 9\ cm^2$ ، الضلعان القائمان $3\sqrt{2}\ cm$ ، $3\sqrt{2}\ cm$

فيثاغورث

الضلعان القائمان x ، y

$x^2 + y^2 = 36$

$y = \sqrt{36 - x^2}$

الشروط

$0 < x < 6$

$3\sqrt{2} \in (0, 6)$

البند (1-4) – التقدير

تمارين (4-1) – تمرين (1) أوجد القيمة الحرجة $z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لكل مستويات الثقة التالية، وذلك باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

(a) 97%

(b) 94%

(c) 99.2%

(d) 92%

الحل:

(a) 97%

$$1-\alpha=0.97\Rightarrow\alpha=0.03\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.015$$

$$\text{المساحة}=1-0.015=0.985\Longleftarrow\text{من الجدول}\ z_{\frac{\alpha}{2}}=2.17$$

(b) 94%

$$1-\alpha=0.94\Rightarrow\alpha=0.06\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.03$$

$$\text{المساحة}=1-0.03=0.97\Longleftarrow\text{من الجدول}\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.88$$

(c) 99.2%

$$1-\alpha=0.992\Rightarrow\alpha=0.008\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.004$$

$$\text{المساحة}=1-0.004=0.996\Longleftarrow\text{من الجدول}\ z_{\frac{\alpha}{2}}=2.65$$

(d) 92%

$$1-\alpha=0.92\Rightarrow\alpha=0.08\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.04$$

$$\text{المساحة}=1-0.04=0.96\Longleftarrow\text{من الجدول}\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.75$$

$$\text{(a)}\ z_{\frac{\alpha}{2}}=2.17\text{ ، (b)}\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.88\text{ ، (c)}\ z_{\frac{\alpha}{2}}=2.65\text{ (d)}\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.75$$

تمارين (4-1) – تمرين إضافي (غير مرقم) ، الأجزاء 1-3

قامت شركة عالمية بدراسة لمعرفة مدى أداء سياراتها أخذت عينة من $n = 1000$ سيارة والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma^2 = 0.25$ والمتوسط الحسابي لبقاء السيارة جيدة ل $\bar{x} = 5$ سنوات باستخدام مستوى ثقة 95%.

(1) أوجد هامش الخطأ.

(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

(3) فسّر فترة الثقة.

الحل:

$$1-\alpha = 0.95 \text{ ، } \bar{x} = 5 \text{ ، } \sigma^2 = 0.25 \Rightarrow \sigma = \sqrt{0.25} = 0.5 \text{ ، } n = 1000$$

(1) $\because \sigma$ معلوم ، عند مستوى ثقة 95%

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$\therefore E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{1000}}$$

$$\approx 0.031$$

(2) فترة الثقة

$$(\bar{x} - E \, , \, \bar{x} + E)$$

$$= (5 - 0.031 \, , \, 5 + 0.031)$$

$$= (4.969 \, , \, 5.031)$$

(3) التفسير: عند اختيار 100 عينة عشوائية حجم كل منها $n = 1000$

وحساب فترة الثقة لكل منها فإن نحو 95 فترة منها تحوي μ

(1) $E \approx 0.031$ **، (2)** $(4.969 \, , \, 5.031)$

تمارين (4-1) – تمرين إضافي (غير مرقم)

في دراسة للمدّة الزمنيّة المطلوبة من طلاب جامعيين لإنهاء دراستهم، اختير عشوائيًّا 80 طالبًا، فكان متوسط السنوات لهذه العينة (سنوات) $\bar{x} = 4.8$، والانحراف المعياري لهذه العينة $S = 2.2$.

الحل:

$$1-\alpha = 0.95 \text{ ، } S = 2.2 \text{ ، } \bar{x} = 4.8 \text{ ، } n = 80$$

(1) هامش الخطأ : $\because \sigma$ غير معلوم ، $n = 80 > 30$

$$\therefore E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ عند مستوى ثقة 95%

$$E = 1.96 \times \frac{2.2}{\sqrt{80}} \approx 0.482$$

(2) فترة الثقة

$$(\bar{x} - E \, , \, \bar{x} + E)$$

$$= (4.8 - 0.482 \, , \, 4.8 + 0.482)$$

$$= (4.318 \, , \, 5.282)$$

$E \approx 0.482$ ، فترة الثقة $(4.318 \, , \, 5.282)$

تمارين (4-1) – تمرين إضافي (غير مرقم)

عينة عشوائية حجمها $n = 16$ أُخذت من مجتمع إحصائي حيث التباين $S^2 = 15$، وعلم أن المتوسط الحسابي $\bar{x} = 13$.
أوجد فترة الثقة للمعلمة المجهولة μ عند درجة ثقة 95%.

الحل:

$$n = 16 \text{ ، } S^2 = 15 \Rightarrow S = \sqrt{15} \approx 3.873 \text{ ، } \bar{x} = 13$$

$$1-\alpha = 0.95$$

$\because \sigma$ غير معلوم ، $n = 16 < 30$

$$\therefore E = t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$E = 2.131 \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} \approx 2.063$$

فترة الثقة

$$(\bar{x} - E \, , \, \bar{x} + E)$$

$$= (13 - 2.063 \, , \, 13 + 2.063)$$

إيجاد $t_{\frac{\alpha}{2}}$

$1-\alpha = 0.95$

$\alpha = 0.05$

$\frac{\alpha}{2} = 0.025$

درجة الحرية $n - 1 = 15$

$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.131$

$= (10.937\ ,\ 15.063)$

البند (2-4) – اختبارات الفروض الإحصائية

تمارين (2-4) ص 73 – تمرين (1) يزعم أستاذ مادة الرياضيات أن المتوسط الحسابي لدرجات الطلاب في مادته هو 16 حيث النهاية العظمى 20 درجة. إذا أعطيت عينة عشوائية من 25 طالباً. متوسطاً حسابياً (طالباً) $\bar{x} = 15$ والانحراف المعياري (درجة) $\sigma = 1.4$ ، فاختبر فرضية الأستاذ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$. (ص73)

الحل:

$$\alpha = 0.05\ ،\ \sigma = 1.4\ ،\ \bar{x} = 15\ ،\ n = 25$$

① الفروض الإحصائية :

$$H_1 : \mu \neq 16\ ،\ H_0 : \mu = 16$$

② المقياس الإحصائي : $\because \sigma$ معلوم

$$\therefore Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{15 - 16}{\frac{1.4}{\sqrt{25}}}$$

$$= \frac{-1}{0.28} \approx -3.57$$

③ القيمة الحرجة عند $\alpha = 0.05$: $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

④ فترة قبول فرض العدم $(-1.96\ ,\ 1.96)$

⑤ القرار : $\because\ -3.57 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$

نرفض فرض العدم $H_0 : \mu = 16$ ونقبل الفرض البديل $H_1 : \mu \neq 16$ (فرضية الأستاذ غير صحيحة)

تمارين (2-4) ص 73 – تمرين (3) في عينة من مجتمع إحصائي إذا كانت قيمة $\bar{x} = 40$ ، والانحراف المعياري $S = 7$ ، اختبر الفرض إذا $\mu = 35$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 35$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$. (ص73)

(a) حجم العينة $n = 50$

(b) حجم العينة $n = 20$

الحل:

(a)

① الفروض الإحصائية :

$$H_1 : \mu \neq 35 \text{ ، } H_0 : \mu = 35$$

② المقياس الإحصائي : $\because \sigma$ غير معلوم ، $n = 50 > 30$

$$\therefore Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{40 - 35}{\frac{7}{\sqrt{50}}}$$
$$\approx 5.05$$

③ القيمة الحرجة عند $\alpha = 0.05$: $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

④ فترة قبول فرض العدم $(-1.96 \, , \, 1.96)$

⑤ القرار : $\because \because 5.05 \notin (-1.96 \, , \, 1.96) \therefore$ نرفض H_0 ونقبل H_1

(b)

① الفروض الإحصائية :

$$H_1 : \mu \neq 35 \text{ ، } H_0 : \mu = 35$$

② المقياس الإحصائي : $\because \sigma$ غير معلوم ، $n = 20 < 30$

$$\therefore t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{40 - 35}{\frac{7}{\sqrt{20}}}$$
$$\approx 3.19$$

③ القيمة الحرجة عند $\alpha = 0.05$

$n - 1 = 19 =$ درجة الحرية ، $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.093$$

④ فترة قبول فرض العدم $(-2.093 \, , \, 2.093)$

⑤ القرار : $\because \because 3.19 \notin (-2.093 \, , \, 2.093) \therefore$ نرفض H_0 ونقبل H_1

(a) $Z \approx 5.05$: **نرفض** $H_0 : \mu = 35$ **ونقبل** $H_1 : \mu \neq 35$ ،
(b) $t \approx 3.19$: **نرفض** $H_0 : \mu = 35$ **ونقبل** $H_1 : \mu \neq 35$

البند (3-4) – الارتباط والانحدار

تمارين (3-4) – تمرين (3) يوضح الجدول أدناه وزن البلاستيك المستهلك x بالكيلوجرام (kg) من قبل عدد أفراد أسرة y .

(a) اصنع مخطط الانتشار.

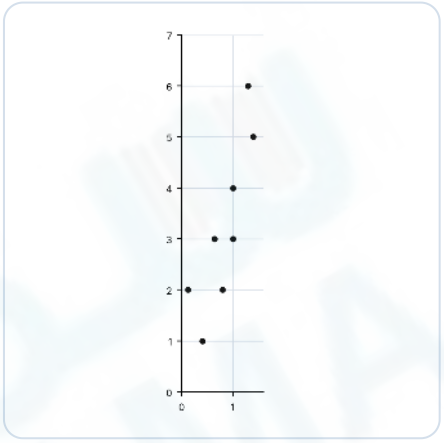
(b) أوجد قيمة معامل الارتباط الخطي r .

(c) وضح ما إذا كان هناك ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين

وزن البلاستيك x (kg)	0.12	0.64	1	0.8	0.4	1.4
عدد أفراد الأسرة y	2	3	1	2	1	5

الحل:

(a) مخطط الانتشار:



(b)

$$n = 8$$

x	y	xy	x^2	y^2
0.12	2	0.24	0.0144	4
0.64	3	1.92	0.4096	9
1	3	3	1	9
1.3	6	7.8	1.69	36
1	4	4	1	16
0.8	2	1.6	0.64	4
0.4	1	0.4	0.16	1
1.4	5	7	1.96	25
$\Sigma x = 6.66$	$\Sigma y = 26$	$\Sigma xy = 25.96$	$\Sigma x^2 = 6.874$	$\Sigma y^2 = 104$

$$r = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \cdot \Sigma y}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{8(25.96) - (6.66)(26)}{\sqrt{8(6.874) - (6.66)^2} \cdot \sqrt{8(104) - (26)^2}}$$
$$= \frac{34.52}{\sqrt{10.6364} \cdot \sqrt{156}}$$
$$\approx 0.85$$

(c)

$\because r \approx 0.85$ قريبة من 1 $\therefore$ يوجد ارتباط خطي طردي قوي (وثيق) بين المتغيرين

(b) $r \approx 0.85$ ،

(c) $\because r \approx 0.85$ **قريبة من** 1 $\therefore$ **يوجد ارتباط خطي طردي قوي (وثيق) بين المتغيرين**

تمارين (4-3) – تمرين (4) توضح البيانات المزدوجة في الجدول أدناه وزن الأوراق x بالكيلوجرام (kg) التي تتم التخلص منها وعدد أفراد الأسرة y .

(a) اصنع مخطط الانتشار.

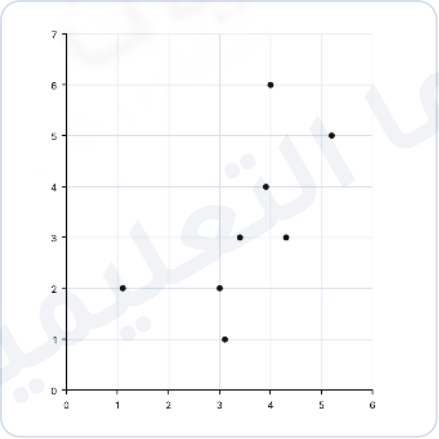
(b) أوجد قيمة معامل الارتباط الخطي r .

(c) وضح ما إذا كان هناك ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين

وزن الأوراق x (kg)	1.1	3.4	4.3	4	3.9	3	3.1	5.2
عدد أفراد الأسرة y	2	3	3	6	4	2	1	5

الحل:

(a) مخطط الانتشار:



(b)

$n = 8$

y^2	x^2	xy	y	x
4	1.21	2.2	2	1.1
9	11.56	10.2	3	3.4
9	18.49	12.9	3	4.3
36	16	24	6	4
16	15.21	15.6	4	3.9
4	9	6	2	3
1	9.61	3.1	1	3.1
25	27.04	26	5	5.2
$\Sigma y^2 = 104$	$\Sigma x^2 = 108.12$	$\Sigma xy = 100$	$\Sigma y = 26$	$\Sigma x = 28$

$$r = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \cdot \Sigma y}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$
$$= \frac{8(100) - (28)(26)}{\sqrt{8(108.12) - (28)^2} \cdot \sqrt{8(104) - (26)^2}}$$
$$= \frac{72}{\sqrt{80.96} \cdot \sqrt{156}}$$
$$\approx 0.64$$

(c)

$\because r \approx 0.64$ ارتباط طردي متوسط $\therefore$ لا يوجد ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين

(b) $r \approx 0.64$ ،

(c) $\because r \approx 0.64$ **ارتباط طردي متوسط** $\therefore$ **لا يوجد ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين**

تمارين (4-3) ص 76 – تمرين (5) باستخدام البيانات التالية لقيم (x) و (y) أوجد: (ص76)

(a) معادلة خط الانحدار.

(b) قيم y عندما $x = 7$.

(c) مقدار الخطأ عندما $x = 2$.

x	1	2	4	5
y	3	5	9	11

الحل:

(a)

$n = 4$

x	y	xy	x^2
1	3	3	1
2	5	10	4
4	9	36	16
5	11	55	25
$\Sigma x = 12$	$\Sigma y = 28$	$\Sigma xy = 104$	$\Sigma x^2 = 46$

$$b = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \cdot \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{4(104) - (12)(28)}{4(46) - (12)^2} = \frac{80}{40} = 2$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{28}{4} = 7 \, , \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{12}{4} = 3$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 7 - (2)(3) = 1$$

معادلة خط الانحدار: $\hat{y} = a + bx$

$$\therefore \ \hat{y} = 1 + 2x$$

(b)

عند $x = 7$: $\hat{y} = 1 + 2 \times 7 = 15$

(c)

عند $x = 2$: القيمة الفعلية $y = 5$

القيمة المتوقعة $\hat{y} = 1 + 2 \times 2 = 5$

مقدار الخطأ $y - \hat{y} = 5 - (5) = 0$

(a) $\hat{y} = 1 + 2x$ ،
(b) $\hat{y} = 15$ ،
(c) الخطأ $= 0$

تمارين (3-4) ص 76 – تمرين (6) باستخدام البيانات التالية لقيم (x) و (y) أوجد: (ص76)

(a) معادلة خط الانحدار.

(b) قيم y عندما $x = 8$.

(c) مقدار الخطأ عندما $x = 5$.

x	5	3	2	1	0	2
y	-2	0	1	2	3	1

الحل:

(a)

$n = 6$

x	y	xy	x^2
5	-2	-10	25
3	0	0	9
2	1	2	4
1	2	2	1
0	3	0	0
2	1	2	4
$\Sigma x = 13$	$\Sigma y = 5$	$\Sigma xy = -4$	$\Sigma x^2 = 43$

$$b = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \cdot \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$
$$= \frac{6(-4) - (13)(5)}{6(43) - (13)^2} = \frac{-89}{89} = -1$$
$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{5}{6} \text{ ، } \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{13}{6}$$
$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{5}{6} - (-1)\left(\frac{13}{6}\right) = 3$$

معادلة خط الانحدار: $\hat{y} = a + bx$

(b)

عند $x = 8$: $\hat{y} = 3 - (8) = -5$

$$\therefore\ \hat{y} = 3 - x$$

(c)

عند $x = 5$: القيمة الفعلية $y = -2$

القيمة المتوقعة $\hat{y} = 3 - (5) = -2$

مقدار الخطأ $y - \hat{y} = -2 - (-2) = 0$

(a) $\hat{y} = 3 - x$ ،

(b) $\hat{y} = -5$ ،

(c) الخطأ $0 =$