سما
SAMA

مذكرات سما

حل
مذكرة الطالب

12

الصف الثاني عشر

المرحلة الثانوية- علمي



الفصل الدراسي الأول
2027 - 2026

www.samakw.com
samakw_net
60084568 /50855008/97442417
حولي مجمع بيروت الدور الأول

الرياضيات · الصف الثاني عشر علمي · العام الدراسي 2026 / 2027 · الفصل الدراسي الأول

حل مذكرة الطالب – الحل النموذجي

محلولة خطوة بخطوة بطرق حل أ. وليد حسين – منصة سما التعليمية



المحتوى

الجزء الأول حل جميع تمارين «حاول أن تحل» مرتبة حسب البنود

الجزء الثاني التمارين الموضوعية من كتاب التمارين مع تفسير مختصر

الجزء الأول: حل تمارين «حاول أن تحل»

البند (1-1) – النهايات

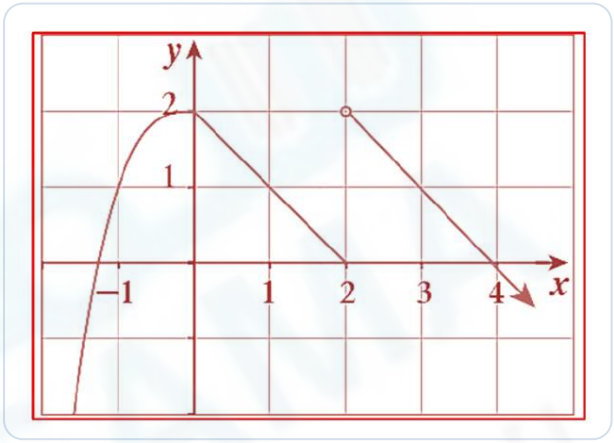
حاول أن تحل (1) ص 16 يمثل الشكل المقابل بيان الدالة f : أوجد إن أمكن :

(a) $\lim_{x\to -1} f(x)$

(b) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 3} f(x)$



الحل:

(a)

من الرسم:

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$$

$$\because \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to -1} f(x) = 1$$

(b)

من الرسم:

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$$

$$\because \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 2$$

(c)

من الرسم:

من جهة اليمين:	من جهة اليسار:
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$	$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$

$$\because \lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) \text{ غير موجودة}$$

(d)

من الرسم:

من جهة اليمين:	من جهة اليسار:
$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$	$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$

$$\because \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x) = 1$$

(a) $= 1$ ،

(b) $= 2$ ،

(c) غير موجودة ،

(d) $= 1$

حاول أن تحل (2) ص 17 بفرض أن : $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$ ، $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$ أوجد :

(a) $\lim_{x\to 2} \big(f(x) + g(x)\big)$

(b) $\lim_{x\to 2} \big(f(x) \cdot g(x)\big)$

(c) $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{8 \cdot f(x) \cdot g(x)}{f(x) + g(x)}\right)$

الحل:

(a)

$$\lim_{x\to 2} \big(f(x) + g(x)\big)$$
$$= \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x)$$
$$= 7 + (-3) = 4$$

شرط المقام

(c)

$$\lim_{x\to 2} \big(f(x) + g(x)\big)$$
$$= \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x)$$
$$= 7 + (-3) = 4 \neq 0$$

(b)

$$\lim_{x\to 2}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$$
$$=\lim_{x\to 2} f(x)\cdot \lim_{x\to 2} g(x)$$
$$=7(-3)=-21$$

(c)

$$\lim_{x\to 2}\frac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}$$
$$=\frac{\lim_{x\to 2} 8f(x)\cdot g(x)}{\lim_{x\to 2}\big(f(x)+g(x)\big)}$$
$$=\frac{8\lim_{x\to 2} f(x)\cdot \lim_{x\to 2} g(x)}{\lim_{x\to 2} f(x)+\lim_{x\to 2} g(x)}$$
$$=\frac{8(7)(-3)}{4}$$

(a) $= 4$ ،
(b) $= -21$ ،
(c) $= -42$

حاول أن تحل (3) ص 18 أوجد :

(1) $\lim_{x\to 1}(x^3+3x^2-2x-17)$

(2) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+5x+6}{x+2}\right)$

الحل:

(1)

$$\lim_{x\to 1}(x^3+3x^2-2x-17)$$
$$=(1)^3+3(1)^2-2(1)-17$$
$$=1+3-2-17=-15$$

(2)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$$
$$=\frac{\lim_{x\to 2}(x^2+5x+6)}{\lim_{x\to 2}(x+2)}$$
$$=\frac{(2)^2+5(2)+6}{2+2}=\frac{20}{4}$$

(1) $= -15$ ، **(2)** $= 5$

شرط المقام (2)

$$\lim_{x\to 2}(x+2)$$
$$=2+2=4\neq 0$$

حاول أن تحل (4) ص 19

إذا كانت الدالة f : $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & : x<2\\ x-1 & : x>2\end{cases}$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

الحل:

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x-1)$$
$$=2-1=1$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-3)$$
$$=(2)^2-3=1$$

$$\because \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=1$$

حاول أن تحل (5) ص 19

إذا كانت الدالة g : $g(x)=\begin{cases}x^3+x & : x>1\\ \dfrac{x}{x^2+1} & : x\le 1\end{cases}$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

الحل:

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^3+x)$$
$$=(1)^3+1=2$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x^2+1}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1^-} x}{\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)}$$
$$=\frac{1}{2}$$

$$\because \lim_{x\to 1^+} g(x)\neq \lim_{x\to 1^-} g(x)$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} g(x)$ **غير موجودة**

شرط المقام

$$\lim_{x\to 1^-}(x^2+1)$$
$$=(1)^2+1=2\neq 0$$

حاول أن تحل (6) ص 20

لتكن $f(x) = x^2 - |x+2|$:

(a) اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

(b) أوجد $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ ، $\lim_{x\to -2^-} f(x)$

(c) هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

الحل:

(a)

$$f(x) = x^2 - |x+2|$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - (x+2) = x^2 - x - 2 & : x \geq -2 \\ x^2 + (x+2) = x^2 + x + 2 & : x < -2 \end{cases}$$

تفريغ المطلقة

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & : x \geq -2 \\ -(x+2) & : x < -2 \end{cases}$$

(b)

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (x^2 - x - 2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (x^2 + x + 2) = (-2)^2 + (-2) + 2 = 4$$

(c)

$$\because \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = 4$$

(b) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 4$ ، $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 4$

(c) $\lim_{x\to -2} f(x) = 4$ **نعم**

حاول أن تحل (7) ص 22

أوجد :

(a) $\lim_{x\to 5} \sqrt{x^2 - 5}$

(b) $\lim_{x\to 4} \left(x + \sqrt{x}\right)^4$

(c) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$

الحل:

(a)

$$\lim_{x\to 5} \sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{\lim_{x\to 5} (x^2 - 5)} = \sqrt{(5)^2 - 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

شرط ما تحت الجذر

(a)

$$\lim_{x\to 5} (x^2 - 5) = (5)^2 - 5 = 20 > 0$$

(b)

$$\lim_{x\to 4}\left(x+\sqrt{x}\right)^4$$
$$=\left(\lim_{x\to 4}\left(x+\sqrt{x}\right)\right)^4$$
$$=\left(\lim_{x\to 4}x+\lim_{x\to 4}\sqrt{x}\right)^4$$
$$=\left(4+\sqrt{\lim_{x\to 4}x}\right)^4$$
$$=\left(4+\sqrt{4}\right)^4=(6)^4=1296$$

(c)

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$$
$$=\frac{\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{\lim_{x\to -1}(x-2)}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{\lim_{x\to -1}(x^3-4x+5)}}{\lim_{x\to -1}(x-2)}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{(-1)^3-4(-1)+5}}{-3}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{8}}{-3}$$

(a) $= 2\sqrt{5}$ ،
(b) $= 1296$ ،
(c) $= -\frac{2}{3}$

شرط ما تحت الجذر

(b)

$$\lim_{x\to 4}x=4>0$$

شرط المقام

(c)

$$\lim_{x\to -1}(x-2)=-1-2=-3\neq 0$$

حاول أن تحل (8) ص 33 أوجد إن أمكن :

(a) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

(c) $\lim_{x\to 5}\frac{|x+2|-7}{x^2-25}$

الحل:

(a)

$$\frac{0}{0}\ \text{صيغة غير معينة}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+1}{x-2}$$

شرط المقام

(a)

$$\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4\neq 0$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x+1)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-2)} = \frac{-2+1}{-2-2} = \frac{1}{4}$$

(c)

$$\frac{0}{0} \text{ صيغة غير معينة}$$
$$= \lim_{x\to 5} \frac{(x+2)-7}{x^2-25}$$
$$= \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(x-5)(x+5)}$$
$$= \lim_{x\to 5} \frac{1}{x+5}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 5} 1}{\lim\limits_{x\to 5}(x+5)}$$

(a) $= \frac{1}{4}$

(c) $= \frac{1}{10}$

تفريغ المطلقة

(c)

$|x+2| = x+2 \ : \ x \to 5$

شرط المقام

(c)

$$\lim_{x\to 5}(x+5)$$
$$= 5+5 = 10 \neq 0$$

مثال (8) ص 23 - c -

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$$

الحل:

$$\frac{0}{0} \text{ صيغة غير معينة}$$

نفرض $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1} = \frac{|x-1|}{(x-1)(x+1)}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x+1} & : x < 1 \\ \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} & : x > 1 \end{cases}$$

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1^+} 1}{\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)}$$
$$= \frac{1}{2}$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x+1}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1^-}(-1)}{\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)}$$
$$= \frac{-1}{2}$$

$\because \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **غير موجودة**

تفريغ المطلقة

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & : x \geq 1 \\ -(x-1) & : x < 1 \end{cases}$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 1^+}(x+1)$$
$$= 1+1 = 2 \neq 0$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 1^-}(x+1)$$
$$= 1+1 = 2 \neq 0$$

حاول أن تحل (8) ص 23 أوجد إن أمكن :

(b) $\lim_{x\to -7} \dfrac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

الحل:

$\dfrac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x\to -7} \frac{((x+4)-3)((x+4)+3)}{x(x+7)}$$
$$= \lim_{x\to -7} \frac{(x+1)(x+7)}{x(x+7)}$$
$$= \lim_{x\to -7} \frac{x+1}{x}$$
$$= \frac{\lim_{x\to -7}(x+1)}{\lim_{x\to -7} x} = \frac{-7+1}{-7}$$
$$= \frac{6}{7}$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to -7} x = -7 \neq 0$$

حاول أن تحل (9) ص 25 أوجد :

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

(b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

(c) $\lim_{x\to 9} \dfrac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

الحل:

(a)

$\dfrac{0}{0}$ صيغة غير معينة (نضرب بالمرافق)

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5-9}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$= \frac{\lim_{x\to 2}(x+2)}{\lim_{x\to 2} x \cdot \left(\sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2+5)} + \lim_{x\to 2} 3\right)}$$

شرط ما تحت الجذر

(a)

$$\lim_{x\to 2}(x^2+5)$$
$$= (2)^2+5 = 9 > 0$$

شرط المقام

(a)

$$\lim_{x\to 2} x(\sqrt{x^2+5}+3)$$
$$= \lim_{x\to 2} x \cdot \left(\sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2+5)} + \lim_{x\to 2} 3\right)$$
$$= 2(\sqrt{9}+3)$$
$$= 2(6) = 12 \neq 0$$

$$= \frac{4}{2(3+3)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

(b)

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}}$$
$$= \lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}}$$
$$= \lim_{x\to -1} \sqrt[3]{x^2-x+1}$$
$$= \sqrt[3]{\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)}$$
$$= \sqrt[3]{(-1)^2-(-1)+1} = \sqrt[3]{3}$$

(c)

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة (نضرب بالمرافق)

$$= \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(3+\sqrt{x})}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(3+\sqrt{x})}{9-x}$$
$$= \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(3+\sqrt{x})}{-(x-9)}$$
$$= \lim_{x\to 9} -(3+\sqrt{x})$$
$$= -\left(\lim_{x\to 9} 3 + \lim_{x\to 9} \sqrt{x}\right)$$
$$= -\left(3+\sqrt{\lim_{x\to 9} x}\right)$$
$$= -(3+3)$$

(a) $= \frac{1}{3}$،
(b) $= \sqrt[3]{3}$،
(c) $= -6$

شرط ما تحت الجذر

(c)

$$\lim_{x\to 9} x = 9 > 0$$

حاول أن تحل (10) ص 26 أوجد إن أمكن :

(a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3}$

(b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}$

الحل:

(a)

$\dfrac{0}{0}$ صيغة غير معينة

باستخدام القسمة التركيبية:

3	1	−2	−4	3
		3	3	−3
	1	1	−1	0
	معاملات ناتج القسمة			الباقي

الباقي : 0

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+x-1)}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3}(x^2+x-1)$$
$$= (3)^2+3-1 = 11$$

(b)

$\dfrac{0}{0}$ صيغة غير معينة

باستخدام القسمة التركيبية:

2	−1	0	1	0	1	22
		−2	−4	−6	−12	−22
	−1	−2	−3	−6	−11	0
	معاملات ناتج القسمة					الباقي

الباقي : 0

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(-x^4-2x^3-3x^2-6x-11)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2}(-x^4-2x^3-3x^2-6x-11)$$
$$= -(2)^4-2(2)^3-3(2)^2-6(2)-11$$

(a) $= 11$ ،

(b) $= -67$

البند (2-1) – نهايات تشتمل على ∞ ، $-\infty$

حاول أن تحل (1) ص 30 أوجد النهايات التالية إن أمكن :

(b) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x+2}{x^2+9}$

الحل:

نقسم البسط والمقام على x^2

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{9}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{9}{x^2}}$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{9}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to -\infty} 1 + \lim_{x\to -\infty}\frac{9}{x^2}$$
$$= 1+0 = 1 \neq 0$$

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2}}{\lim_{x\to-\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{9}{x^2}}$$
$$= \frac{0+0}{1+0}$$

البند (3-1) – صيغ غير معينة

حاول أن تحل (1) ص 37 أوجد $\lim_{x\to\infty} (-3x^2 + 2x - 4)$

الحل:

حسب الملاحظة: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$

$$= \lim_{x\to\infty} (-3x^2)$$

$n = 2$ عدد زوجي ، $a = -3 < 0$

$$= -\infty$$

حاول أن تحل (2) ص 39 استخدم النظرية السابقة في حساب كل من :

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{4x^3 - 2x + 3}$

الحل:

(a)

درجة البسط = درجة المقام $= 2$

∴ حسب نظرية (11): النهاية = معامل أعلى قوة في البسط ÷ معامل أعلى قوة في المقام

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

(b)

درجة البسط $= 1$ < درجة المقام $= 3$

∴ حسب نظرية (11): النهاية $= 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{4x^3 - 2x + 3}$$

$= -\frac{1}{2}$ (a) ،
$= 0$ (b)

حاول أن تحل (3) ص 40 أوجد قيمة كل من الثابتين a , b إذا كانت :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{ax^2+bx-3}=-1$$

الحل:

$\because -1\neq 0 \therefore$ حسب نظرية (11) درجة البسط = درجة المقام $=1$

$\therefore$ معامل x^2 في المقام $=0\Rightarrow a=0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{bx-3}=-1$$

النهاية = معامل أعلى قوة في البسط ÷ معامل أعلى قوة في المقام

$$\frac{1}{b}=-1$$

$$\therefore a=0\ ,\ b=-1$$

حاول أن تحل (4) ص 41 أوجد :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}\quad \textbf{(a)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}\quad \textbf{(b)}$$

الحل:

(a)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-0}}{1+0}$$

تفريغ المطلقة

(a)

$$\sqrt{x^2}=|x|=x\ :\ x\to\infty$$

شرط ما تحت الجذر

(a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$
$$=2-0=2>0$$

شرط المقام

(a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$
$$=1+0=1\neq 0$$

$$= \sqrt{2}$$

(b)

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(-3+\frac{5}{x}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3+\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$
$$= \frac{\lim_{x\to-\infty}\left(-3+\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$
$$= \frac{\lim_{x\to-\infty}(-3)+\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}}{\sqrt{\lim_{x\to-\infty}1-\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2}}}$$
$$= \frac{-3+0}{\sqrt{1-0}}$$

(a) $= \sqrt{2}$،
(b) $= -3$

تفريغ المطلقة

(b)

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x \ : \ x \to -\infty$$

شرط ما تحت الجذر

(b)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2}$$
$$= 1-0 = 1 > 0$$

شرط المقام

(b)

$$\sqrt{\lim_{x\to-\infty}1-\frac{9}{x^2}}$$
$$= \sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}$$
$$= \sqrt{1} = 1 \neq 0$$

البند (4-1) – نهايات بعض الدوال المثلثية

حاول أن تحل (1) ص 43 أوجد النهاية :

(1) $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{2x^2-x}\right)$

(2) $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{3x\cos x}\right)$

(3) $\lim_{x\to0}\left(\frac{x\sin x}{\cos x-1}\right)$

الحل:

(1)

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x(2x-1)}$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2x-1}$$

(2)

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}\cdot\frac{\lim_{x\to0}1}{\lim_{x\to0}\cos x}$$

شرط المقام (1)

$$\lim_{x\to0}(2x-1)$$
$$= 2(0)-1 = -1 \neq 0$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)}$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{-1}$$
$$= -1$$

(3)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x(\cos x + 1)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x(\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x(\cos x + 1)}{-\sin^2 x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{\sin x} \cdot (\cos x + 1)\right)$$
$$= -\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \left(\lim_{x\to 0} \cos x + \lim_{x\to 0} 1\right)$$
$$= -(1)(1+1)$$

$= -2$ (3) ، $= \frac{2}{3}$ (2) ، $= -1$ (1)

شرط المقام (2)

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1 \neq 0$$

حاول أن تحل (2) ص 44 أوجد :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{2\tan x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{3\tan x + x^2 \cos x}{5x}\right)$

الحل:

(a)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{2\frac{\tan x}{x}}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}{2\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}}$$
$$= \frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2}$$

(b)

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{3\tan x}{5x} + \frac{x^2 \cos x}{5x}\right)$$
$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} + \frac{1}{5}\lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \cos x$$
$$= \frac{3}{5}(1) + \frac{1}{5}(0)(1)$$

(a) $= \frac{1}{2}$ ،
(b) $= \frac{3}{5}$

شرط المقام

(a)

$$2\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 2(1) = 2 \neq 0$$

حاول أن تحل (3) ص 45 أوجد :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x - x^2}{3x^2}\right) \quad \textbf{(a)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}\right) \quad \textbf{(b)}$$

الحل:

(a)

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{3x^2} - \frac{x^2}{3x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{3x} - \frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{3}(1) - \frac{1}{3} = 0$$

(b)

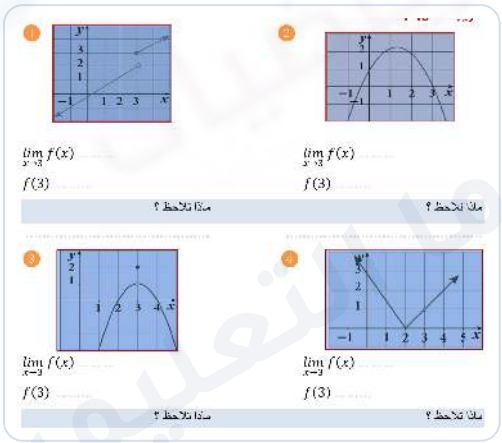
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3x\cos 4x}{5x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\cos 4x$$
$$= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x} + \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\cos 4x$$
$$= \frac{2}{5}(1) + \frac{3}{5}(1)$$

$= 0$ **(a)**

$= 1$ **(b)**

البند (1-5) – الاتصال

تدريب ص 49 لكل شكل من الأشكال التالية أكمل : $\lim_{x\to 3} f(x) = \ldots$ ، $f(3) = \ldots$ ، ماذا تلاحظ ؟



الحل:

①

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$$

$$\because \lim_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة

$f(3) = 3$

نلاحظ: $\lim_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة $\therefore f$ ليست متصلة عند $x = 3$

②

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 0$$

$$f(3) = 0$$

نلاحظ: $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) \therefore f$ متصلة عند $x = 3$

③

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 1$$

$$f(3) = 2$$

نلاحظ: $\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3) \therefore f$ ليست متصلة عند $x = 3$

④

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 1$$

$f(3)$ غير معرفة

نلاحظ: $f(3)$ غير موجودة $\therefore f$ ليست متصلة عند $x = 3$

① ليست متصلة ، ② متصلة ، ③ ليست متصلة ، ④ ليست متصلة عند $x = 3$

حاول أن تحل (1) ص 50 لتكن الدالة f : ابحث اتصال الدالة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$$

الحل:

$f(0) = (0)^3 + 0 = 0$ ①

② ندرس $\lim_{x\to 0} f(x)$

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 0^+} x^2}{\lim_{x\to 0^+} (x+1)}$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^3 + x) = (0)^3 + 0 = 0$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 0^+} (x+1) = 0 + 1 = 1 \neq 0$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$

$$\because \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0 \ ③$$

$\therefore f$ **متصلة عند** $x = 0$

مثال (2) ص 50 لتكن الدالة f : ابحث اتصال الدالة عند $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} 7 & : x \leq 3 \\ \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & : x > 3 \end{cases}$$

الحل:

$$f(3) = 7 \ ①$$

② ندرس $\lim_{x \to 3} f(x)$

من جهة اليمين:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} (x + 3)$$

$$= 3 + 3 = 6$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (7)$$

$$= 7$$

$$\because \lim_{x \to 3^+} f(x) \neq \lim_{x \to 3^-} f(x)$$

$\therefore \lim_{x \to 3} f(x)$ غير موجودة

$\therefore f$ **ليست متصلة عند** $x = 3$

حاول أن تحل (2) صـ 50 ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \\ x^2 + 1 & : x > 2 \end{cases}$$

الحل:

$$f(2) = 1$$

من جهة اليمين:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 + 1) = (2)^2 + 1 = 5$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x + 1) = 2(2) + 1 = 5$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 5 \because$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5 \therefore$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2) \because$$

$\therefore f$ **ليست متصلة عند** $x = 2$

حاول أن تحل (3) صـ 51 ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{|x+1|} - 2x & : x \neq -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$$

الحل:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+1} - 2x = 1 - 2x & : x > -1 \\ \dfrac{-(x+1)}{x+1} - 2x = -1 - 2x & : x < -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$$

$$f(-1) = 2 \therefore$$

من جهة اليمين:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (1 - 2x) = 1 - 2(-1) = 3$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (-1 - 2x) = -1 - 2(-1) = 1$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) \neq \lim_{x \to -1^-} f(x) \because$$

تفريغ المطلقة

$$|x+1| = \begin{cases} x + 1 & : x \geq -1 \\ -(x+1) & : x < -1 \end{cases}$$

$\therefore \lim_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة

$\therefore f$ **ليست متصلة عند** $x=-1$

التخلص من الانفصال أعد تعريف الدالة f : $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$ لتصبح دالة متّصلة عند $x=1$

الحل:

$f(1)$ غير معرفة

$\therefore f$ ليست متصلة عند $x=1$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$$

صيغة غير معينة $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+4)$$

$$=1+4=5$$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)$ موجودة ، والانفصال يمكن التخلص منه

نعيد تعريف الدالة بحيث $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=5$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1} & : x\neq 1\\ 5 & : x=1\end{cases}$$

شرط المقام

$x-1=0$

$\Rightarrow x=1$

$1\notin D_f$

صيغة غير معينة

$\lim_{x\to 1}(x^2+3x-4)$
$=1+3-4=0$

$\lim_{x\to 1}(x-1)$
$=1-1=0$

البند (6-1) – نظريات الاتصال

حاول أن تحل (1) صـ 55 ابحث اتصال الدالة f عند $x=c$ في كل مما يلي :

(a) $f(x)=x^2-4x+3+|x|\quad , c=3$

(b) $f(x)=\dfrac{\tan x}{x+1}\quad , c=\dfrac{\pi}{4}$

الحل:

(a)

نفرض $h(x)=|x|\ ,\ g(x)=x^2-4x+3$

فيكون $f(x)=g(x)+h(x)$

$D_f=D_g\cap D_h=\mathbb{R}$

① ندرس اتصال g

② ندرس اتصال h

مجال $\tan x$

$D_h=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ :\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\dfrac{\pi}{4}\in D_h$

$g(x) = x^2 - 4x + 3$

كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore g$ متصلة عند $x = 3$

$h(x) = |x|$ دالة القيمة المطلقة

متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore h$ متصلة عند $x = 3$

من ① ، ② $f = g + h$ متصلة عند $x = 3$ (مجموع دالتين متصلتين)

(b)

نفرض $g(x) = x + 1 \, , \, h(x) = \tan x$

فيكون $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$

(1) $h(x) = \tan x$ دالة مثلثية متصلة عند كل x في مجالها

$\therefore \dfrac{\pi}{4} \in D_h$ ، $x = \dfrac{\pi}{4}$ متصلة عند h

(2) $g(x) = x + 1$ كثيرة حدود متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

$\therefore g$ متصلة عند $x = \dfrac{\pi}{4}$

(3) $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 1 \neq 0$

من (1) ، (2) ، (3) $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ متصلة عند $x = \dfrac{\pi}{4}$ (نظرية)

(a) f **متصلة عند** $x = 3$ ،

(b) f **متصلة عند** $x = \dfrac{\pi}{4}$

حاول أن تحل (2) صـ 55 ابحث اتصال الدالة f :

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \dfrac{2x}{x - 2}$ عند $x = 1$

الحل:

نفرض $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \, , \, h(x) = \dfrac{2x}{x - 2}$

فيكون $f(x) = g(x) - h(x)$

$D_f = D_g \cap D_h = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} - \{2\}) = \mathbb{R} - \{2\}$

① ندرس اتصال g

$g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

شرط مقام g

$x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$ مرفوض

$D_g = \mathbb{R}$

② ندرس اتصال h

$h(x) = \dfrac{2x}{x - 2}$

دالة نسبية متصلة عند كل

دالة نسبية متصلة عند كل

$x \in \mathbb{R}$

$x = 1$ متصلة عند g ∴

$x \in \mathbb{R} - \{2\}$

$1 \in \mathbb{R} - \{2\}$ ∵

$x = 1$ متصلة عند h ∴

شرط مقام h

$x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = 2$

$D_h = \mathbb{R} - \{2\}$

من ① ، ② $f = g - h$ متصلة عند $x = 1$ (فرق دالتين متصلتين)

∴ f متصلة عند $x = 1$

حاول أن تحل (3) صـ 56 ابحث اتصال كل من الدالتين عند $x = -2$

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 4}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

الحل:

(a)

نفرض $h(x) = \sqrt[3]{x}$ ، $g(x) = x^2 + 4$

فيكون $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$

(1) $h(x) = \sqrt[3]{x}$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

∴ h متصلة عند $x = -2$

(2) $g(x) = x^2 + 4$ كثيرة حدود متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

∴ g متصلة عند $x = -2$

(3) $g(-2) = (-2)^2 + 4 = 8 \neq 0$

من (1) ، (2) ، (3) $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ متصلة عند $x = -2$ (نظرية)

(b)

نفرض $h(x) = x^2 - 4x + 3$ فيكون $f(x) = \sqrt{h(x)}$

(1) h كثيرة حدود متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ ∴ h متصلة عند $x = -2$

(2) $h(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 3 = 15 > 0$

من (1) ، (2) دالة الجذر f متصلة عند $x = -2$ (نظرية)

(a) f متصلة عند $x = -2$ ،

(b) f متصلة عند $x = -2$

حاول أن تحل (4) صـ 58 إذا كانت f , g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$g(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 2x + 3$ أوجد :

(a) $(g \circ f)(x)$ ،

(b) $(g \circ f)(-1)$ ،

(c) $(f \circ g)(x)$ ،

(d) $(f \circ g)(-1)$

الحل:

(a)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
$$= g(2x + 3)$$
$$= (2x + 3)^2 + 3$$
$$= 4x^2 + 12x + 9 + 3$$
$$= 4x^2 + 12x + 12$$

(b)

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1))$$
$$f(-1) = 2(-1) + 3 = 1$$
$$= g(1) = (1)^2 + 3 = 4$$

(c)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= f(x^2 + 3)$$
$$= 2(x^2 + 3) + 3$$
$$= 2x^2 + 9$$

(d)

$$(f \circ g)(-1) = f(g(-1))$$
$$g(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$$
$$= f(4) = 2(4) + 3 = 11$$

(a) $4x^2 + 12x + 12$ ،

(b) 4 ،

(c) $2x^2 + 9$ ،

(d) 11

حاول أن تحل (5) صـ 59 إذا كانت f , g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$g(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$, $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ أوجد :

(a) $(f\circ g)(x)$ ،

(b) $(g\circ f)(\sqrt{3})$

الحل:

(a)

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$
$$=f\left(\frac{3}{x^2+4}\right)$$
$$=\sqrt{1+\left(\frac{3}{x^2+4}\right)^2}$$
$$=\sqrt{1+\frac{9}{(x^2+4)^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(x^2+4)^2+9}{(x^2+4)^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{(x^2+4)^2+9}}{x^2+4}$$

(b)

$$(g\circ f)(\sqrt{3})=g(f(\sqrt{3}))$$
$$f(\sqrt{3})=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$$
$$=g(2)=\frac{3}{(2)^2+4}=\frac{3}{8}$$

شرط المقام

$x^2+4=0$

$x^2=-4$ مرفوض

$D_g=\mathbb{R}$

(a) $(f\circ g)(x)=\dfrac{\sqrt{(x^2+4)^2+9}}{x^2+4}$ ،

(b) $\dfrac{3}{8}$

حاول أن تحل (6) صـ 60 لتكن f , g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$g(x)=2x+3$, $f(x)=\dfrac{|x|}{x+2}$ ابحث اتصال الدالة $f\circ g$ عند $x=1$

الحل:

$$g(x)=2x+3\text{ ، }f(x)=\frac{|x|}{x+2}$$
$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+3)$$
$$=\frac{|2x+3|}{2x+3+2}=\frac{|2x+3|}{2x+5}$$

(1) $g(x)=2x+3$

g كثيرة حدود متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$

$\therefore g$ متصلة عند $x=1$

(3) $f(x)=\dfrac{|x|}{x+2}$

نفرض $u(x)=|x|$ ، $v(x)=x+2$ فيكون

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

$g(1) = 2(1) + 3 = 5$ (2)

$u(x) = |x|$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ $\therefore u$ (I)

متصلة عند $x = 5$

v كثيرة حدود متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ $\therefore v$ (II)

متصلة عند $x = 5$

$v(5) = 5 + 2 = 7 \neq 0$ (III)

من (I) ، (II) ، (III) f متصلة عند $x = 5$ (نظرية)

من (1) ، (2) ، (3) $f \circ g$ متصلة عند $x = 1$ (نظرية)

حاول أن تحل (7) صـ 60 لتكن : $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

الحل:

$$h(x) = |x| \text{ ، } g(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$(h \circ g)(x) = h(g(x))$$

$$= h(x^2 - 3x + 2) = |x^2 - 3x + 2| = f(x)$$

ندرس اتصال $h \circ g$ عند $x = 0$

$g(x) = x^2 - 3x + 2$ (1)

g كثيرة حدود متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ $\therefore g$ متصلة

عند $x = 0$

$g(0) = (0)^2 - 3(0) + 2$ (2)

$= 2$

$h(x) = |x|$ (3)

h متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

h متصلة عند $x = 2$ $\therefore$

من (1) ، (2) ، (3) $f(x) = (h \circ g)(x)$ متصلة عند $x = 0$ (نظرية)

f متصلة عند $x = 0$ $\therefore$

البند (7-1) – الاتصال على فترة

حاول أن تحل (1) صـ 62 ادرس اتصال الدالة f على $[1 , 5]$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & : x = 1 \\ x^2 + 1 & : 1 < x < 5 \\ \frac{26}{5}^x & : x = 5 \end{cases}$$

الحل:

$$D_f = [1,5]$$

① ندرس اتصال f عند $x=1$ من جهة اليمين

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 1^+} x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \therefore$$

$\therefore f$ متصلة عند $x=1$ من جهة اليمين

② ندرس اتصال f عند $x=5$ من جهة اليسار

$$f(5) = \frac{26}{5}$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} \frac{x^2+1}{x}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 5^-}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 5^-} x} = \frac{5^2+1}{5} = \frac{26}{5}$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = f(5) \therefore$$

$\therefore f$ متصلة عند $x=5$ من جهة اليسار

③ نفرض $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

g دالة نسبية متصلة عند كل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\therefore g$ متصلة على $(1,5)$ حيث $0 \notin (1,5)$

ولكن $f(x) = g(x) \quad \forall x \in (1,5)$

$\therefore f$ متصلة على $(1,5)$

من ① ، ② ، ③ f متصلة على $[1,5]$

$\therefore f$ متصلة على $[1\ ,\ 5]$

شرط المقام

$\lim\limits_{x\to 1^+} x = 1 \neq 0$

شرط المقام

$\lim\limits_{x\to 5^-} x = 5 \neq 0$

شرط المقام

$x = 0$

$0 \notin (1,5)$

حاول أن تحل (2) صـ 63 ادرس اتصال الدالة f على الفترة المبينة :

(a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}\quad,\ [0\ ,\ 3]$

(b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}\quad,\ [0\ ,\ 2]$

الحل:

(a)

$D_f=\mathbb{R}$

f دالة نسبية متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة على $\mathbb{R}$

$\because [0\ ,\ 3]\subset\mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة على $[0\ ,\ 3]$ (فترة جزئية)

(b)

$D_f=\mathbb{R}-\{-1\ ,\ 1\}$

$\because 1\in[0\ ,\ 2]\ ,\ 1\notin D_f$

$\therefore f(1)$ غير معرفة

$\therefore f$ ليست متصلة عند $x=1$

(a) f متصلة على $[0\ ,\ 3]$ ،
(b) f ليست متصلة على $[0\ ,\ 2]$

شرط المقام

(a)

$x^2+2=0$

$x^2=-2$ مرفوض

شرط المقام

(b)

$x^2-1=0$

$(x-1)(x+1)=0$

$x=1\ ,\ x=-1$

مثال (3) صـ 64 ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث :

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & : x\le -1\\ \dfrac{4}{x+3} & : x>-1\end{cases}$$

الحل:

$D_f=(-\infty,-1]\cup(-1,\infty)=\mathbb{R}$

① نفرض $g(x)=x+3$

g كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore g$ متصلة على $(-\infty,-1)$

ولكن $f(x)=g(x)\quad\forall x\in(-\infty,-1)$

$\therefore f$ متصلة على $(-\infty,-1)$

شرط المقام

$x+3=0\Rightarrow x=-3$

شرط المقام

$\lim\limits_{x\to-1^+}(x+3)$

$=-1+3=2\neq 0$

② نفرض $h(x) = \dfrac{4}{x+3}$

h دالة نسبية متصلة عند كل $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

$\therefore h$ متصلة على $(-1, \infty)$ حيث $-3 \notin (-1, \infty)$

ولكن $f(x) = h(x) \quad \forall x \in (-1, \infty)$

$\therefore f$ متصلة على $(-1, \infty)$

③ ندرس اتصال f عند $x = -1$

$f(-1) = (-1) + 3 = 2$

من جهة اليمين:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{4}{x+3} = \frac{\lim_{x \to -1^+} 4}{\lim_{x \to -1^+} (x+3)} = \frac{4}{2} = 2$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x+3) = -1 + 3 = 2$$

$\because \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = f(-1)$

$\therefore f$ متصلة عند $x = -1$

من ① ، ② ، ③ f متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

حاول أن تحل (4) صـ 65 لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} 5 & : x = 1 \\ ax + b & : 1 < x < 4 \\ b + 8 & : x = 4 \end{cases}$$

متصلة على $[1 , 4]$. أوجد قيمة الثابتين a , b

الحل:

$\because f$ متصلة على $[1, 4]$

$\therefore f$ متصلة عند $x = 4$ من جهة اليسار

$$f(4) = \lim_{x \to 4^-} f(x)$$

$$b + 8 = \lim_{x \to 4^-} (ax + b)$$

$$b + 8 = 4a + b$$

$$a = 2 \Rightarrow 4a = 8$$

$\therefore f$ متصلة عند $x = 1$ من جهة اليمين

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$5 = \lim_{x \to 1^+} (ax + b)$$

$$5 = a + b$$

$$b = 3 \Rightarrow 5 = 2 + b$$

$$\therefore a = 2 \ , \ b = 3$$

حاول أن تحل (5) صـ 66

لتكن $f : f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6 \ , \ 10]$

الحل:

$$D_f = \{x : x^2 - 7x + 10 \geq 0\}$$

المعادلة المناظرة: $x^2 - 7x + 10 = 0$

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

$$x = 2 \quad , \quad x = 5$$

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
إشارة $x^2 - 7x + 10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$D_f = (-\infty \ , 2] \cup [5 \ , \infty)$$

نفرض $g(x) = x^2 - 7x + 10$ فيكون $f(x) = \sqrt{g(x)}$

(1) g كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore g$ متصلة على $[6 \ , \ 10]$

(2) $\forall x \in [6 \ , \ 10] \subseteq [5 \ , \infty) \subseteq D_f \quad g(x) \geq 0$

من (1) ، (2) $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة على $[6 \ , \ 10]$

(نظرية)

f ، $D_f = (-\infty \ , 2] \cup [5 \ , \infty)$ متصلة على $[6 \ , \ 10]$

شرط ما تحت الجذر

$x^2 - 7x + 10 \geq 0$

حاول أن تحل (6) صـ 66 لتكن $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$: f

ادرس اتصال الدالة f على $[1\ ,\ 3]$

الحل:

$$D_f=\{x:-x^2+4x-3\geq 0\}$$

المعادلة المناظرة: $-x^2+4x-3=0$

$$x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0$$

$$x=1\quad ,\quad x=3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
إشارة $-x^2+4x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$D_f=[1\ ,\ 3]$$

نفرض $h(x)=-x^2+4x-3$ فيكون

$$f(x)=\sqrt{h(x)}$$

(1) h كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore h$ متصلة على $[1\ ,\ 3]$

(2) $\forall x\in[1\ ,\ 3]\quad h(x)\geq 0$

من (1) ، (2) $f(x)=\sqrt{h(x)}$ متصلة على $[1\ ,\ 3]$ (نظرية)

$\therefore f$ **متصلة على** $[1\ ,\ 3]$

شرط ما تحت الجذر

$-x^2+4x-3\geq 0$

حاول أن تحل (6) صـ 66 لتكن $f(x)=\sqrt[3]{-x^2+2x+5}$: f

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

الحل:

نفرض $h(x)=\sqrt[3]{x}$ ، $g(x)=-x^2+2x+5$

$$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(-x^2+2x+5)$$

$$=\sqrt[3]{-x^2+2x+5}=f(x)$$

(1) $g(x)=-x^2+2x+5$ كثيرة حدود

$\therefore g$ متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$

(2) $h(x)=\sqrt[3]{x}$ دالة جذرية دليلها فردي

$\therefore h$ متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$

من (1) ، (2) حسب النظرية (تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$)

$\therefore f = h \circ g$ **متصلة على** $\mathbb{R}$

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على $\mathbb{R}$ ادرس اتصال كل من الدوال التالية على $\mathbb{R}$

(16) $f(x) = |3x^2 + 4x - 1|$

الحل:

نفرض $h(x) = |x| \, , \, g(x) = 3x^2 + 4x - 1$

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(3x^2 + 4x - 1)$$
$$= |3x^2 + 4x - 1| = f(x)$$

(1) $g(x) = 3x^2 + 4x - 1$ كثيرة حدود

$\therefore g$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

(2) $h(x) = |x|$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

$\therefore h$ متصلة عند $g(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$

من (1) ، (2) حسب النظرية

$\therefore f = h \circ g$ **متصلة على** $\mathbb{R}$

البند (1-2) – معدلات التغير وخطوط التماس

حاول أن تحل صـ 78 (1) أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = (x-2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1\ ,\ 3)$

الحل:

إن وجدت $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h-2)^2 + 2 - 3}{h}$$

صيغة غير معينة $\dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(h-1)^2 - 1}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 2h + 1 - 1}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h-2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (h-2)$$
$$= 0 - 2 = -2$$

حساب $f(1)$

$$f(1) = (1-2)^2 + 2$$
$$= 3$$

$$m = -2$$

أسئلة من كتاب التمارين بند (2 - 1) صـ 33 – (1)

في التمارين $(1-4)$ ، أوجد ميل المماس في كل مما يلي عند النقاط المبينة :

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x = 2$

الحل:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2+h-1} - 1}{h}$$
صيغة غير معينة $\dfrac{0}{0}$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(1+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{1+h}$$
$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0}(-1)}{\lim\limits_{h\to 0}(1+h)} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$m = -1$$

حساب $f(2)$

$$f(2) = \frac{1}{2-1}$$
$$= 1$$

شرط المقام

$$\lim_{h\to 0}(1+h)$$
$$= 1 + 0 = 1 \neq 0$$

أسئلة من كتاب التمارين بند (2 - 1) صـ 33 – (2)

(2) $f(x) = x^2 - 4x$, $x = 1$

الحل:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 4(1+h) - (-3)}{h}$$
صيغة غير معينة $\dfrac{0}{0}$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 4 - 4h + 3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 2h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(h-2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(h-2)$$

حساب $f(1)$

$$f(1) = (1)^2 - 4(1)$$
$$= -3$$

$$= 0 - 2 = -2$$

$$m = -2$$

أسئلة من كتاب التمارين بند (2 - 1) صـ 33 – (4) (4) $f(x) = 4 - x^2$, $x = 1$

الحل:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 - (1+h)^2 - 3}{h}$$
صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 - 1 - 2h - h^2 - 3}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2h - h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-2-h)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (-2 - h)$$
$$= -2 - 0 = -2$$

$$m = -2$$

حساب $f(1)$

$$f(1) = 4 - (1)^2$$
$$= 3$$

البند (2-2) – المشتقة

مثال (1) صـ 80 باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f : f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

الحل:

إذا وجدت $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 1 - 3}{x - 1}$$
صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} 2(x + 1)$$

حساب $f(1)$

$$f(1) = 2(1)^2 + 1$$
$$= 3$$

$$= 2(1+1) = 4$$

$$f'(1) = 4$$

حاول أن تحل (1) صـ 80 باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f : f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

الحل:

إذا وجدت $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$$f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{3x^2 - 12}{x + 2}$$

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x \to -2} \frac{3(x^2 - 4)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{3(x-2)(x+2)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} 3(x - 2)$$

$$= 3(-2 - 2) = -12$$

$$f'(-2) = -12$$

حساب $f(-2)$

$$f(-2) = 3(-2)^2$$

$$= 12$$

حاول أن تحل (2) صـ 81 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$ عند $x=b\ ,\ b\neq 0$

الحل:

إذا وجدت $f'(b)=\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$

$$=\lim_{x\to b}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{b}}{x-b}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to b}\frac{\frac{b-x}{bx}}{x-b}$$

$$=\lim_{x\to b}\frac{-(x-b)}{bx(x-b)}$$

$$=\lim_{x\to b}\frac{-1}{bx}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to b}(-1)}{\lim\limits_{x\to b}(bx)}=\frac{-1}{b^2}$$

$$f'(b)=-\frac{1}{b^2}$$

حساب $f(b)$

$$f(b)=\frac{1}{b}\ ,\ b\neq 0$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to b}(bx)$$
$$=b\cdot b=b^2\neq 0$$

حاول أن تحل (3) صـ 82 لتكن f : $f(x)=|x-2|$

ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x=2$

الحل:

$$f(x)=\begin{cases}x-2 & :x\geq 2\\ -(x-2) & :x<2\end{cases}$$

من جهة اليمين:

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)-0}{x-2}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 2^+}1=1$$

من جهة اليسار:

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)-0}{x-2}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 2^-}(-1)=-1$$

$\because f'_+(2)\neq f'_-(2)$

$\therefore f'(2)$ غير موجودة

$\therefore f$ **غير قابلة للاشتقاق عند** $x=2$

تفريغ المطلقة

$$|x-2|=$$
$$\begin{cases}x-2 & :x\geq 2\\ -(x-2) & :x<2\end{cases}$$

حساب $f(2)$

$$f(2)=|2-2|$$
$$=0$$

مثال 4

لتكن f : $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{4} & ,x\le 1\\ \sqrt{x} & ,x>1\end{cases}$ أثبت أن للدالة f مشتقة جهة اليمين تساوي المشتقة جهة اليسار عند $x=1$.

الحل:

تصحيح نص المثال: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4} & ,x\le 1\\ \sqrt{x} & ,x>1\end{cases}$

من جهة اليمين:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

صيغة غير معينة (نضرب $\frac{0}{0}$ بالمرافق)

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1^+}1}{\lim\limits_{x\to 1^+}(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\frac{1}{2}$$

من جهة اليسار:

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}-1}{x-1}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{4}(x^2-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{4}(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{4}(x+1)$$
$$=\frac{1}{4}(1+1)=\frac{1}{2}$$

$f'_+(1)=f'_-(1)=\frac{1}{2}\because$

$f'_-(1)=f'_+(1)=\frac{1}{2}\therefore$

حساب $f(1)$

$$f(1)=\frac{1}{4}(1)^2+\frac{3}{4}$$
$$=1$$

شرط ما تحت الجذر

$$\lim_{x\to 1^+}x=1>0$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 1^+}(\sqrt{x}+1)$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x}+\lim_{x\to 1^+}1$$
$$=\sqrt{\lim_{x\to 1^+}x}+\lim_{x\to 1^+}1$$
$$=1+1=2\neq 0$$

حاول أن تحل (5) صـ 84 لتكن $f(x) = x^2 + 2$ باستخدام تعريف المشتقة .

الحل:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ إذا وجدت}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 + 2 - (a^2 + 2)}{x - a}$$

$$\frac{0}{0} \text{ صيغة غير معينة}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} (x + a)$$

$$= a + a = 2a$$

$\therefore f'(x) = 2x$ **لكل** $x \in \mathbb{R}$

حساب $f(a)$

$f(a) = a^2 + 2$

مثال (5) صـ 84 باستخدام تعريف الاشتقاق أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = x^3$

الحل:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ إذا وجدت}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$$

$$\frac{0}{0} \text{ صيغة غير معينة}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} (x^2 + ax + a^2)$$

$$= a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

$\therefore f'(x) = 3x^2$ **لكل** $x \in \mathbb{R}$

حساب $f(a)$

$f(a) = a^3$

حاول أن تحل (6) صـ 86

لتكن f : $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & ,x\le 2\\ 3x-2 & ,x>2\end{cases}$

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$.

الحل:

نبحث اتصال f عند $x=2$

① معرفة $f(2)=0$

② نبحث $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(3x-2)=6-2=4$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-4)=4-4=0$$

$\because \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

$\therefore f$ ليست متصلة عند $x=2$

وحيث إن الدالة غير المتصلة عند نقطة تكون غير قابلة للاشتقاق عندها

$\therefore f$ **غير قابلة للاشتقاق عند** $x=2$

حساب $f(2)$

$f(2)=(2)^2-4$

$=0$

حاول أن تحل (6) صـ 87

لتكن f : $f(x)=\begin{cases}-x-1 & ,x>\dfrac{-1}{3}\\ 5x+1 & ,x\le\dfrac{-1}{3}\end{cases}$

بين أن الدالة f متصلة وغير قابلة الاشتقاق عند $x=\dfrac{-1}{3}$.

الحل:

أولاً: الاتصال عند $x=-\dfrac{1}{3}$

① معرفة $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}$

② نبحث $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} f(x)$

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+} f(x)$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}^-} f(x)$$

حساب $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=5\left(-\dfrac{1}{3}\right)+1$

$=-\dfrac{5}{3}+1=-\dfrac{2}{3}$

$$= \lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} (-x - 1)$$
$$= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

$$= \lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} (5x + 1)$$
$$= 5\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} f(x) = -\frac{2}{3} \because$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} f(x) = -\frac{2}{3} \therefore$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} f(x) = f\left(-\frac{1}{3}\right) \text{ ③}$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ متصلة عند } f \therefore$$

ثانياً: قابلية الاشتقاق عند $x = -\frac{1}{3}$

من جهة اليمين:

$$f'_+\left(-\frac{1}{3}\right) =$$

إذا $\lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} \frac{f(x) - f\left(-\frac{1}{3}\right)}{x + \frac{1}{3}}$ وجدت

$$= \lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} \frac{-x - 1 + \frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}}$$

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} \frac{-x - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}}$$
$$= \lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} \frac{-\left(x + \frac{1}{3}\right)}{x + \frac{1}{3}}$$
$$= \lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} (-1) = -1$$

من جهة اليسار:

$$f'_-\left(-\frac{1}{3}\right) =$$

إذا $\lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} \frac{f(x) - f\left(-\frac{1}{3}\right)}{x + \frac{1}{3}}$ وجدت

$$= \lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} \frac{5x + 1 + \frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}}$$

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} \frac{5x + \frac{5}{3}}{x + \frac{1}{3}}$$
$$= \lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} \frac{5\left(x + \frac{1}{3}\right)}{x + \frac{1}{3}}$$
$$= \lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} 5 = 5$$

$$f'_+\left(-\frac{1}{3}\right) \neq f'_-\left(-\frac{1}{3}\right) \because$$

$$f'\left(-\frac{1}{3}\right) \text{ غير موجودة} \therefore$$

$f \therefore$ متصلة عند $x = -\frac{1}{3}$ وغير قابلة للاشتقاق عندها

حاول أن تحل (8) صـ 88 ادرس اتصال الدالة f عند $x=1$ وقابلية اشتقاقها عند هذه النقطة حيث:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2+1} & : x\le 1\\ 2x-1 & : x>1\end{cases}$$

الحل:

أولاً: الاتصال عند $x=1$

① معرفة $f(1)=1$

② نبحث $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

من جهة اليمين:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)$$
$$=\lim_{x\to 1^+}(2x-1)$$
$$=2-1=1$$

من جهة اليسار:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{x^2+1}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1^-} 2}{\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)}$$
$$=\frac{2}{2}=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=1 \therefore$$
$$\lim_{x\to 1} f(x)=1 \therefore$$

③ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$\therefore f$ متصلة عند $x=1$

ثانياً: قابلية الاشتقاق عند $x=1$

من جهة اليمين:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

إذا وجدت

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-1-1}{x-1}$$

صيغة غير معينة $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+} 2=2$$

من جهة اليسار:

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

إذا وجدت

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{2}{x^2+1}-1}{x-1}$$

صيغة غير معينة $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{2-(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{(x^2+1)(x-1)}$$

حساب $f(1)$

$$f(1)=\frac{2}{1+1}$$
$$=1$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to 1^-}(x^2+1)$$
$$=1+1=2\neq 0$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x+1)}{x^2+1}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1^-}(-x-1)}{\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)}$$
$$= \frac{-2}{2} = -1$$

$\because f'_+(1) \neq f'_-(1)$

$\therefore f'(1)$ غير موجودة

$\therefore f$ متصلة عند $x=1$ وغير قابلة للاشتقاق عندها

حاول أن تحل (9) صـ 89 لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & , x \leq -1 \\ x^2 - x - 2 & , x > -1 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

الحل:

من جهة اليمين:

$$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

إذا وجدت

$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2 - x - 2 - 0}{x+1}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-2)(x+1)}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to -1^+} (x-2)$$
$$= -1 - 2 = -3$$

من جهة اليسار:

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

إذا وجدت

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2 + x - 0}{x+1}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{x(x+1)}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to -1^-} x = -1$$

حساب $f(-1)$

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1)$$
$$= 0$$

$\because f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$

$\therefore f'(-1)$ غير موجودة

تدرب

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & ,x\le 1\\ 4x-1 & ,x>1\end{cases}$

ابحث قابلية الاشتقاق عند $x=1$.

الحل:

من جهة اليمين:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

إذا وجدت

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{4x-1-3}{x-1}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{4(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}4=4$$

من جهة اليسار:

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

إذا وجدت

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}(x+3)$$

$$=1+3=4$$

حساب $f(1)$

$$f(1)=(1)^2+2(1)$$

$$=3$$

$\because f'_+(1)=f'_-(1)=4$

$\therefore f$ **قابلة للاشتقاق عند** $x=1$ ، $f'(1)=4$

البند (2-3) – قواعد الاشتقاق

تدريب (1) أوجد مشتقة $f(x)$ في الحالات التالية :

(a) $f(x)=5$

(b) $f(x)=e^2$

(c) $f(x)=\pi^{15}$

الحل:

(a)

$f(x)=5\Rightarrow f'(x)=0$ (مشتقة الثابت)

(b)

$\therefore f'(x)=0$ عدد ثابت e^2

(c)

$\therefore f'(x)=0$ عدد ثابت π^{15}

$f'(x) = 0$ ، **(a)**
$f'(x) = 0$ ، **(b)**
$f'(x) = 0$ **(c)**

تدريب (2) أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

(a) $f(x) = x^4$
(b) $g(x) = x^{10}$
(c) $h(x) = x^{12}$

الحل:

(a)

$$f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$$

(b)

$$g'(x) = 10x^{10-1} = 10x^9$$

(c)

$$h'(x) = 12x^{12-1} = 12x^{11}$$

$f'(x) = 4x^3$ **(a)**، $g'(x) = 10x^9$ **(b)**
$h'(x) = 12x^{11}$ **(c)**

حاول أن تحل (1) صـ 92 أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^3) - \frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}(6)$$
$$= 5(3x^2) - 4(2x) + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^2 - 8x$$

حاول أن تحل (2) صـ 93 أوجد $f'(x)$ إذا كان :

(a) $f(x) = (2x+1)(3x-2)$
(b) $f(x) = 4x^2(x+6)$

الحل:

(a)

$$f'(x) = (2x+1)\cdot(3x-2)' + (3x-2)\cdot(2x+1)'$$

$$= (2x+1)(3) + (3x-2)(2)$$
$$= 6x + 3 + 6x - 4$$
$$= 12x - 1$$

(b)

$$f'(x) = 4x^2 \cdot (x+6)' + (x+6) \cdot (4x^2)'$$
$$= 4x^2(1) + (x+6)(8x)$$
$$= 4x^2 + 8x^2 + 48x$$
$$= 12x^2 + 48x$$

(a) $f'(x) = 12x - 1$ ،
(b) $f'(x) = 12x^2 + 48x$

حاول أن تحل (3) صـ 95 أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{4x^2+2x}{2x^2+5}$

الحل:

$$f'(x) = \frac{(2x^2+5) \cdot (4x^2+2x)' - (4x^2+2x) \cdot (2x^2+5)'}{(2x^2+5)^2}$$
$$= \frac{(2x^2+5)(8x+2) - (4x^2+2x)(4x)}{(2x^2+5)^2}$$
$$= \frac{16x^3 + 4x^2 + 40x + 10 - 16x^3 - 8x^2}{(2x^2+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 40x + 10}{(2x^2+5)^2}$$

شرط المقام
$2x^2 + 5 \neq 0$
لكل $x \in \mathbb{R}$

حاول أن تحل (4) صـ 96 أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحني الدالة f حيث $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1, 0)$

الحل:

$$f(1) = \frac{1-1}{1+2} = 0 \ ①$$

$$f'(x) = \frac{(x+2) \cdot (x-1)' - (x-1) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} \ ②$$
$$= \frac{(x+2)(1) - (x-1)(1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

③ ميل المماس: $m = f'(1) = \dfrac{3}{(1+2)^2} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

معادلة المماس:

شرط المقام
$x + 2 \neq 0$
$x \neq -2$
$x = 1$ تحقق الشرط

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

④ ميل الناظم: $m_1 = -\frac{1}{f'(1)} = -3$

معادلة الناظم:

$$y - 0 = -3(x - 1)$$

$$y = -3x + 3$$

المماس: $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ ، **الناظم:** $y = -3x + 3$

حاول أن تحل (5) صـ 96 أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{-4}{x^2 + 2x + 5}$

الحل:

$$\left(\frac{k}{g(x)}\right)' = \frac{-k \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(-4) \cdot (x^2 + 2x + 5)'}{(x^2 + 2x + 5)^2}$$

$$= \frac{4(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x + 8}{(x^2 + 2x + 5)^2}$$

شرط المقام

$x^2 + 2x + 5$

$= (x + 1)^2 + 4 > 0$

لكل $x \in \mathbb{R}$

تدرب (13) أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم لمنحني الدالة $y = \frac{8}{4 + x^2}$ عند النقطة $(2, 1)$

الحل:

$$y' = \frac{-8(4 + x^2)'}{(4 + x^2)^2} = \frac{-8(2x)}{(4 + x^2)^2} = \frac{-16x}{(4 + x^2)^2}$$

$$m = y'\Big|_{x=2} = \frac{-16(2)}{(4 + 4)^2} = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

ميل الناظم: $m_1 = -\frac{1}{m} = 2$

شرط المقام

$4 + x^2 \neq 0$

لكل $x \in \mathbb{R}$

التحقق من النقطة

$x = 2 \Rightarrow y = \frac{8}{4 + 4} = 1$

معادلة الناظم:

$$y - 1 = 2(x - 2)$$

$$y = 2x - 3$$

المماس: $y = -\frac{1}{2}x + 2$ ، **الناظم:** $y = 2x - 3$

حاول أن تحل (6) صـ 98 لتكن : $y = \frac{3x^2 + 7}{8x^2}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$

الحل:

$$y = \frac{3x^2}{8x^2} + \frac{7}{8x^2} = \frac{3}{8} + \frac{7}{8}x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{7}{8}\left(-2x^{-3}\right)$$

$$= -\frac{7}{4}x^{-3} = \frac{-7}{4x^3}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-1} = \frac{-7}{4(-1)^3}$$

$$= \frac{-7}{-4}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-1} = \frac{7}{4}$$

شرط المقام

$8x^2 \neq 0$

$x \neq 0$

$x = -1$ تحقق الشرط

حاول أن تحل (7) صـ 98 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

الحل:

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}$$

$$= \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} \text{ لكل } x \in \mathbb{R}$$

حاول أن تحل (8) صـ 99 أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x \leq 2 \\ 4x - 3 & : x > 2 \end{cases} \quad \textbf{(a)}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : x \geq 1 \end{cases} \quad \textbf{(b)}$$

الحل:

(a)

$$D_f = (-\infty, 2] \cup (2, \infty) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 2 \\ \text{نبحث} & : x = 2 \\ 4 & : x > 2 \end{cases}$$

من جهة اليمين:

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

إذا وجدت

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{4x - 3 - 5}{x - 2}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{4x - 8}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{4(x - 2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} 4 = 4$$

من جهة اليسار:

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

إذا وجدت

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} (x + 2)$$

$$= 2 + 2 = 4$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) = 4 \therefore$$

$$f'(2) = 4 \therefore$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 2 \\ 4 & : x \geq 2 \end{cases} \therefore$$

ومجال f' هو $\mathbb{R}$

(b)

$$D_f = (-\infty, 1) \cup [1, \infty) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 1 \\ \text{نبحث} & : x = 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & : x > 1 \end{cases}$$

من جهة اليمين:

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

إذا وجدت

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1}$$

من جهة اليسار:

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

إذا وجدت

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1}$$

صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

(a) حساب $f(2)$

$$f(2) = (2)^2 + 1$$

$$= 5$$

(b) حساب $f(1)$

$$f(1) = 2\sqrt{1}$$

$$= 2$$

(b) شرط ما تحت الجذر

$$\lim_{x \to 1^+} x = 1 > 0$$

(b) شرط المقام

$$\lim_{x \to 1^+} (\sqrt{x} + 1)$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x} + \lim_{x \to 1^+} 1$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to 1^+} x} + \lim_{x \to 1^+} 1$$

$$= 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة (نضرب بالمرافق)

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1^+} 2}{\lim\limits_{x\to 1^+} (\sqrt{x}+1)}$$
$$= \frac{2}{2} = 1$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1^-} (x+1)$$
$$= 1+1 = 2$$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ ∵

$f'(1)$ غير موجودة ∴

$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & : x > 1 \end{cases}$ ومجال f' هو $\mathbb{R} - \{1\}$ ∴

(a) $f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 2 \\ 4 & : x \geq 2 \end{cases}$ ،

(b) $f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & : x > 1 \end{cases}$ و $f'(1)$ **غير موجودة**

البند (4-2) – مشتقات الدوال المثلثية

حاول أن تحل (1) صـ 101 أوجد المشتقات للدوال التالية :

(a) $h(x) = \cos^2 x$

(b) $g(x) = \frac{x}{\cos x}$

(c) $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

(2) $y = 4 - x^2 \sin x$

(4) $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

الحل:

(a)

$$h(x) = \cos x \cdot \cos x$$

$$h'(x) = \cos x \cdot (\cos x)' + \cos x \cdot (\cos x)'$$

$$= \cos x(-\sin x) + \cos x(-\sin x)$$

$$= -2\sin x \cos x$$

(b)

$$g'(x) = \frac{\cos x \cdot (x)' - x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x(1) - x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$$

(c)

$$y' = \frac{(\sin x + \cos x)(\sin x)' - \sin x(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)\cos x - \sin x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

(2)

$$y' = 0 - \left[x^2 \cdot (\sin x)' + \sin x \cdot (x^2)'\right]$$

$$= -\left[x^2 \cos x + 2x \sin x\right]$$

$$= -x^2 \cos x - 2x \sin x$$

(4)

$$y' = \frac{(1 + \sin x)(\cos x)' - \cos x(1 + \sin x)'}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \sin x)(-\sin x) - \cos x \cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - 1}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2}$$

شرط المقام

(b) $\cos x \neq 0$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

(c) $\sin x + \cos x \neq 0$

(4) $1 + \sin x \neq 0$

$$\sin x \neq -1$$

تذكر

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$= \frac{-1}{1+\sin x}$$

(a) $h'(x) = -2\sin x \cos x$ ،

(b) $g'(x) = \dfrac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$ ،

(c) $y' = \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$ (2) ،

(4) $y' = -x^2\cos x - 2x\sin x$ ، $y' = \dfrac{-1}{1+\sin x}$

حاول أن تحل (2) صـ 102 أوجد المشتقات للدوال التالية :

(a) $f(x) = \dfrac{1+\tan x}{\tan x}$

(b) $g(x) = \sec x + \csc x$

(c) $h(x) = \dfrac{\sec x}{\csc x}$

الحل:

الشروط

(a) $\tan x \neq 0$ ومعرفة

$x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

(b) $\cos x \neq 0$ ، $\sin x \neq 0$

(c) $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

$k \in \mathbb{Z}$

(a)

$$f'(x) = \frac{\tan x \cdot (1+\tan x)' - (1+\tan x)\cdot(\tan x)'}{\tan^2 x}$$
$$= \frac{\tan x \sec^2 x - (1+\tan x)\sec^2 x}{\tan^2 x}$$
$$= \frac{\tan x \sec^2 x - \sec^2 x - \tan x \sec^2 x}{\tan^2 x}$$
$$= \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$
$$= \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

(b)

$$g'(x) = (\sec x)' + (\csc x)'$$
$$= \sec x \tan x - \csc x \cot x$$

(c)

$$h(x) = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$
$$h'(x) = \sec^2 x$$

(a) $f'(x) = -\csc^2 x$ ،

(b) $g'(x) = \sec x \tan x - \csc x \cot x$ ،

(c) $h'(x) = \sec^2 x$

حاول أن تحل (3) صـ 102 أوجد معادلة المستقيم العمودي على منحني الدالة : $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

الحل:

$$y' = \sec x \tan x$$

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \sec\frac{\pi}{3} \cdot \tan\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{ميل العمودي: } m = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{معادلة العمودي: } y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = -\frac{\sqrt{3}}{6}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y - 2 = -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{18} + 2$$

الشروط

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\frac{\pi}{3}$ تحقق الشرط

حساب

$$\sec\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

البند (5-2) – قاعدة السلسلة

حاول أن تحل (1) صـ 104 لتكن $f(x) = -2x^3 + 4$, $g(x) = x^{13}$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$ ، $(g \circ f)'(0)$

الحل:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = -6x^2 \ ①$$

$$f'(g(x)) = -6(x^{13})^2 = -6x^{26}$$

$$g'(x) = 13x^{12} \ ②$$

$$(f \circ g)'(x) = -6x^{26} \cdot 13x^{12} \ ③$$

$$= -78x^{38}$$

$$(g \circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0)$$

$$f(0) = -2(0)^3 + 4 = 4$$

$$g'(f(0)) = g'(4) = 13(4)^{12}$$

$$f'(0) = -6(0)^2 = 0$$

$$(g \circ f)'(0) = 13(4)^{12} \cdot 0 = 0 \therefore$$

$$(g \circ f)'(0) = 0 \text{ ، } (f \circ g)'(x) = -78x^{38}$$

حاول أن تحل (2) صـ 105

لتكن $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$, $g(x) = \sqrt{x}$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(1)$

الحل:

$$(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1)$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+4)(x^2-4)' - (x^2-4)(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+4) - (x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(g(1)) = f'(1) = \frac{2(5) - (-3)(2)}{(1+4)^2} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore (f \circ g)'(1) = \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{2}$$

$$(f \circ g)'(1) = \frac{8}{25}$$

حساب $g(1)$ ، $g'(1)$

$$g(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(1) = \frac{1}{2}$$

الشروط

$x^2 + 4 \neq 0$ لكل x

g قابلة للاشتقاق عند 1

لأن $1 > 0$

حاول أن تحل (3) صـ 105

لتكن $y = u^2 + 4u - 3 \text{ , } u = 2x^3 + x$ أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل .

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 2u + 4 \text{ ①}$$

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 + 1 \text{ ②}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (2u+4)(6x^2+1)$$

$$= \big(2(2x^3+x)+4\big)(6x^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3 + 2x + 4)(6x^2 + 1)$$

حاول أن تحل (4) صـ 106 أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$ بالنسبة للمتغير x

الحل:

نفرض $u = x^2 + x$ فيكون $y = \sin u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = \cos u \ ①$$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 1 \ ②$$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = \cos u \cdot (2x + 1)$$

$$= \cos(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = (2x + 1)\cos(x^2 + x)}$$

طريقة ثانية لحل حاول أن تحل (4) صـ 106 أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$ بالنسبة للمتغير x

الحل:

$$\frac{d}{dx}(\sin f(x)) = \cos f(x) \cdot f'(x)$$

$$y' = \cos(x^2 + x) \cdot (x^2 + x)'$$

$$= \cos(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = (2x + 1)\cos(x^2 + x)}$$

حاول أن تحل (6) صـ 107 لتكن $y = \sqrt[4]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$ أوجد y'.

الحل:

$$y = (2x^4 - 3x^2 + 4)^{\frac{3}{4}}$$

$$y' = \frac{3}{4}(2x^4 - 3x^2 + 4)^{\frac{3}{4}-1} \cdot (2x^4 - 3x^2 + 4)'$$

$$= \frac{3}{4}(2x^4 - 3x^2 + 4)^{-\frac{1}{4}} \cdot (8x^3 - 6x)$$

$$= \frac{3(8x^3 - 6x)}{4\sqrt[4]{2x^4 - 3x^2 + 4}}$$

$$= \frac{6(4x^3 - 3x)}{4\sqrt[4]{2x^4 - 3x^2 + 4}}$$

$$\boxed{y' = \frac{3(4x^3 - 3x)}{2\sqrt[4]{2x^4 - 3x^2 + 4}}}$$

الشروط

$2x^4 - 3x^2 + 4 > 0$

لكل $x \in \mathbb{R}$

(المميز $9 - 32 < 0$

والمعامل $2 > 0$)

حاول أن تحل (7) صـ 107 بين أن ميل مماس المنحني $y = \dfrac{1}{(-2x-1)^3}$ دائماً يكون موجباً حيث : $x \neq -\dfrac{1}{2}$

الحل:

$$y = (-2x-1)^{-3}$$
$$y' = -3(-2x-1)^{-4} \cdot (-2x-1)'$$
$$= -3(-2x-1)^{-4} \cdot (-2)$$
$$= \frac{6}{(-2x-1)^4} = \frac{6}{(2x+1)^4}$$
$$\because (2x+1)^4 > 0 \text{ لكل } x \neq -\frac{1}{2} \text{ ، } 6 > 0$$

$\therefore y' = \dfrac{6}{(2x+1)^4} > 0$ لكل $x \neq -\dfrac{1}{2}$ أي أن ميل المماس دائماً موجب

شرط المقام

$-2x-1 \neq 0$

$x \neq -\dfrac{1}{2}$

تدرب (12) أوجد المشتقة للدالة $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$

الحل:

$$y' = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$$
$$= 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}$$
$$= 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{2}{(x+1)^2}$$
$$y' = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$$

شرط المقام

$x+1 \neq 0$

$x \neq -1$

البند (2-6) – المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

حاول أن تحل (1) صـ 109 إذا كانت : $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$

فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

الحل:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 20x^4 - 15x^2$$
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 80x^3 - 30x$$
$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 240x^2 - 30$$

$$y''' = 240x^2 - 30 \text{ ، } y'' = 80x^3 - 30x \text{ ، } y' = 20x^4 - 15x^2$$

حاول أن تحل (2) صـ 109

لتكن الدالة : $y = \cos x$
بين أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

الحل:

$$y' = -\sin x$$

$$y'' = -\cos x$$

$$y''' = \sin x$$

$$y^{(4)} = \cos x$$

$$y^{(4)} + y'' = \cos x + (-\cos x)$$

$$= \cos x - \cos x = 0$$

$$\therefore y^{(4)} + y'' = 0$$

حاول أن تحل (3) ص 110

أوجد y'' حيث : $y = \dfrac{1}{\sin x}$

الحل:

$$y' = \frac{0 \cdot \sin x - 1 \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$y'' = \frac{\sin x \cdot \sin^2 x - (-\cos x) \cdot 2 \sin x \cos x}{\sin^4 x}$$

$$y'' = \frac{\sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x}{\sin^4 x}$$

$$y'' = \frac{\sin x \left(\sin^2 x + 2 \cos^2 x\right)}{\sin^4 x}$$

$$y'' = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x}$$

$$y'' = \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x}$$

شرط المقام

$\sin x \neq 0$

$x \neq n\pi \ , \ n \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل (4) ص 112 لتكن : $y^2 = x^2 - 2x$ أوجد $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

الحل:

نشتق الطرفين بالنسبة إلى x

$$2yy' = 2x - 2$$

$$y' = \frac{2x - 2}{2y}$$

$$\boxed{y' = \frac{x - 1}{y}}$$

شرط المقام

$y \neq 0$

حاول أن تحل (5) ص 112 أوجد ميل المماس للمنحني الذي معادلته :
$x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند النقطة $(1, 1)$.

الحل:

نشتق الطرفين بالنسبة إلى x

$$2x - 2yy' + y'x + y = 0$$

$$-2yy' + xy' = -y - 2x$$

$$y'(-2y + x) = -y - 2x$$

$$y' = \frac{-y - 2x}{x - 2y} = \frac{y + 2x}{2y - x}$$

$$y'\Big|_{(1,1)} = \frac{1 + 2(1)}{2(1) - 1} = \text{ميل المماس}$$

$$\boxed{\text{ميل المماس} = 3}$$

شرط المقام

$2y - x \neq 0$

عند $(1, 1)$: $2(1) - 1 = 1 \neq 0$

حاول أن تحل (6) ص 113 أوجد ميل المماس $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ للمنحني الذي معادلته :
$x^2 + y^2 - 2xy = 0$ عند النقطة $(2, 2)$.

الحل:

نشتق الطرفين بالنسبة إلى x

$$2x + 2yy' - 2y - 2xy' = 0$$

$$2yy' - 2xy' = 2y - 2x$$

$$y'(2y - 2x) = 2y - 2x$$

عند $(2, 2)$: $2y - 2x = 0$ فلا يمكن القسمة عليه

نعيد كتابة معادلة المنحنى

التحقق من النقطة

$4 + 4 - 8 = 0$

$\therefore (2, 2)$ تقع على المنحنى

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0$$

$$(x - y)^2 = 0$$

$$x - y = 0 \Rightarrow y = x$$

$y' = 1$ لكل نقطة على المنحنى

$$\text{ميل المماس} = y'\Big|_{(2,2)}$$

ميل المماس $= 1$

مثال (7) ص 113 للمنحني الذي معادلته : $2\sqrt{y} + y = x$

أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحني عند النقطة $(3, 1)$.

الحل:

نشتق الطرفين بالنسبة إلى x

$$2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\, y' + y' = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\, y' + y' = 1$$

$$y'\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + 1\right) = 1$$

$$y' = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{y}} + 1} = \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}}$$

$$\text{ميل المماس} = y'\Big|_{(3,1)} = \frac{\sqrt{1}}{1 + \sqrt{1}}$$

$y' = \dfrac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}}$ ، ميل المماس $= \dfrac{1}{2}$

الشروط

$y > 0$

عند $(3, 1)$: $y = 1 > 0$

حاول أن تحل (7) ص 113 للمنحني الذي معادلته : $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 0$

أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحني عند النقطة $(1, 1)$.

الحل:

نشتق الطرفين بالنسبة إلى x

$$2yy' + \frac{1}{2\sqrt{y}}\, y' + 2x = 0$$

$$y'\left(2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) = -2x$$

$$y'\left(\frac{4y\sqrt{y} + 1}{2\sqrt{y}}\right) = -2x$$

الشروط

$y > 0$

$4y\sqrt{y} + 1 \neq 0$

عند $(1, 1)$: $4 + 1 = 5 \neq 0$

$$y' = \frac{-2x \cdot 2\sqrt{y}}{4y\sqrt{y}+1} = \frac{-4x\sqrt{y}}{4y\sqrt{y}+1}$$

$$\text{ميل المماس} = y'\Big|_{(1,1)} = \frac{-4(1)\sqrt{1}}{4(1)\sqrt{1}+1}$$

$$y' = \frac{-4x\sqrt{y}}{4y\sqrt{y}+1} \text{ ، ميل المماس} = -\frac{4}{5}$$

مثال ص 114 (8) إذا كانت : $y = \sqrt{1-2x}$ أثبت أن $yy'' + (y')^2 = 0$.

الحل:

$$y^2 = 1 - 2x$$

نشتق: $2yy' = -2$

$$yy' = -1$$

نشتق مرة أخرى: $y' \cdot y' + yy'' = 0$

$$\therefore\ yy'' + (y')^2 = 0$$

شرط ما تحت الجذر

$1 - 2x > 0$

$x < \frac{1}{2}$

حاول أن تحل ص 114 (8) إذا كانت : $y = x\sin x$

أثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$.

الحل:

$$y' = 1 \cdot \sin x + x\cos x$$

$$y' = \sin x + x\cos x$$

$$y'' = \cos x + 1 \cdot \cos x + x(-\sin x)$$

$$y'' = 2\cos x - x\sin x$$

$$y''' = -2\sin x - (1 \cdot \sin x + x\cos x)$$

$$y''' = -3\sin x - x\cos x$$

$$\text{الطرف الأيمن} = y''' + y' + 2\sin x$$

$$= -3\sin x - x\cos x + \sin x + x\cos x + 2\sin x$$

$$\text{الطرف الأيسر} = = 0$$

$$\therefore\ y''' + y' + 2\sin x = 0$$

البند (1-3) – القيم القصوى (العظمى / الصغرى) للدوال

حاول أن تحل (1) ص 124 الشكل يمثل بيان $y = x^2 - 4x + 3$

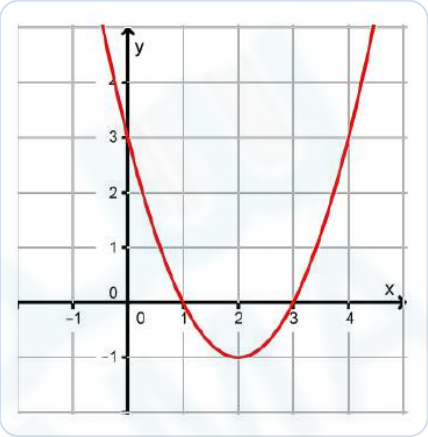
أوجد القيم القصوى للدالة على المجالات التالية :

(a) $(-\infty , \infty)$

(b) $[2 , 3]$

(c) $(1 , 3)$

(d) $[3 , 4]$



الحل:

(a) $(-\infty , \infty)$

للدالة قيمة صغرى مطلقة $f(2) = -1$ عند $x = 2$

لا توجد قيمة عظمى مطلقة

(b) $[2 , 3]$

للدالة قيمة عظمى مطلقة $f(3) = 0$ عند $x = 3$

للدالة قيمة صغرى مطلقة $f(2) = -1$ عند $x = 2$

(c) $(1 , 3)$

للدالة قيمة صغرى مطلقة $f(2) = -1$ عند $x = 2$

لا توجد قيمة عظمى مطلقة (الطرفان $x = 1 \, ، \, x = 3$

غير منتميين للفترة)

(d) $[3 , 4]$

للدالة قيمة عظمى مطلقة $f(4) = 3$ عند $x = 4$

للدالة قيمة صغرى مطلقة $f(3) = 0$ عند $x = 3$

حساب القيم

$f(2) = 4 - 8 + 3$

$= -1$

$f(3) = 9 - 12 + 3$

$= 0$

$f(4) = 16 - 16 + 3$

$= 3$

(a) صغرى مطلقة -1 عند $x = 2$ ولا توجد عظمى ،

(b) عظمى مطلقة 0 عند $x = 3$ وصغرى مطلقة -1 عند $x = 2$ ،

(c) صغرى مطلقة -1 عند $x = 2$ ولا توجد عظمى ،

(d) عظمى مطلقة 3 عند $x = 4$ وصغرى مطلقة 0 عند $x = 3$

حاول أن تحل (2) ص 127 أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية :

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x$$

نضع $f'(x) = 0$: $4x^3 - 12x^2 - 16x = 0$

$$4x(x^2 - 3x - 4) = 0$$

$$4x(x - 4)(x + 1) = 0$$

$x = -1$ أو $x = 4$ أو $x = 0$

النقاط الحرجة : $(0, 10)$ ، $(-1, 7)$ ، $(4, -118)$

حساب القيم

$f(0) = 10$

$f(-1) = 1 + 4 - 8 + 10$

$= 7$

$f(4) = 256 - 256 - 128 + 10$

$= -118$

حاول أن تحل (3) ص 128 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة f :

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$

الحل:

f كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ ∴ متصلة على $[-2, 1]$

∵ f متصلة على $[-2, 1]$ ∴ يوجد قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة (نظرية)

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

نضع $f'(x) = 0$: $3x^2 - 3 = 0$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$x = -1 \in (-2, 1)$ ، $x = 1 \notin (-2, 1)$ (طرف الفترة)

حساب القيم

$f(-2) = -8 + 6 + 1$

$= -1$

$f(-1) = -1 + 3 + 1$

$= 3$

$f(1) = 1 - 3 + 1$

$= -1$

x	-2	-1	1
y	-1	3	-1

قيمة عظمى مطلقة $f(-1)=3$ ، قيمة صغرى مطلقة $f(-2)=f(1)=-1$

حاول أن تحل (4) ص 129 أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة f :

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ في الفترة $[1,3]$

الحل:

f دالة نسبية متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ∴ متصلة على $[1,3]$

∵ f متصلة على $[1,3]$ ∴ يوجد قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة (نظرية)

$$f'(x)=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3}$$

لا توجد نقاط حرجة في $(1,3)$

x	1	3
y	1	$\frac{1}{9}$

قيمة عظمى مطلقة $f(1)=1$ ، قيمة صغرى مطلقة $f(3)=\dfrac{1}{9}$

شرط المقام

$x^2\neq 0\Rightarrow x\neq 0$

$0\notin[1,3]$

$f'(x)=0$

$f'(x)\neq 0$

لأن البسط $-2\neq 0$

$f'(x)$ **غير موجودة**

$x^3=0\Rightarrow x=0$

$0\notin(1,3)$

البند (2-3) – تزايد وتناقص الدوال

حاول أن تحل (1) ص 133 بيّن أن الدالة $f(x)=x^2+2x$ تحقق شروط نظريّة القيمة المتوسّطة على الفترة $[-3\,,1]$ ، ثم أوجد قيمة c الذي تتنبأ به النظرية وفسّر إجابتك.

الحل:

f كثيرة حدود متصلة على $[-3,1]$

$f'(x)=2x+2$ ∴ f قابلة للاشتقاق على $(-3,1)$

∴ f تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[-3,1]$

حساب

$f(1)=1+2$

$=3$

$f(-3)=9-6$

$=3$

$\therefore$ يوجد $c \in (-3,1)$ حيث $f'(c) = \dfrac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)}$

$$2c+2 = \frac{3-3}{4} = 0$$

$$2c = -2 \Rightarrow c = -1 \in (-3,1)$$

التفسير: عند $c=-1$ يكون المماس موازيًا للقاطع المار بالنقطتين $(-3,3)$ ، $(1,3)$ (ميل كل منهما 0)

حاول أن تحل 2 ص 134 بيّن أن الدالّة $f : f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,4]$ ، ثم أوجد c الذي تتنبأ به النظرية وفسّر إجابتك.

الحل:

f كثيرة حدود متصلة على $[0,4]$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3$ قابلة للاشتقاق على $(0,4)$

$\therefore f$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[0,4]$

$\therefore$ يوجد $c \in (0,4)$ حيث $f'(c) = \dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}$

$$3c^2 - 3 = \frac{54-2}{4} = 13$$

$$3c^2 = 16 \Rightarrow c^2 = \frac{16}{3}$$

$$c = \pm\frac{4}{\sqrt{3}} = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$c = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2.31 \in (0,4)$ ، $c = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \notin (0,4)$ (مرفوض)

التفسير: عند $c = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ يكون المماس موازيًا للقاطع المار بالنقطتين $(0,2)$ ، $(4,54)$ (ميل كل منهما 13)

حساب

$f(4) = 64 - 12 + 2$

$= 54$

$f(0) = 2$

حاول أن تحل (3) ص 135 أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f :

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -2x + 4$$

نضع $f'(x) = 0$: $-2x + 4 = 0$

حساب القيم

$f(2) = -4 + 8 - 3$

$= 1$

$$x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↘

f متزايدة على $(-\infty, 2)$ ، متناقصة على $(2, \infty)$

حاول أن تحل (4) ص 136

إذا كانت $f(x) = x^3 - 6x$: f

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f .

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

نضع $f'(x) = 0$: $3x^2 - 6 = 0$

$$x^2 = 2$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ أو } x = \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$4\sqrt{2}$	↘	$-4\sqrt{2}$	↗

f متزايدة على $(-\infty, -\sqrt{2})$ ، $(\sqrt{2}, \infty)$
متناقصة على $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

حساب القيم

$$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$$
$$= -4\sqrt{2}$$
$$f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

حاول أن تحل (5) ص 136

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = \dfrac{x^2}{2x - 1}$

الحل:

مجال f : $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

f دالة نسبية متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - x^2 \cdot 2}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2x - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2}$$

شرط المقام

$$2x - 1 \neq 0$$
$$x \neq \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

نضع $f'(x) = 0$: $2x(x-1) = 0$

$x = 1$ أو $x = 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	غير معرفة	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗		0	↘	غير معرفة	↘	1	↗	

f متزايدة على $(-\infty, 0)$ ، $(1, \infty)$ ، متناقصة على $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ، $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

حساب القيم

$f(0) = 0$

$f(1) = \frac{1}{2-1}$
$= 1$

البند (3-3) – ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

حاول أن تحل (1) ص 140 لتكن الدالة $f : f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ فأوجد كلاً مما يلي :

(a) النقاط الحرجة للدالة .

(b) الفترات التي تكون فيها الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

(c) القيم القصوى المحلية .

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

(a)

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

نضع $f'(x) = 0$: $-3x^2 + 6x = 0$

$-3x(x-2) = 0$

$x = 2$ أو $x = 0$

النقاط الحرجة: $(0, -4)$ ، $(2, 0)$

(b)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↘		-4	↗	0	↘	

f متناقصة على $(-\infty, 0)$ ، $(2, \infty)$

حساب القيم

$f(0) = -4$

$f(2) = -8 + 12 - 4$
$= 0$

f متزايدة على $(0,2)$

(c)

عند $x=0$ قيمة صغرى محلية هي $f(0)=-4$

عند $x=2$ قيمة عظمى محلية هي $f(2)=0$

(a) $(0,-4)$ ، $(2,0)$ ،

(b) متزايدة على $(0,2)$ **ومتناقصة على** $(-\infty,0)$ ، $(2,\infty)$ ،

(c) صغرى محلية $f(0)=-4$ **، عظمى محلية** $f(2)=0$

مثال 2 ص 140 لتكن الدالة f : $f(x)=x-3+\dfrac{4}{x-1}$ فأوجد كلاً مما يلي :

(a) النقاط الحرجة للدالة .

(b) الفترات التي تكون فيها الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

(c) القيم القصوى المحلية .

الحل:

نفرض $g(x)=x-3$ ، $h(x)=\dfrac{4}{x-1}$ فيكون

$$f(x)=g(x)+h(x)$$

① ندرس اتصال g

g كثيرة حدود

$\therefore g$ متصلة على $\mathbb{R}$

② ندرس اتصال h

h دالة نسبية متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\therefore h$ متصلة على $\mathbb{R}-\{1\}$

$$D_f=D_g\cap D_h=\mathbb{R}\cap(\mathbb{R}-\{1\})=\mathbb{R}-\{1\}$$

من ① ، ② $f=g+h$ متصلة على $\mathbb{R}-\{1\}$ (مجموع دالتين متصلتين)

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$

(a)

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2}$$

شرط المقام

$$x-1\neq 0$$

$$x\neq 1$$

حساب القيم

$$f(-1)=-1-3+\frac{4}{-2}=-6$$

$$f(3)=3-3+\frac{4}{2}=2$$

$$f'(x) = \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

نضع $f'(x) = 0 : (x-3)(x+1) = 0$

$x = -1$ أو $x = 3$

$x = 1 \notin D_f$ ليست نقطة حرجة

النقاط الحرجة: $(-1, -6)$ ، $(3, 2)$

(b)

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0		$-$	غير معرفة	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗		-6	↘	غير معرفة	↘	2	↗	

f متزايدة على $(-\infty, -1)$ ، $(3, \infty)$

f متناقصة على $(-1, 1)$ ، $(1, 3)$

(c)

عند $x = -1$ قيمة عظمى محلية هي $f(-1) = -6$

عند $x = 3$ قيمة صغرى محلية هي $f(3) = 2$

(a) $(-1, -6)$ ، $(3, 2)$ ،

(b) **متزايدة على** $(-\infty, -1)$ ، $(3, \infty)$ **ومتناقصة على** $(-1, 1)$ ، $(1, 3)$ ،

(c) **عظمى محلية** $f(-1) = -6$ ، **صغرى محلية** $f(3) = 2$

حاول أن تحل (3) ص 144 أوجد فترات التقعر ونقطة الانعطاف لمنحني للدالة f :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

نضع $f''(x) = 0 : 6x - 4 = 0$

$$x = \frac{2}{3}$$

حساب القيم

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + 1$$
$$= \frac{8 - 24 + 27}{27}$$
$$= \frac{11}{27}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
التقعر	$\cap$	$\frac{11}{27}$	$\cup$

منحنى f مقعر للأسفل في $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$

منحنى f مقعر للأعلى في $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$

مقعر للأسفل في $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ ، مقعر للأعلى في $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ ، نقطة الانعطاف $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$

حاول أن تحل (4) ص 146 استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة f :

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2$$

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 12x^2 - 24x$$

نضع $f'(x) = 0$: $12x^2 - 24x = 0$

$$12x(x-2) = 0$$

$$x = 2 \text{ أو } x = 0$$

$$f''(x) = 24x - 24$$

$$f'(0) = 0 \text{ ، } f''(0) = -24 < 0$$

$\therefore$ عند $x = 0$ قيمة عظمى محلية هي $f(0) = 0$

$$f'(2) = 0 \text{ ، } f''(2) = 48 - 24 = 24 > 0$$

$\therefore$ عند $x = 2$ قيمة صغرى محلية هي $f(2) = -16$

حساب القيم

$f(0) = 0$

$f(2) = 32 - 48$

$= -16$

قيمة عظمى محلية $f(0) = 0$ ، قيمة صغرى محلية $f(2) = -16$

البند (4-3) – رسم بيان دوال كثيرات الحدود

حاول أن تحل (1) ص 149 ادرس تغيرات الدالة : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3) = \infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

نضع $f'(x) = 0$: $3x^2 - 12x + 9 = 0$

$$3(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$3(x-1)(x-3) = 0$$

$x = 3$ أو $x = 1$

النقاط الحرجة: $(1, 0)$ ، $(3, -4)$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗		0	↘	-4	↗	

f متزايدة على $(-\infty, 1)$ ، $(3, \infty)$

f متناقصة على $(1, 3)$

عند $x = 1$ قيمة عظمى محلية هي $f(1) = 0$

عند $x = 3$ قيمة صغرى محلية هي $f(3) = -4$

$$f''(x) = 6x - 12$$

نضع $f''(x) = 0$: $6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$	$-$		0	$+$	
التقعر	∩		-2	∪	

منحنى f مقعر للأسفل في $(-\infty, 2)$

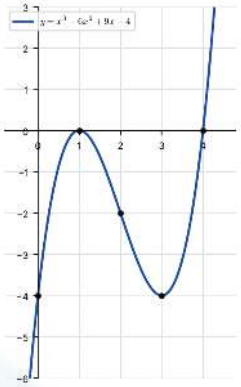
منحنى f مقعر للأعلى في $(2, \infty)$

نقطة الانعطاف $(2, -2)$

حساب القيم

$$f(1) = 1 - 6 + 9 - 4$$
$$= 0$$
$$f(3) = 27 - 54 + 27 - 4$$
$$= -4$$
$$f(2) = 8 - 24 + 18 - 4$$
$$= -2$$
$$f(0) = -4$$
$$f(4) = 64 - 96 + 36 - 4$$
$$= 0$$

x	0	1	2	3	4
y	-4	0	-2	-4	0
النوع	إضافية	قيمة عظمى محلية	انعطاف	قيمة صغرى محلية	إضافية



حاول أن تحل (2) ص 150 ادرس تغيرات الدالة : $f(x)=x-2x^3$ وارسم بيانها

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^3)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(-2x^3)=-\infty$$

$$f'(x)=1-6x^2$$

نضع $f'(x)=0 : 1-6x^2=0$

$$x^2=\frac{1}{6}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

النقاط الحرجة: $\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{9}\right)$ ، $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{9}\right)$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$		$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{6}}{9}$	↗	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	↘

f متناقصة على $\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\infty\right)$ ، $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

حساب القيم

$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{6}-2\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{18}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{9}\approx 0.27$$
$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{9}$$
$$f(0)=0$$

f متزايدة على $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

عند $x = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ قيمة صغرى محلية هي $-\frac{\sqrt{6}}{9}$

عند $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ قيمة عظمى محلية هي $\frac{\sqrt{6}}{9}$

$$f''(x) = -12x$$

نضع $f''(x) = 0 : -12x = 0 \Rightarrow x = 0$

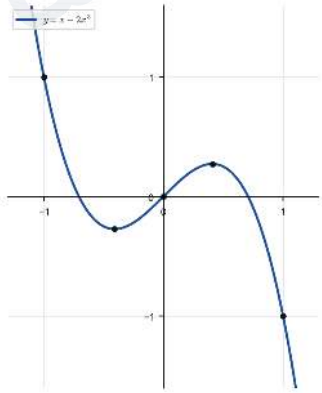
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
التقعر	$\cup$	0	$\cap$

منحنى f مقعر للأعلى في $(-\infty, 0)$

منحنى f مقعر للأسفل في $(0, \infty)$

نقطة الانعطاف $(0, 0)$

x	-1	$-\frac{\sqrt{6}}{6} \approx -0.41$	0	$\frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0.41$	1
y	1	≈ -0.27	0	≈ 0.27	-1
النوع	إضافية	قيمة صغرى محلية	انعطاف	قيمة عظمى محلية	إضافية



حاول أن تحل (3) ص 150 ادرس تغيرات الدالة : $f(x) = x^4 - 2x^2$ وارسم بيانها

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^4) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^4) = \infty$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

نضع $f'(x) = 0 : 4x^3 - 4x = 0$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$4x(x-1)(x+1) = 0$$

$x = -1$ أو $x = 1$ أو $x = 0$

النقاط الحرجة: $(-1,-1)$ ، $(0,0)$ ، $(1,-1)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗		

f متناقصة على $(-\infty,-1)$ ، $(0,1)$

f متزايدة على $(-1,0)$ ، $(1,\infty)$

عند $x = -1$ قيمة صغرى محلية هي $f(-1) = -1$

عند $x = 0$ قيمة عظمى محلية هي $f(0) = 0$

عند $x = 1$ قيمة صغرى محلية هي $f(1) = -1$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

نضع $f''(x) = 0 : 12x^2 - 4 = 0$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
التقعر	∪	$-\frac{5}{9}$	∩	$-\frac{5}{9}$	∪		

منحنى f مقعر للأعلى في $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ، $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$

حساب القيم

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1 - 2$$

$$= -1$$

$$f(-1) = -1$$

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{5}{9}$$

منحنى f مقعر للأسفل في $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

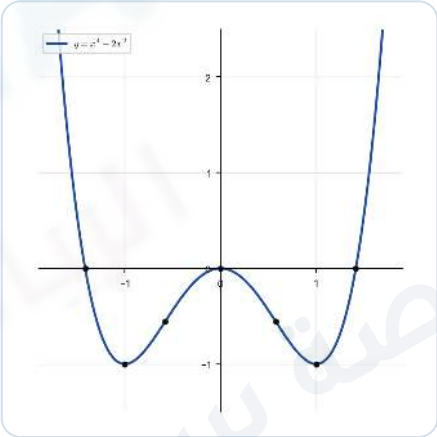
نقطتا الانعطاف $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$ ، $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$

نقاط التقاطع مع محور x :

$$x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0$$

$$x = \pm\sqrt{2} \text{ أو } x = 0$$

x	$-\sqrt{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{2}$
y	0	-1	$-\frac{5}{9}$	0	$-\frac{5}{9}$	-1	0
النوع	إضافية	صغرى محلية	انعطاف	عظمى محلية	انعطاف	صغرى محلية	إضافية



مثال (4) صـ 150 ادرس تغيرات الدالة : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ وارسم بيانها

الحل:

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (-x^4) = -\infty$$

$$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1)$$

نضع $f'(x) = 0$: $-4x(x-1)(x+1) = 0$

$$x = -1 \text{ أو } x = 1 \text{ أو } x = 0$$

النقاط الحرجة: $(-1, 2)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 2)$

حساب القيم

$$f(1) = -1 + 2 + 1 = 2$$

$$f(-1) = -1 + 2 + 1 = 2$$

$$f(0) = 1$$

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{14}{9} \approx 1.56$$

$$f(\pm 2) = -16 + 8 + 1 = -7$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
إشارة f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
سلوك f		↗	2	↘	1	↗	2	↘	

f متزايدة على $(-\infty,-1)\ ،\ (0,1)$

f متناقصة على $(-1,0)\ ،\ (1,\infty)$

عند $x=-1\ ،\ x=1$ قيمة عظمى محلية هي 2

عند $x=0$ قيمة صغرى محلية هي 1

$$f''(x)=-12x^2+4$$

نضع $f''(x)=0:\ -12x^2+4=0$

$$x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
إشارة f''		$-$	0	$+$	0	$-$	
التقعر		∩	انعطاف	∪	انعطاف	∩	

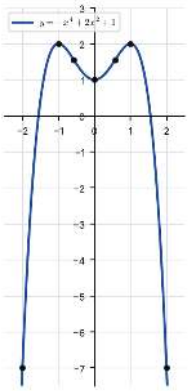
منحنى f مقعر للأسفل في $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ ،$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$

منحنى f مقعر للأعلى في $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

نقطتا الانعطاف $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{14}{9}\right)\ ،\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{14}{9}\right)$

x	-2	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}\approx-0.58$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}\approx0.58$	1	2
y	-7	2	$\frac{14}{9}$	1	$\frac{14}{9}$	2	-7
النوع	إضافية	عظمى محلية	انعطاف	صغرى محلية	انعطاف	عظمى محلية	إضافية

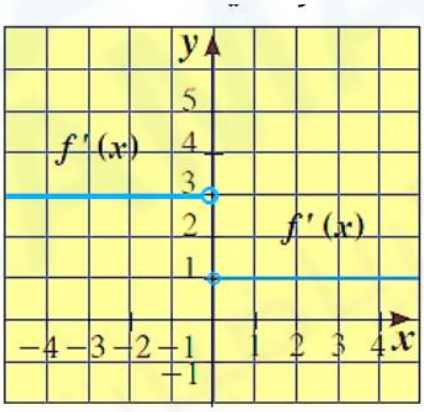


حاول أن تحل (5) صـ 154 ارسم صورة تقريبية للرسم البياني للدالة f التي لها الخواص التالية:

(a) $f(0) = 1$.

(b) الرسم البياني للدالة f' موضح في الشكل المقابل

(c) f دالة متصلة لكل x



الحل:

من الرسم البياني للدالة f' :

$f'(x) = 3 > 0$ لكل $x < 0$

$\therefore f$ متزايدة على $(-\infty, 0)$ وبيانها جزء من مستقيم ميله 3

$f'(x) = 1 > 0$ لكل $x > 0$

$\therefore f$ متزايدة على $(0, \infty)$ وبيانها جزء من مستقيم ميله 1

$\because f$ متصلة ، $f(0) = 1$

$\therefore f(x) = 3x + 1$ ، $x < 0$

إيجاد القاعدة

$f(x) = 3x + c_1 : x < 0$

f متصلة عند $x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$

$c_1 = 1$

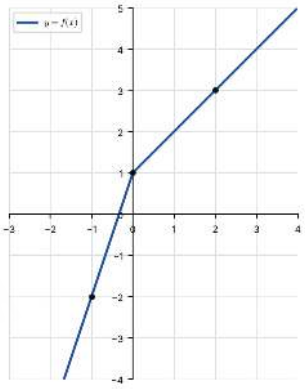
$f(x) = x + c_2 : x > 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

$c_2 = 1$

$x \geq 0 \, , \, f(x) = x + 1$

$f'(0)$ غير موجودة (ميل اليمين $\neq$ ميل اليسار) ∴ للبيان زاوية عند $(0, 1)$



نقاط مساعدة

$f(-1) = -2$

$f(0) = 1$

$f(2) = 3$

البند (3-5) – تطبيقات على القيم القصوى

مثال (1) صـ 155 عددان موجبان مجموعهما 100 و مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن . ما العددان ؟

الحل:

مجموع المربعين $= x^2 + y^2$

$f(x) = x^2 + (100 - x)^2$

$f(x) = 2x^2 - 200x + 10000$

$f'(x) = 4x - 200$

نضع $f'(x) = 0 : 4x - 200 = 0$

$x = 50$

$f''(x) = 4 > 0$

∴ عند $x = 50$ يكون مجموع المربعين أصغر ما يمكن

$y = 100 - 50 = 50$

العددان هما 50 ، 50

نفرض العددين x ، y

$x + y = 100$

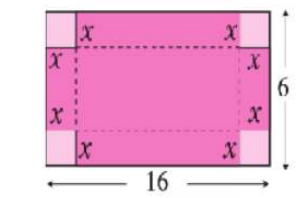
$y = 100 - x$

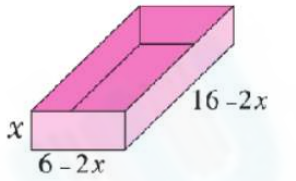
الشروط

$0 < x < 100$

$x = 50 \in (0, 100)$

مثال (2) صـ 156 يراد صنع صندوق بدون غطاء بقص مربعات متطابقة طول ضلع كل منها x من اركان طبقة صفيح أبعادها $6\,cm$ ، $16\,cm$ وثني جوانبها إلى أعلى أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن, ما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة





الحل:

حجم الصندوق = الطول × العرض × الارتفاع

$$V(x) = (16-2x)(6-2x)\cdot x$$

$$V(x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 88x + 96$$

نضع $V'(x) = 0 : 12x^2 - 88x + 96 = 0$

$$4(3x^2 - 22x + 24) = 0$$

$$(3x-4)(x-6) = 0$$

$x = \frac{4}{3}$ أو $x = 6$ (مرفوض)

$$V''(x) = 24x - 88$$

$$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 32 - 88 = -56 < 0$$

∴ عند $x = \frac{4}{3}\,cm$ يكون الحجم أكبر ما يمكن

$$V\left(\frac{4}{3}\right) = \left(16 - \frac{8}{3}\right)\left(6 - \frac{8}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}$$

$$= \frac{40}{3}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1600}{27} \approx 59.26\,cm^3$$

أكبر حجم $\frac{1600}{27} \approx 59.26\,cm^3$ ، $x = \frac{4}{3}\,cm$

الشروط

$6 - 2x > 0$ ، $x > 0$

$0 < x < 3$

$\frac{4}{3} \in (0,3)$

$6 \notin (0,3)$

حاول أن تحل (1) صـ 156 أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن .

الحل:

ناتج الضرب $= x \cdot y$

$= x(14 - x)$

$f(x) = 14x - x^2$

$f'(x) = 14 - 2x$

نضع $f'(x) = 0 : 14 - 2x = 0$

$2x = 14 \Rightarrow x = 7$

$f''(x) = -2 < 0$

∴ عند $x = 7$ يكون ناتج الضرب أكبر ما يمكن

$y = 14 - 7 = 7$

العددان هما 7 ، 7

نفرض العددين x ، y

$x + y = 14$

$y = 14 - x$

حاول أن تحل (3) صـ 158 تعطى الدالة $V(h)=2\pi(-h^3+36h)$ حجم إسطوانة بدلالة ارتفاعها h .

(a) أوجد الارتفاع $h\,(cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة .

(b) ما قيمة هذا الحجم ؟

الحل:

(a)

$$V'(h)=2\pi(-3h^2+36)$$

نضع $V'(h)=0$: $2\pi(-3h^2+36)=0$

$$-3h^2=-36\Rightarrow h^2=12$$

$h=2\sqrt{3}$ أو $h=-2\sqrt{3}$ (مرفوض)

$$V''(h)=2\pi(-6h)=-12\pi h$$

$$V''(2\sqrt{3})=-24\sqrt{3}\,\pi<0$$

∴ عند $h=2\sqrt{3}\,cm$ يكون الحجم أكبر ما يمكن

(b)

$$V(2\sqrt{3})=2\pi\left(-(2\sqrt{3})^3+36(2\sqrt{3})\right)$$
$$=2\pi(-24\sqrt{3}+72\sqrt{3})=96\sqrt{3}\,\pi$$

الشروط

$h>0$

$V>0\Rightarrow -h^3+36h>0$

$0<h<6$

(a) $h=2\sqrt{3}\,cm$ ،

(b) $V=96\sqrt{3}\,\pi\approx 522.37\,cm^3$

حاول أن تحل (4) صـ 159 أوجد أقصر مسافة بين النقطة $A(x,y)$ على المنحنى الذي معادلته $y=\sqrt{x}$ والنقطة $B(3,0)$

الحل:

∵ A تقع على المنحنى ∴ $A(x,\sqrt{x})$

$$d=AB=\sqrt{(x-3)^2+(\sqrt{x}-0)^2}$$

$$d(x)=\sqrt{x^2-6x+9+x}=\sqrt{x^2-5x+9}$$

$$d'(x)=\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+9}}$$

نضع $d'(x)=0$: $2x-5=0$

$$x=\frac{5}{2}$$

الشروط

$x\geq 0$ (مجال $\sqrt{x}$)

$\frac{5}{2}\in[0,\infty)$

شرط المقام

$x^2-5x+9>0$ لكل x

المميز $=25-36<0$

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
إشارة d'	$-$	0	$+$
سلوك d	$\searrow$	$\frac{\sqrt{11}}{2}$	$\nearrow$

$\therefore$ للدالة d قيمة صغرى مطلقة عند $x = \frac{5}{2}$

$$d\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 9} = \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

وتكون النقطة $A\left(\frac{5}{2}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

أقصر مسافة $= \frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1.66$ وحدة طول

البند (1-4) – التقدير

حاول أن تحل (ص171) أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى 97% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

الحل:

$$1 - \alpha = 0.97$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.015 \text{ ، } \alpha = 0.03$$

المساحة بين 0 ، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.97}{2} = 0.485$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري :

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$$

مثال 1 (ص171) أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى 95% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

الحل:

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025 \text{ ، } \alpha = 0.05$$

المساحة بين 0 ، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.95}{2} = 0.475$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري :

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

مثال أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$ باستخدام مستوى ثقة 95% .

(1) أوجد هامش الخطأ.

(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

(3) فسّر فترة الثقة.

الحل:

$$1 - \alpha = 0.95 \text{ ، } \bar{x} = 76.3 \text{ ، } \sigma = 12.5 \text{ ، } n = 40$$

(1) $\because \sigma$ معلوم

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ عند مستوى ثقة 95%

$$\therefore E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{12.5}{\sqrt{40}}$$
$$\approx 3.87$$

(2) فترة الثقة

$$(\bar{x} - E \text{ , } \bar{x} + E)$$
$$= (76.3 - 3.87 \text{ , } 76.3 + 3.87)$$
$$= (72.43 \text{ , } 80.17)$$

(3) التفسير: عند اختيار 100 عينة عشوائية حجم كل منها $n = 40$

وحساب فترة الثقة لكل منها فإن نحو 95 فترة منها تحوي μ الحقيقية و 5 فترات لا تحويها

(1) $E \approx 3.87$ **، (2)** $(72.43 \text{ , } 80.17)$

حاول أن تحل 2(ص173) من المثال السابق إذا أجريت الدراسة على عينة أخرى من الإناث حجمها 100 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$ باستخدام مستوى ثقة 95% .

(1) أوجد هامش الخطأ.

(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

(3) فسّر فترة الثقة.

الحل:

$$1 - \alpha = 0.95 \text{ ، } \bar{x} = 18.4 \text{ ، } \sigma = 3.6 \text{ ، } n = 100$$

(1) $\because \sigma$ معلوم

95% عند مستوى ثقة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$\therefore E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{3.6}{\sqrt{100}}$$
$$= 1.96 \times \frac{3.6}{10} = 0.7056$$

(2) فترة الثقة

$$(\bar{x} - E\,,\, \bar{x} + E)$$
$$= (18.4 - 0.7056\,,\, 18.4 + 0.7056)$$
$$= (17.6944\,,\, 19.1056)$$

(3) التفسير: عند اختيار 100 عينة عشوائية حجم كل منها $n = 100$

وحساب فترة الثقة لكل منها فإن نحو 95 فترة منها تحوي μ الحقيقية و 5 فترات لا تحويها

(1) $E = 0.7056$ ، **(2)** $(17.6944\,,\, 19.1056)$

حاول أن تحل (ص20)

أجريت دراسة لعينة من 24 طالباً حول متوسط عدد ساعات مشاهدة التلفزيون أسبوعياً. فإذا كان الانحراف المعياري $\sigma = 2.5$ المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 21$ باستخدام مستوى ثقة 95%.

(1) أوجد هامش الخطأ.

(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

(3) فسّر فترة الثقة.

الحل:

$$1 - \alpha = 0.95 \text{ ، } \bar{x} = 21 \text{ ، } \sigma = 2.5 \text{ ، } n = 24$$

(1) $\because \sigma$ معلوم

95% عند مستوى ثقة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$\therefore E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{2.5}{\sqrt{24}}$$
$$\approx 1.00$$

(2) فترة الثقة

$$(\bar{x} - E\,,\, \bar{x} + E)$$
$$= (21 - 1.00\,,\, 21 + 1.00)$$
$$= (20\,,\, 22)$$

(3) التفسير: عند اختيار 100 عينة عشوائية حجم كل منها $n = 24$

وحساب فترة الثقة لكل منها فإن نحو 95 فترة منها تحوي μ الحقيقية و 5 فترات لا تحويها

(1) $E \approx 1.00$ ، **(2)** $(20\ ,\ 22)$

حاول أن تحل 3 (ص174) أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$ ، وانحرافها المعياري $s = 9$ ، باستخدام مستوى ثقة 95%.

(1) أوجد هامش الخطأ.

(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

(3) فسّر فترة الثقة.

الحل:

$$1 - \alpha = 0.95 \text{ ، } \bar{x} = 50 \text{ ، } S = 9 \text{ ، } n = 81$$

(1) $\because \sigma$ غير معلوم ، $n = 81 > 30$

95% عند مستوى ثقة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$\therefore E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{9}{\sqrt{81}}$$

$$= 1.96 \times \frac{9}{9} = 1.96$$

(2) فترة الثقة

$$(\bar{x} - E\ ,\ \bar{x} + E)$$

$$= (50 - 1.96\ ,\ 50 + 1.96)$$

$$= (48.04\ ,\ 51.96)$$

(3) التفسير: عند اختيار 100 عينة عشوائية حجم كل منها $n = 81$

وحساب فترة الثقة لكل منها فإن نحو 95 فترة منها تحوي μ الحقيقية و 5 فترات لا تحويها

(1) $E = 1.96$ ، **(2)** $(48.04\ ,\ 51.96)$

حاول أن تحل (ص22) أخذت عينة عشوائية بسيطة حجمها $n = 20$ من مجتمع طبيعي.
أوجد القيمة الحرجة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى الثقة 95% باستخدام جدول التوزيع t.

الحل:

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025 \text{ ، } \alpha = 0.05$$

$$n - 1 = 20 - 1 = 19 = \text{درجة الحرية}$$

من جدول التوزيع t عند درجة حرية 19 و $\frac{\alpha}{2} = 0.025$:

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.093$$

حاول أن تحل 4 (ص176) أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علماً أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي. إذا كان لدينا $n = 13 \text{ ، } s = 3.2 \text{ ، } \bar{x} = 8.4$

الحل:

$$1 - \alpha = 0.95 \text{ ، } \bar{x} = 8.4 \text{ ، } S = 3.2 \text{ ، } n = 13$$

(1) $\because \sigma$ غير معلوم ، $n = 13 < 30$

$$\therefore E = t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$E = 2.179 \times \frac{3.2}{\sqrt{13}} \approx 1.934$$

(2) فترة الثقة

$$(\bar{x} - E \, , \, \bar{x} + E)$$

$$= (8.4 - 1.934 \, , \, 8.4 + 1.934)$$

$$= (6.466 \, , \, 10.334)$$

إيجاد $t_{\frac{\alpha}{2}}$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$n - 1 = 12 \text{ درجة الحرية}$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.179$$

حاول أن تحل (ص26) أخذت عينة عشوائية من 20 نبتة لدراسة نموها. فإذا كان متوسط النمو $\bar{x} = 8.4$ خلال عام والانحراف المعياري للعينة $4.6\ cm$ ، استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد.

(1) هامش الخطأ.

(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

الحل:

$1-\alpha = 0.95 \text{ ، } \bar{x} = 8.4 \text{ ، } S = 4.6 \text{ ، } n = 20$

(1) $\because \sigma$ غير معلوم ، $n = 20 < 30$

$$\therefore E = t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$E = 2.093 \times \frac{4.6}{\sqrt{20}} \approx 2.153$$

(2) فترة الثقة

$$(\bar{x} - E\ ,\ \bar{x} + E)$$

$$= (8.4 - 2.153\ ,\ 8.4 + 2.153)$$

$$= (6.247\ ,\ 10.553)$$

(1) $E \approx 2.153$ ، **(2)** $(6.247\ ,\ 10.553)$

إيجاد $t_{\frac{\alpha}{2}}$

$1-\alpha = 0.95$

$\alpha = 0.05$

$\frac{\alpha}{2} = 0.025$

درجة الحرية $n - 1 = 19$

$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.093$

تمارين (1-4) - 1 أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لكل مستويات الثقة التالية، وذلك باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

(a) 97%

(b) 94%

(c) 99.2%

(d) 92%

الحل:

(a)

$1-\alpha = 0.97$

$\frac{\alpha}{2} = 0.015 \text{ ، } \alpha = 0.03$

المساحة بين 0 ، $Z_{\frac{\alpha}{2}}$

$= \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.97}{2} = 0.485$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري :

(b)

$1-\alpha = 0.94$

$\frac{\alpha}{2} = 0.03 \text{ ، } \alpha = 0.06$

$= \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.94}{2} = 0.47$ المساحة بين 0 ، $Z_{\frac{\alpha}{2}}$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري :

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.88$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$$

(c)

$$1 - \alpha = 0.992$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.004 \text{ ، } \alpha = 0.008$$

المساحة بين 0 ، $Z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$= \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.992}{2} = 0.496$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري :

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.65$$

(d)

$$1 - \alpha = 0.92$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.04 \text{ ، } \alpha = 0.08$$

$$= \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.92}{2} = 0.46$$ المساحة بين 0 ، $Z_{\frac{\alpha}{2}}$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري :

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.75$$

(a) 2.17 ،
(b) 1.88 ،
(c) 2.65 ،
(d) 1.75

البند (2-4) – اختبارات الفروض الإحصائية

مثال 1 تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4000 د.ك . إذا أخذت عينة من 25 موظفاً ، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3950 د.ك فإذ علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع (ديناراً) $\sigma = 125$. وضح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%.

الحل:

$$\alpha = 0.05 \text{ ، } \sigma = 125 \text{ ، } \bar{x} = 3950 \text{ ، } n = 25 \text{ ، } \mu = 4000$$

① الفروض الإحصائية :

$$H_1 : \mu \neq 4000 \text{ ، } H_0 : \mu = 4000$$

② المقياس الإحصائي : $\because \sigma$ معلوم

$$\therefore Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{3950 - 4000}{\frac{125}{\sqrt{25}}}$$

$$= \frac{-50}{25} = -2$$

③ القيمة الحرجة عند $\alpha = 0.05$:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \text{ ، } \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

④ فترة قبول فرض العدم $(-1.96 \text{ , } 1.96)$

⑤ القرار : $\because \ -2 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$

$\therefore$ نرفض فرض العدم $H_0 : \mu = 4000$ ونقبل الفرض البديل $H_1 : \mu \neq 4000$ (زعم الشركة غير صحيح)

حاول أن تحل (ص179) بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو : $\mu = 1800\ kg$ مع انحراف $\sigma = 150\ kg$ ويؤكد الاخصائيون في المصنع المنتج لهذه الأسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك وتأكيداً على ذلك تم اختبار عينة من 40 سلكاً فتبيّن أن متوسط قوة تحمل هذ الأسلاك يساوي $1840\ kg$. هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

الحل:

$$\alpha = 0.05 \ ، \ \bar{x} = 1840 \ ، \ n = 40 \ ، \ \sigma = 150 \ ، \ \mu = 1800$$

① الفروض الإحصائية :

$$H_1 : \mu \neq 1800 \ ، \ H_0 : \mu = 1800$$

② المقياس الإحصائي : $\because \sigma$ معلوم

$$\therefore Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1840 - 1800}{\frac{150}{\sqrt{40}}}$$

$$\approx 1.69$$

③ القيمة الحرجة عند $\alpha = 0.05$:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \ ، \ \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

④ فترة قبول فرض العدم $(-1.96\ ,\ 1.96)$

⑤ القرار : $\because \ 1.69 \in (-1.96\ ,\ 1.96)$

$\therefore$ نقبل فرض العدم $H_0 : \mu = 1800$ ونرفض الفرض البديل ، أي لا يمكن قبول ادعاء زيادة قوة التحمل

حاول أن تحل (ص180) متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباحاً كهربائياً مصنعة من أحد المصانع $\bar{x} = 1570$ ساعة بانحراف معياري $S = 120$ ساعة. يقول صاحب المصنع أن متوسط العمر $\mu = 1600$ ساعة للمصابيح المصنعة في المصنع. اختبر الفرض $\mu = 1600$ ساعة مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ ساعة باختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

(إرشاد فـ٥ : $\mu = 1600$ ، فـ١ : $\mu \neq 1600$)

الحل:

$$\alpha = 0.05 \text{ ، } S = 120 \text{ ، } \bar{x} = 1570 \text{ ، } n = 100$$

① الفروض الإحصائية :

$$H_1 : \mu \neq 1600 \text{ ، } H_0 : \mu = 1600$$

② المقياس الإحصائي : $\because \sigma$ غير معلوم ، $n = 100 > 30$

$$\therefore Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{1570 - 1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}}$$
$$= \frac{-30}{12} = -2.5$$

③ القيمة الحرجة عند $\alpha = 0.05$:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \text{ ، } \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

④ فترة قبول فرض العدم $(-1.96 \text{ , } 1.96)$

⑤ القرار : $\because \ -2.5 \notin (-1.96 \text{ , } 1.96)$

$\therefore$ نرفض فرض العدم $H_0 : \mu = 1600$ ونقبل الفرض البديل $H_1 : \mu \neq 1600$

مثال 3 (ص181) يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينار كويتياً. فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبيّن أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 283$ ديناراً وانحرافها المعياري $S = 32$ ديناراً.فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟
استخدم مستوى ثقة 95% (علماً بأن المجتمع يتبع توزيعاً طبيعياً).

الحل:

$$\alpha = 0.05 \text{ ، } S = 32 \text{ ، } \bar{x} = 283 \text{ ، } n = 10 \text{ ، } \mu = 290$$

① الفروض الإحصائية :

$$H_1 : \mu \neq 290 \text{ ، } H_0 : \mu = 290$$

② المقياس الإحصائي : $\because \sigma$ غير معلوم ، $n = 10 < 30$

$$\therefore t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}}$$
$$\approx -0.69$$

③ القيمة الحرجة عند $\alpha = 0.05$:

$$n - 1 = 9 = \text{درجة الحرية} \text{ ، } \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.262$$

④ فترة قبول فرض العدم $(-2.262\ ,\ 2.262)$

⑤ القرار: $\because\ -0.69 \in (-2.262\ ,\ 2.262)$

$\therefore$ نقبل فرض العدم $H_0 : \mu = 290$ ، أي يمكن الاعتماد على العينة لتأكيد ما افترضه المدير

حاول أن تحل (ص181) في المثال (3) إذا أجريت دراسة إحصائية أخرى على المدينة ذاتها وتبين من خلالها على $\bar{x} = 265$ ديناراً و $S = 5$ ديناراً. لعينة من 10 منازل مع استخدام درجة الثقة نفسها.

فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحاً أم لا؟ وضّح إجابتك.

الحل:

$$\alpha = 0.05\ ،\ S = 5\ ،\ \bar{x} = 265\ ،\ n = 10\ ،\ \mu = 290$$

① الفروض الإحصائية:

$$H_1 : \mu \neq 290\ ،\ H_0 : \mu = 290$$

② المقياس الإحصائي: $\because\ \sigma$ غير معلوم ، $n = 10 < 30$

$$\therefore t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{265 - 290}{\frac{5}{\sqrt{10}}}$$
$$\approx -15.81$$

③ القيمة الحرجة عند $\alpha = 0.05$:

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025\ ،\ \text{درجة الحرية} = n - 1 = 9$$
$$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.262$$

④ فترة قبول فرض العدم $(-2.262\ ,\ 2.262)$

⑤ القرار: $\because\ -15.81 \notin (-2.262\ ,\ 2.262)$

$\therefore$ نرفض فرض العدم $H_0 : \mu = 290$ ونقبل $H_1 : \mu \neq 290$ ، أي افتراض المدير لا يبقى صحيحاً

البند (3-4) – الارتباط والانحدار

حاول أن تحل (ص184) ارسم مخطط الانتشار للبيانات التالية، وحدد نوع العلاقة التي تعبر عنها:

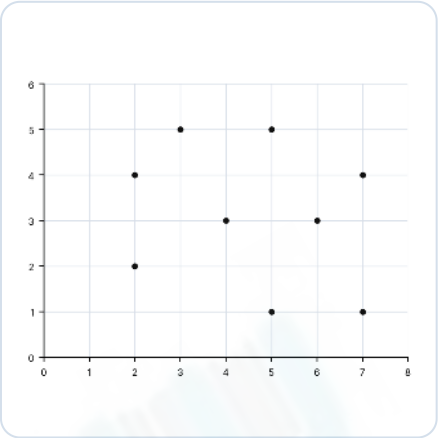
x	2	6	5	2	7	3	4	7	5
y	2	3	1	4	1	5	3	4	5

الحل:

نمثل النقاط (x, y) في المستوى الإحداثي:

$$(7,1)\ ،\ (2,4)\ ،\ (5,1)\ ،\ (6,3)\ ،\ (2,2)$$

$$(5,5)\ ،\ (7,4)\ ،\ (4,3)\ ،\ (3,5)$$



نلاحظ أن النقاط متناثرة ولا تتجمع حول خط مستقيم

مع ميل بسيط للهبوط عند زيادة x

∴ العلاقة ارتباط عكسي ضعيف

(للتحقق : $r \approx -0.23 \in (-0.5, 0)$)

ارتباط عكسي ضعيف ($r \approx -0.23$)

حاول أن تحل ص187 احسب معامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وبين نوعه وقوته:

x	1	2	3	4	5	6
y	98	99	75	40	100	150

الحل:

$$n = 6$$

x	y	xy	x^2	y^2
1	98	98	1	9604
2	99	198	4	9801
3	75	225	9	5625
4	40	160	16	1600
5	100	500	25	10000
6	150	900	36	22500
$\sum x = 21$	$\sum y = 562$	$\sum xy = 2081$	$\sum x^2 = 91$	$\sum y^2 = 59130$

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \cdot \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$
$$= \frac{6(2081) - (21)(562)}{\sqrt{6(91) - (21)^2} \cdot \sqrt{6(59130) - (562)^2}}$$
$$= \frac{12486 - 11802}{\sqrt{546 - 441} \cdot \sqrt{354780 - 315844}}$$
$$= \frac{684}{\sqrt{105} \cdot \sqrt{38936}}$$
$$\approx 0.34$$

$$r \in (0, 0.5) \therefore$$

$r \approx 0.34$ ارتباط طردي ضعيف

حاول أن تحل (ص189) في الجدول التالي أوجد:

(1) أوجد معادلة خط الانحدار.

(2) قيمة y عندما $x = 10$.

(3) مقدار الخطأ عندما $x = 10$.

x	4	5	8	9	10	12
y	2	4	5	8	6	11

الحل:

(1)

$$n = 6$$

x^2	xy	y	x
16	8	2	4
25	20	4	5
64	40	5	8
81	72	8	9
100	60	6	10
144	132	11	12
$\sum x^2 = 430$	$\sum xy = 332$	$\sum y = 36$	$\sum x = 48$

$$b_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$
$$= \frac{6(332) - (48)(36)}{6(430) - (48)^2}$$
$$= \frac{1992 - 1728}{2580 - 2304} = \frac{264}{276} = \frac{22}{23} \approx 0.957$$
$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{36}{6} = 6 \text{ ، } \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{48}{6} = 8$$
$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 6 - \frac{22}{23}(8) = -\frac{38}{23} \approx -1.652$$

معادلة خط الانحدار: $\hat{y} = b_0 + b_1 x$

$$\hat{y} = -1.652 + 0.957x$$

(2)

$$\hat{y}_{10} = -\frac{38}{23} + \frac{22}{23}(10) = \frac{182}{23} \approx 7.913$$

(3)

القيمة الجدولية عند $x = 10$: $y_{10} = 6$

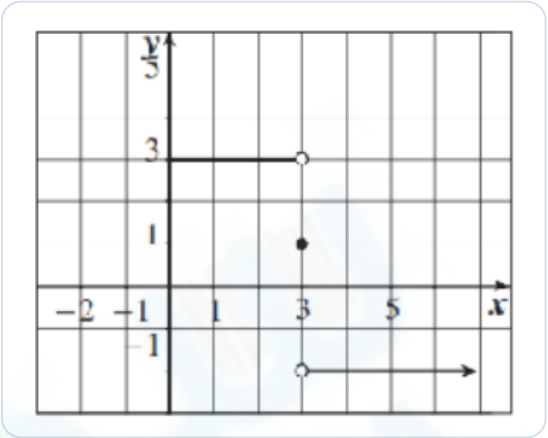
مقدار الخطأ $|y_{10} - \hat{y}_{10}| = |6 - 7.913| \approx 1.913$

(1) $\hat{y} = -1.652 + 0.957x$ ، **(2)** $\hat{y} \approx 7.913$ ، **(3) مقدار الخطأ** ≈ 1.913

الجزء الثاني: التمارين الموضوعية من كتاب التمارين – مع التفسير

البند (1-1) – النهايات

(1) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -2$ (من الشكل)



ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

من الشكل: عند الاقتراب من 3 من اليسار تقترب قيم $f(x)$ من 3

إذن $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 3 \neq -2$

العبارة خاطئة

(2) $\lim_{y\to 2} \dfrac{y^2+5y+6}{y+2} = 5$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

بالتعويض المباشر: $\dfrac{4+10+6}{4} = \dfrac{20}{4} = 5$

العبارة صحيحة

(3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2} = 0$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$\frac{x^2(5x+8)}{x^2(3x^2-16)} = \frac{5x+8}{3x^2-16}$$
$$\to \frac{8}{-16} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

العبارة خاطئة

(4) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}-x}{x} = -2$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x \text{ عندما } x < 0$$
$$\frac{-x-x}{x} = \frac{-2x}{x} = -2$$

العبارة صحيحة

(5) $\lim_{x\to 1^+} (2x - |x| + 2) = 3$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

بالتعويض: $2(1) - |1| + 2 = 3$

العبارة صحيحة

(7) $\lim_{x\to -2} (x^3+3x^2-2x-17) =$

ⓐ 17 ⓑ -17

ⓒ 9 ⓓ -9

الحل:

كثيرة حدود، بالتعويض المباشر: $-8+12+4-17 = -9$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(8) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} =$

(a) 1
(b) 0
(c) $\dfrac{1}{2}$
(d) غير موجودة

الحل:

$$\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} \to \frac{1}{2}$$

الإجابة الصحيحة: (c)

(9) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2} =$

(a) 1
(b) 0
(c) $\dfrac{1}{2}$
(d) $\dfrac{1}{3}$

الحل:

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(2x-1)(x-2)} = \frac{x-1}{2x-1} \to \frac{1}{3}$$

الإجابة الصحيحة: (d)

(10) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$

(a) -1
(b) 1
(c) $\dfrac{1}{2}$
(d) 0

الحل:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \to \frac{1}{2}$$

الإجابة الصحيحة: (c)

(11) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x^2-4} =$

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $-\dfrac{1}{2}$

(c) $\dfrac{1}{4}$ (d) $-\dfrac{1}{4}$

الحل:

عندما $x > 2$: $|x-2| = x-2$

$$\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2} \to \frac{1}{4}$$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(12) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2+x} - \dfrac{1}{2}}{x} =$

(a) $-\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2}$

(c) $\dfrac{1}{4}$ (d) $-\dfrac{1}{4}$

الحل:

توحيد المقامات: $\dfrac{2-(2+x)}{2x(2+x)} = \dfrac{-1}{2(2+x)}$

$$\to -\frac{1}{4}$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(13) $\lim_{x\to -8} \dfrac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2} =$

(a) 12 (b) -12

(c) 4 (d) -4

الحل:

$$x+8 = (\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4)$$

$$\to 4+4+4 = 12$$

الإجابة الصحيحة:
(a)

(14) $\lim_{x\to -3} \dfrac{2x^3+9x^2+9x}{x+3} =$

(a) 9 (b) 0

(c) -3 (d) -9

الحل:

$$\frac{x(2x+3)(x+3)}{x+3} = x(2x+3)$$
$$\to (-3)(-3) = 9$$

الإجابة الصحيحة:
(a)

البند (2-1) – نهايات تشتمل على ∞ ، $-\infty$

(2) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{|x|-3} = 2$

(a) صحيحة (b) خاطئة

الحل:

عندما $x \to \infty : |x| = x$

$$\frac{2x-1}{x-3} \to \frac{2}{1} = 2$$

العبارة صحيحة

(3) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{|x|-3}{x+3} = -1$

(a) صحيحة (b) خاطئة

الحل:

عندما $x \to -\infty : |x| = -x$

$$\frac{-x-3}{x+3} = -1$$

العبارة صحيحة

(4) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1-x}{2x^2-5x-3} = -\infty$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

درجة البسط أقل من درجة المقام

إذن النهاية $= -\infty \neq 0$

العبارة خاطئة

(5) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{|2x-3|} = \dfrac{1}{2}$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

عندما $x \to -\infty$: $|2x-3| = 3-2x$

$$\frac{x}{3-2x} \to \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$$

العبارة خاطئة

(6) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{|x|}{|x|+1} =$

ⓐ 0

ⓑ 1

ⓒ ∞

ⓓ $\dfrac{1}{2}$

الحل:

عندما $x \to \infty$: $\dfrac{x}{x+1} \to 1$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(7) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+3} =$

(a) ∞
(b) $-\infty$
(c) 1
(d) 0

الحل:

$$\frac{1}{1} = 1 = \text{النهاية} = \text{درجة المقام} ،\text{درجة البسط}$$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(8) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right) =$

(a) 0
(b) 5
(c) 1
(d) $-\infty$

الحل:

$$\frac{5x^2-1}{x^2} \to 5 ، \frac{2}{x}+1 \to 1$$
$$1 \times 5 = 5 = \text{النهاية}$$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(9) $\lim_{x\to\infty} \frac{-|x+3|}{2x} =$

(a) $\frac{1}{2}$
(b) $-\frac{1}{2}$
(c) ∞
(d) $-\infty$

الحل:

$$|x+3| = x+3 : x \to \infty \text{ عندما}$$
$$\frac{-(x+3)}{2x} \to -\frac{1}{2}$$

الإجابة الصحيحة:
(b)

البند (1-3) – صيغ غير معينة

(1) $\lim_{x\to\infty}(3x^2+7x-8)=\infty$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

(الحد الأعلى درجة) $\lim_{x\to\infty}3x^2=\infty$

العبارة صحيحة

(2) $\lim_{x\to-\infty}(-x^3-2x+1)=-\infty$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

(الحد الأعلى درجة) $\lim_{x\to-\infty}(-x^3)=\infty$

إذن النهاية $\infty\neq-\infty$

العبارة خاطئة

(3) $\lim_{x\to-\infty}(-x^2+x-3)=-\infty$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

(الحد الأعلى درجة) $\lim_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$

العبارة صحيحة

(4) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{-2x+4}{3x^2-5x+1}=0$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

درجة البسط أقل من درجة المقام، إذن النهاية $=0$

العبارة صحيحة

(5) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+7x^2-1}{2x^3-4} = 2$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

درجة البسط = درجة المقام: $\dfrac{4}{2} = 2$

العبارة صحيحة

(6) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}} = \dfrac{3}{2}$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$x \to -\infty$ عندما $\sqrt{4x^2-8x+5} \approx 2|x| = -2x$

النهاية $= \dfrac{3x}{-2x} = -\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{3}{2}$

العبارة خاطئة

(7) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x+5}{2x^4+x^2-2} =$

ⓐ ∞ ⓑ $\dfrac{1}{2}$

ⓒ 0 ⓓ $-\infty$

الحل:

درجة البسط 3 أقل من درجة المقام 4، إذن النهاية 0

الإجابة الصحيحة:
(c)

(8) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}} =$

(a) ∞
(b) $-\infty$
(c) 3
(d) -3

الحل:

$x \to -\infty$ عندما $\sqrt{x^2+1} \approx |x| = -x$

$\dfrac{3x}{-x} = -3 =$ النهاية

الإجابة الصحيحة:
(d)

(9) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-5x+3}{\sqrt{9x^2-2x+4}} =$

(a) $\dfrac{5}{3}$
(b) $-\dfrac{5}{3}$
(c) $\dfrac{5}{9}$
(d) $-\dfrac{5}{9}$

الحل:

$x \to \infty$ عندما $\sqrt{9x^2-2x+4} \approx 3x$

$\dfrac{-5x}{3x} = -\dfrac{5}{3} =$ النهاية

الإجابة الصحيحة:
(b)

(10) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}} =$

(a) -1
(b) $-\dfrac{1}{2}$
(c) $\dfrac{1}{2}$
(d) 1

الحل:

$x \to -\infty$ عندما $\sqrt{4x^2-x+3} \approx 2|x| = -2x$

$\dfrac{-2x}{-2x} = 1 =$ النهاية

الإجابة الصحيحة:
(d)

(11) إذا كان: $\lim_{x\to\infty} \frac{mx^2+nx+4}{\sqrt{x^2-2x+4}} = -2$ فإن قيم m , n هي:

(a) $m=0$, $n=-2$ ✓

(b) $m=0$, $n=2$

(c) $m=1$, $n=-1$

(d) $m=1$, $n=1$

الحل:

لكي تكون النهاية عددًا: $m=0$

$$\frac{nx}{x} = n = -2$$

الإجابة الصحيحة:
(a)

(12) إذا كانت: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+3}}{mx^2+nx-4} = 1$ فإن قيم m , n هي:

(a) $m=0$, $n=-2$ ✓

(b) $m=0$, $n=2$

(c) $m=0$, $n=4$

(d) $m=0$, $n=-4$

الحل:

لكي تكون النهاية $\neq 0$: $m=0$

$$\frac{-2x}{nx} = -\frac{2}{n} = 1 \Rightarrow n=-2 \text{ ، } \sqrt{4x^2-2x+3} \approx -2x$$

الإجابة الصحيحة:
(a)

البند (4-1) – نهايات بعض الدوال المثلثية

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}$

(a) صحيحة

(b) خاطئة ✓

الحل:

$$-\frac{1}{2x} \leq \frac{\sin 3x}{2x} \leq \frac{1}{2x} \quad (\text{لـ } x>0)$$

بمبرهنة الإحاطة النهاية $= \frac{3}{2} \neq 0$

العبارة خاطئة

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos 2x}{4x} = \frac{1}{2}$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$(x > 0 \text{ لـ}) \quad -\frac{1}{4x} \le \frac{\cos 2x}{4x} \le \frac{1}{4x}$$

بمبرهنة الإحاطة النهاية $= \frac{1}{2} \neq 0$

العبارة خاطئة

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = 0$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

بالتعويض المباشر: $\frac{1-0}{1} = 1 \neq 0$

العبارة خاطئة

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin 2x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

بالتعويض المباشر: $\frac{1+0}{2(1)} = \frac{1}{2}$

العبارة صحيحة

(5) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 \sin x + 5x^3}{4x^3} = 2$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \text{ و} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{5}{4}$$

النهاية $= 2 \neq \frac{5}{4}$

العبارة خاطئة

(6) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin x}=$

(a) 2 (b) -2 (c) 0 (d) ∞

الحل:

$$\frac{\tan 2x}{\sin x}=\frac{\tan 2x}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\to 2\times 1=2$$

الإجابة الصحيحة:
(a)

(7) $\lim_{x\to 0}\left(3+x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)=$

(a) 0 (b) 4 (c) 3 (d) ∞

الحل:

$$x^2\sin\frac{1}{x}\to 0 \text{ فبالإحاطة } -x^2\le x^2\sin\frac{1}{x}\le x^2$$

$$3+0=3=\text{النهاية}$$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(8) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x\cos x}{2x^2}=$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) -2 (d) 2

الحل:

$$\text{بالإحاطة } \frac{\cos x}{2x}\to 0 \text{ و } =2-\frac{\cos x}{2x}$$

$$2=\text{النهاية}$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(9) $\lim_{x\to 0} \dfrac{4x^2 + 5\sin^2 x}{3x^2} =$

(a) 3 (b) 9 (c) 0 (d) ∞

الحل:

$$= \frac{4}{3} + \frac{5}{3}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$$

الإجابة الصحيحة:
(a)

(10) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x + \cos x}{|2x|} =$

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $-\dfrac{1}{2}$ (c) 0 (d) ∞

الحل:

عندما $x \to -\infty$: $|2x| = -2x$

$$\frac{x + \cos x}{-2x} = -\frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2x} \to -\frac{1}{2}$$

الإجابة الصحيحة:
(b)

البند (1-5) – الاتصال

(1) الدالة $f: \dfrac{1}{(x+2)^2} + 1$ متصلة عند $x = -2$

(a) صحيحة (b) خاطئة

الحل:

$f(-2)$ غير معرفة (المقام صفر)

إذن f غير متصلة عند $x = -2$

العبارة خاطئة

(2) الدالة: $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

دالة نسبية مقامها $x^2 + 1 \neq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$

إذن متصلة على $\mathbb{R}$

العبارة صحيحة

(3) الدالة: $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ متصلة عند $x = -1$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

مجالها $(-2, \infty)$ و -1 داخله

$$y(-1) = 1 = \lim_{x \to -1} y$$

العبارة صحيحة

(4) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = -1$ وكان $\lim_{x \to -1} (f(x) - 2) = -1$ فإن $f(-1) = 1$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

f متصلة: $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

$$f(-1) - 2 = -1 \Rightarrow f(-1) = 1$$

العبارة صحيحة

(5) نقاط انفصال الدالة f: $f(x) = \cot x$ هي:

ⓐ $0\ ,\ \pi$
ⓑ $2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$
ⓒ $k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$
ⓓ $\frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

الحل:

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ غير معرفة عندما $\sin x = 0$

أي $x = k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(6) نقاط انفصال الدالة f: $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ التي يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

ⓐ 2
ⓑ $-2\ ,\ 2$
ⓒ -2
ⓓ $-5\ ,\ 2$

الحل:

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}\ ،\ x \neq 2$$

عند $x = 2$ النهاية $\frac{5}{4}$ موجودة (قابل للإزالة)، وعند $x = -2$ لا

الإجابة الصحيحة:
(a)

(7) نقاط انفصال الدالة f: $f(x) = \frac{2x^3 + 16}{x^2 + x - 2}$ التي لا يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

ⓐ $-1\ ,\ 2$
ⓑ -2
ⓒ $1\ ,\ -2$
ⓓ 1

الحل:

$$f(x) = \frac{2(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(x-1)}$$

عند $x = -2$ قابل للإزالة، وعند $x = 1$ النهاية غير موجودة

الإجابة الصحيحة:
(d)

(8) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=2$ فإن $f(x)$ يمكن أن تكون:

ⓐ $\dfrac{1}{|x-2|}$

ⓑ $\sqrt{x-2}$

ⓒ $\dfrac{|x-2|}{x-2}$

ⓓ $\begin{cases}\sqrt{x^2-3} & : x>2\\ 3x-5 & : x\le 2\end{cases}$

الحل:

في

$\lim\limits_{x\to 2^-}(3x-5)=1=f(2)$ ، $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x^2-3}=1$: **(d)**

و

، **(a)**

(c) غير معرفتين عند 2 ، و

(b) لا توجد نهاية من اليسار

الإجابة الصحيحة:
(d)

(9) إذا كانت الدالة f: $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & : x\ge 2\\ \dfrac{x^2-4}{x-2} & : x<2\end{cases}$ فإن:

ⓐ $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=4$

ⓑ $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=4$

ⓒ $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ موجودة

ⓓ f متصلة عند $x=2$

الحل:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(x+2)=4$$

$\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+1)=5$ فالنهاية غير موجودة و f غير متصلة

الإجابة الصحيحة:
(b)

(11) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-2$ وكانت $\lim_{x\to -2}(x^2+f(x))=7$ فإن $f(-2)$ تساوي:

(a) 3 (b) 5

(c) 9 (d) 11

الحل:

f متصلة: $4+f(-2)=7$

$\Rightarrow f(-2)=3$

الإجابة الصحيحة:
(a)

(12) إذا كانت الدالة g متصلة عند $x=1$ وكانت النقطة $(1\ ,\ -3)$ تقع على منحنى الدالة g فإن $\lim_{x\to 1}(g(x))^2$ تساوي:

(a) -6 (b) -3

(c) 1 (d) 9

الحل:

g متصلة: $\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)=-3$

$\lim_{x\to 1}(g(x))^2=(-3)^2=9$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(13) اختر لكل سؤال من القائمة (1) ما يناسبه من القائمة (2): $g(x)=\begin{cases} x+1 & : x>a \\ 3-x & : x\le a \end{cases} \Rightarrow a=$

(a) -1 (b) 2

(c) 0 (d) 1

(e) $\frac{2}{3}$

الحل:

للاتصال عند $x=a$: $a+1=3-a$

$\Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(14) اختر لكل سؤال من القائمة (1) ما يناسبه من القائمة (2): $g(x)=\begin{cases}2ax-2 & : x\neq a\\ 3a & : x=a\end{cases}\Rightarrow a=$

(a) -1 (b) 2

(c) 0 (d) 1

(e) $\frac{2}{3}$

الحل:

للاتصال عند $x=a$: $2a^2-2=3a$

$2a^2-3a-2=0\Rightarrow(2a+1)(a-2)=0\Rightarrow a=2$ أو $a=-\frac{1}{2}$ (الموجود 2)

الإجابة الصحيحة: (b)

(15) اختر لكل سؤال من القائمة (1) ما يناسبه من القائمة (2): $g(x)=\begin{cases}3x^2 & : x>a\\ 2x & : x\leq a\end{cases}\Rightarrow a=$

(a) -1 (b) 2

(c) 0 (d) 1

(e) $\frac{2}{3}$

الحل:

للاتصال عند $x=a$: $3a^2=2a$

$a(3a-2)=0\Rightarrow a=0$ أو $a=\frac{2}{3}$

الإجابة الصحيحة: (e)

البند (1-6) – نظريات الاتصال

(1) الدالة $f:f(x)=x^2+|x-1|$ متصلة عند $x=3$

(a) صحيحة (b) خاطئة

الحل:

مجموع دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$ (كثيرة حدود وقيمة مطلقة)

إذن متصلة عند $x=3$

العبارة صحيحة

(2) الدالة $f: f(x) = \dfrac{2x+5}{x+2} - \dfrac{2}{x}$ متصلة عند $x = 0$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$f(0)$ غير معرفة لأن $\dfrac{2}{x}$ غير معرفة عند $x = 0$

العبارة خاطئة

(3) الدالة $f: f(x) = \dfrac{2x-2}{|x|-1}$ متصلة عند $x = 0$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

المقام $|x| - 1 \neq 0$ عند $x = 0$ ، $f(0) = \dfrac{-2}{-1} = 2$

خارج قسمة دالتين متصلتين ومقامها $\neq 0$ ، إذن متصلة

العبارة صحيحة

(4) الدالة $f: f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x = 3$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$\sqrt[3]{3x-1}$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $x^2 = 9 \neq 0$ عند $x = 3$

$f(3) = \dfrac{2}{9}$ ، إذن متصلة

العبارة صحيحة

(5) الدالة $f: f(x) = \sqrt{-x^2+5x-4}$ متصلة عند $x = 2$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

مجالها $[1, 4]$ و 2 داخل المجال

$f(2) = \sqrt{-4+10-4} = \sqrt{2} = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

العبارة صحيحة

(6) نقاط انفصال الدالة f: $f(x)=\dfrac{-x+2}{x^2+9}$ عند:

(a) $x=3$ (b) $x=-3$

(c) $x=2$ (d) لا يوجد نقاط انفصال

الحل:

المقام $x^2+9>0$ لكل $x\in\mathbb{R}$

إذن f متصلة على $\mathbb{R}$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(7) نقاط انفصال الدالة f: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ عند x تساوي:

(a) $1\ ,\ -1$ (b) $2\ ,\ -2$

(c) $1\ ,\ 2$ (d) $-1\ ,\ -2$

الحل:

أصفار المقام: $x^2-1=0\Rightarrow x=\pm1$

الإجابة الصحيحة:
(a)

(8) لتكن الدالة f: $f(x)=x^2+3\ ,\ x\neq0$ ، الدالة g: $g(x)=\dfrac{x}{x-3}$ ، فإن: $(g\circ f)(x)$ تساوي:

(a) $\dfrac{4x^2-18x+27}{(x-3)^2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2-3}$

(c) $\dfrac{x^2+3}{x^2}$ (d) $\dfrac{x^2}{x^2+3}$

الحل:

$$(g\circ f)(x)=g(x^2+3)=\frac{x^2+3}{x^2+3-3}=\frac{x^2+3}{x^2}$$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(9) لتكن الدالة f: $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}$ ، الدالة g: $g(x)=x^2+3\ ,\ x\neq 0$ ، فإن: $(f\circ g)(x)$ تساوي:

ⓐ $\dfrac{x^2}{x-3}+3$ ⓑ $\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}+3$

ⓒ $\dfrac{-(x^2+3)}{x}$ ⓓ $\dfrac{x^2+3}{|x|}$

الحل:

$$(f\circ g)(x)=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3-3}}=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2}}=\frac{x^2+3}{|x|}$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(10) لتكن الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2+7}$ ، g: $g(x)=x^2-3$ فإن: $(f\circ g)(0)$ يساوي:

ⓐ 4 ⓑ -4

ⓒ 1 ⓓ -1

الحل:

$$g(0)=-3$$

$$f(-3)=\sqrt{9+7}=4$$

الإجابة الصحيحة:
(a)

(11) إذا كانت g دالة متصلة عند $x=2$ فإن الدالة المتصلة عند $x=2$ فيما يلي هي $f(x)$ تساوي:

ⓐ $\sqrt{g(x)}$ ⓑ $\dfrac{1}{g(x)}$

ⓒ $\dfrac{g(x)}{x-2}$ ⓓ $|g(x)|$

الحل:

القيمة المطلقة لدالة متصلة متصلة دائمًا

أما $\sqrt{g}$ و $\dfrac{1}{g}$ فتتطلب شروطًا على $g(2)$ ، و $\dfrac{g(x)}{x-2}$ غير معرفة عند 2

الإجابة الصحيحة:
(d)

(12) إذا كانت الدالة $f: f(x) = \sqrt{x^2 - a}$ متصلة عند $x = 3$ فإن a يمكن أن تساوي:

ⓐ 4 ⓑ 9

ⓒ 16 ⓓ 25

الحل:

$3^2 - a > 0 \Rightarrow a < 9$ نحتاج

من الخيارات $a = 4$ ، $f(3) = \sqrt{5}$

الإجابة الصحيحة:
(a)

البند (7-1) – الاتصال على فترة

(1) إذا كانت f دالة متصلة على كل من $[3\ ,\ 5]$ ، $[1\ ,\ 3)$ فإن f متصلة على $[1\ ,\ 5]$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

الاتصال على $[3, 5]$ يعطي الاتصال من اليمين فقط عند $x = 3$

لا نعلم أن $f(3) = \lim_{x \to 3^-} f(x)$ فقد لا تكون متصلة عند $x = 3$

العبارة خاطئة

(2) الدالة $f : f(x) = x^2 - |x|$ متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

x^2 و $|x|$ دالتان متصلتان على $\mathbb{R}$

والفرق بين دالتين متصلتين دالة متصلة

العبارة صحيحة

(3) الدالة $f : f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ متصلة على $[-2\ ,\ 2]$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

مجال $f : x \geq 2$ أو $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x \leq -2$

فالدالة غير معرفة على $(-2\ ,\ 2)$

العبارة خاطئة

(4) الدالة $f : f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 2}$ متصلة على $(-\infty\ ,\ 0)$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

f غير معرفة عند $x = -2$ وهي تنتمي إلى $(-\infty\ ,\ 0)$

فالدالة غير متصلة على هذه الفترة

العبارة خاطئة

(5) الدالة $f : f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ متصلة على $(-\infty\ ,\ 2)$ فقط

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

f دالة نسبية متصلة على $\mathbb{R} - \{2\}$

أي متصلة على $(-\infty, 2)$ وعلى $(2, \infty)$ أيضًا، فكلمة «فقط» خطأ

العبارة خاطئة

(6) لتكن الدالة f : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ فإن الدالة f :

ⓐ لها نقطتا انفصال عند كل من $x=4\,,\,x=-1$ ⓑ متصلة على $(-\infty\,,\,4]$

ⓒ متصلة على كل من $(-\infty,4)\,,\,(4,\infty)$ ⓓ ليس أي مما سبق

الحل:

f دالة نسبية مجالها $\mathbb{R}-\{4\}$

فهي متصلة على كل من $(-\infty,4)\,،\,(4,\infty)$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(7) إذا كانت f دالة متصلة على $[-2\,,\,3]$ فإن:

ⓐ $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}f(x)$ ⓑ $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=f(3)$

ⓒ $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=f(-2)$ ⓓ $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=f(-2)$

الحل:

الاتصال على فترة مغلقة يعني الاتصال من اليمين عند الطرف الأيسر

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=f(-2)$$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(8) الدالة f : $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على:

ⓐ $\left(-\infty\,,\,\dfrac{1}{2}\right]$ ⓑ $(5\,,\,\infty)$

ⓒ $\mathbb{R}$ ⓓ $(-5\,,\,5)$

الحل:

$x>5$ أو $x^2-25>0\Rightarrow x<-5$

المجال $(-\infty,-5)\cup(5,\infty)$ فهي متصلة على $(5\,,\,\infty)$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(11) الدالة g : $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & : x>1\\ 3x & : x\le 1\end{cases}$ متصلة على:

ⓐ $(-\infty\,,\,1]\,,\,(1\,,\,\infty)$ ⓑ $(-\infty\,,\,1)\,,\,[1\,,\,\infty)$

ⓒ $(-\infty\,,\,\infty)$ ⓓ $(-\infty\,,\,3]$

الحل:

$$\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2\neq g(1)\,.\,g(1)=3$$

$(1,\infty)\,.\,(-\infty,1]$ فهي متصلة على $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=3=g(1)$

الإجابة الصحيحة:

(a)

البند (1-2) – معدلات التغير وخطوط التماس

(1) ميل مماس منحنى الدالة f عند النقطة $(c\,,\,f(c))$ هو $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

الميل هو النهاية $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$

أما $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ فهو ميل القاطع

العبارة خاطئة

(3) ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x)=x^2$ عند $x=-2$ هو 4

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{(-2+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}(h-4)=-4$$

الميل -4 وليس 4

العبارة خاطئة

(4) ميل مماس منحنى الدالة $f(x) = |x| : f$ عند $x = -2$ هو 2

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

قرب $x = -2 : f(x) = -x$

فالميل $= -1$

العبارة خاطئة

(5) يكون مماس منحنى الدالة $f(x) = 4 : f$ عند النقطة $(-1\ ,\ 4)$ موازيًا لمحور السينات.

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

الدالة ثابتة فميل المماس $= 0$

المماس هو $y = 4$ يوازي محور السينات

العبارة صحيحة

(6) ميل مماس منحنى الدالة $f(x) = 9 - x^2 : f$ عند $x = 2$ هو:

ⓐ -5 ⓑ -4

ⓒ 4 ⓓ 5

الحل:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{9 - (2 + h)^2 - 5}{h} = \lim_{h \to 0} (-4 - h) = -4$$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(7) ليكن منحنى الدالة $f : f(x) = x^2 - 4x + 3$ فإن النقطة التي يكون مماس المنحنى عندها أفقيًا هي:

ⓐ $(3\,,\,0)$ ⓑ $(1\,,\,0)$

ⓒ $(2\,,\,-1)$ ⓓ $(-1\,,\,2)$

الحل:

ميل المماس عند x : $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

فالنقطة $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$ $(2\,,\,-1)$

الإجابة الصحيحة:
(c)

البند (2-2) – المشتقة

(1) إذا كانت $f : f(x) = 3x - 12$ فإن $f'(x) = 3$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

مشتقة الدالة الخطية $mx + b$ هي m

$f'(x) = 3$

العبارة صحيحة

(2) الدالة $f : f(x) = x|x|$ غير قابلة للاشتقاق $\forall x \in \mathbb{R}$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$f(x) = x^2$ عندما $x \geq 0$ و $f(x) = -x^2$ عندما $x < 0$

$f'_-(0) = f'_+(0) = 0$ فهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

العبارة خاطئة

(3) إن الدالة f : $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4x-5}$ غير قابلة للاشتقاق عندما x تساوي -1 فقط.

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$x^2-4x-5=(x-5)(x+1)=0\Rightarrow x=5\,,\,x=-1$$

f غير معرفة عند $x=-1$ و $x=5$ فهي غير قابلة للاشتقاق عندهما

العبارة خاطئة

(4) الدالة f : $f(x)=\begin{cases}2x-1 & :x<4\\ x^2-9 & :x>4\end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=4$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

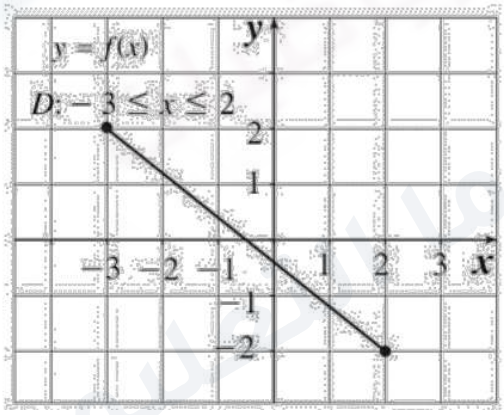
الحل:

$f(4)$ غير معرفة

فالدالة غير متصلة عند $x=4$ وبالتالي غير قابلة للاشتقاق

العبارة خاطئة

(5) إن الدالة f ذات الرسم البياني أدناه قابلة للاشتقاق على الفترة $[-3\,,\,2]$



ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

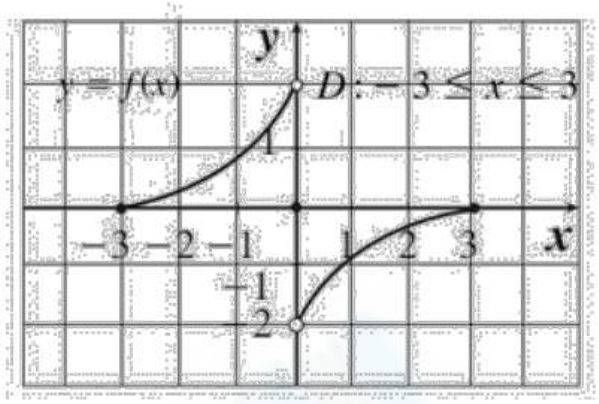
الحل:

المنحنى قطعة مستقيمة ميلها ثابت -1 على $(-3,2)$

وتوجد المشتقة من اليمين عند -3 ومن اليسار عند 2

العبارة صحيحة

(6) إن الدالة f ذات الرسم البياني أدناه هي متصلة على الفترة $[-3\ ,\ 3]$ ولكن غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$



ⓐ صحيحة

ⓑ خاطئة

الحل:

من الرسم $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -2$

فالدالة غير متصلة عند $x = 0$ وبالتالي ليست متصلة على $[-3, 3]$

العبارة خاطئة

(7) إن الدالة $f : f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ والسبب هو:

ⓐ ناب

ⓑ ركن

ⓒ مماس عمودي

ⓓ غير متصلة

الحل:

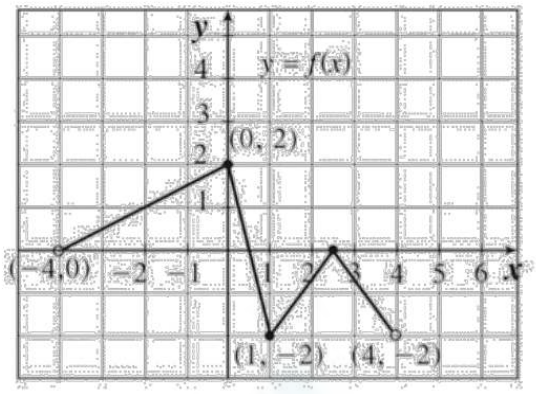
$\sqrt{x^2} = |x|$ فإن $f(x) = x + |x| + 2$

$f'_-(0) = 0 \neq f'_+(0) = 2$ والدالة متصلة، فعندها ركن

الإجابة الصحيحة:

(b)

(8) تكون الدالة f ذات الرسم البياني أدناه غير قابلة للاشتقاق عند كل ... $x =$



ⓐ $0\ ,\ 1\ ,\ 2\frac{1}{2}$

ⓑ $-2\ ,\ +2$

ⓒ $-4\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 4$

ⓓ $1\ ,\ 4$

الحل:

عند $x = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\frac{1}{2}$ تتغير ميول القطع المستقيمة

فتوجد أركان عند هذه النقاط

الإجابة الصحيحة:

(a)

(9) الدالة f القابلة للاشتقاق عند $x = 3$ فيما يلي هي:

ⓐ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

ⓑ $\sqrt{3-x}$

ⓒ $\begin{cases} 3x-1 & : x \le 3 \\ 1 & : x > 3 \end{cases}$

ⓓ $\sqrt[3]{x+2}$

الحل:

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}$: $\sqrt[3]{x+2}$ معرفة عند $x = 3$

(a) غير معرفة عند 3 ،

(b) مماس عمودي عند 3 ،

(c) غير متصلة عند 3

الإجابة الصحيحة:

(d)

(10) إذا كانت $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ فإن مجال f' هو:

ⓐ $\mathbb{R}-\{-2\,,\,2\}$ ⓑ $\mathbb{R}-\{-2\}$

ⓒ $\mathbb{R}-\{2\}$ ⓓ $\mathbb{R}-(-2\,,\,2)$

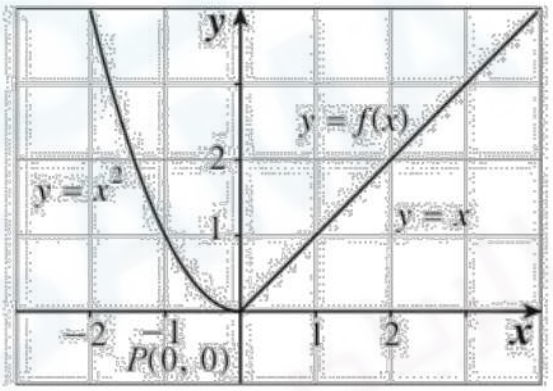
الحل:

مجال f هو $\mathbb{R}-\{-2\,,\,2\}$

$f'(x)=\dfrac{-1}{(x+2)^2}$ لكل x في مجال f ، فمجال f' هو $\mathbb{R}-\{-2,2\}$

الإجابة الصحيحة:
(a)

(11) في الشكل المقابل، عند النقطة P :



ⓐ المشتقة جهة اليسار موجبة. ⓑ المشتقة جهة اليمين سالبة.

ⓒ الدالة قابلة للاشتقاق. ⓓ ليس أيّ مما سبق.

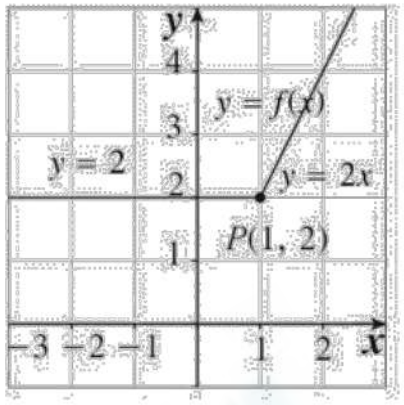
الحل:

$f'_-(0)=2(0)=0$ ليست موجبة ، $f'_+(0)=1$ ليست سالبة

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$ فالدالة غير قابلة للاشتقاق

الإجابة الصحيحة:
(d)

(12) في الشكل المقابل، عند النقطة P :



ⓐ $f'_+(1) = 1$

ⓑ $f'_-(1) = 0$

ⓒ $f'_-(1) = 2$

ⓓ f قابلة للاشتقاق

الحل:

يسار P : $y = 2$ فإن $f'_-(1) = 0$

يمين P : $y = 2x$ فإن $f'_+(1) = 2$

الإجابة الصحيحة:
(b)

البند (3-2) – قواعد الاشتقاق

(1) إذا كانت $y = -x^2 + 3$ فإن $\frac{dy}{dx} = -2$

ⓐ صحيحة

ⓑ خاطئة

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -2x$$

العبارة خاطئة

(2) إذا كانت $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{3} + x$ فإن $\frac{dy}{dx} = x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

ⓐ صحيحة ✓ ⓑ خاطئة

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{3} + 1 = x^2 + \frac{2}{3}x + 1$$

العبارة صحيحة

(3) إذا كانت $y = \frac{2x+5}{3x-2}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{12x+11}{(3x-2)^2}$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة ✓

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(3x-2) - 3(2x+5)}{(3x-2)^2} = \frac{-19}{(3x-2)^2}$$

العبارة خاطئة

(4) إذا كانت $y = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x^4}$

ⓐ صحيحة ✓ ⓑ خاطئة

الحل:

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^3} = 1 - x^{-3}$$
$$\frac{dy}{dx} = 3x^{-4} = \frac{3}{x^4}$$

العبارة صحيحة

(5) إذا كانت $y = 1 - x + x^2 - x^3$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

ⓐ $-1 + 2x - 3x^2$ ✓ ⓑ $2 - 3x$

ⓒ $-6x + 2$ ⓓ $1 - x$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -1 + 2x - 3x^2$$

الإجابة الصحيحة:

(a)

(6) إذا كانت $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ فإن $f'(x)$ تساوي:

(a) $20x + 60x^3$
(b) $15x^2 - 15x^4$
(c) $30x - 30x^4$
(d) $30x - 60x^3$

الحل:

$$f'(x) = 15x^2 - 15x^4$$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(7) إذا كانت $y = \frac{x^2 + 5x - 1}{x^2}$ فإن $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ تساوي:

(a) $\frac{-7}{2}$
(b) -3
(c) 3
(d) $\frac{7}{2}$

الحل:

$$y = 1 + 5x^{-1} - x^{-2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

عند $x = 1$: $-5 + 2 = -3$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(8) ميل مماس منحنى $y = x^2 + 5x$ عند $x = 3$ يساوي:

(a) 24
(b) $-\frac{5}{2}$
(c) 11
(d) 8

الحل:

$$y' = 2x + 5$$

$$y'(3) = 6 + 5 = 11$$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(9) ميل مماس منحنى الدالة $f : f(x) = \frac{2}{x}$ عند $x = -2$ هو:

(a) -1
(b) $-\frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{2}$
(d) 1

الحل:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$
$$f'(-2) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(10) ميل مماس منحنى الدالة $f : f(x) = \frac{-1}{x-1}$ عند $x = 0$ هو:

(a) -1
(b) 0
(c) 1
(d) 2

الحل:

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$
$$f'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(11) للدالة $f : f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته:

(a) $x = 0$
(b) $y = 0$
(c) $x = 1$
(d) $y = 1$

الحل:

$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ غير معرفة عند $x = 1$ والدالة متصلة عندها

$\lim_{x \to 1} |f'(x)| = \infty$ فالمماس الرأسي $x = 1$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(12) ميل الناظم لمنحنى الدالة $y = x^3 - 3x + 1$ عند النقطة $(2\ ,\ 3)$ هي:

ⓐ 9 ⓑ 3

ⓒ $-\frac{1}{3}$ ⓓ $\frac{-1}{9}$

الحل:

$$y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'(2) = 9$$

$$\text{ميل الناظم} = -\frac{1}{9}$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(13) النقاط على منحنى الدالة $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ التي يكون المماس عندها موازيًا لمحور السينات هي:

ⓐ $(-1\ ,\ 27)$ ⓑ $(2\ ,\ 0)$

ⓒ $(2, 0)\ ,\ (-1, 27)$ ⓓ $(-1, 27)\ ,\ (0, 20)$

الحل:

$$y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2\ ,\ x = -1$$

$$y(-1) = 27\ ،\ y(2) = 0$$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(14) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & : x \geq 1 \\ 4x - 1 & : x < 1 \end{cases}$ فإن مجال f' هو:

ⓐ $\{1\}$ ⓑ $\mathbb{R} - \{1\}$

ⓒ $[1\ ,\ \infty)$ ⓓ $\mathbb{R}$

الحل:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1) : 1 \text{ متصلة عند } f$$

$$\mathbb{R} \text{ فهي قابلة للاشتقاق على } f'_-(1) = 4\ ،\ f'_+(1) = 2(1) + 2 = 4$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(15) إن معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x) = 2x^2 - 13x + 2$: f عند $x = 3$ هي:

ⓐ $y = x - 16$ ⓑ $y = -x + 16$

ⓒ $y = -x - 13$ ⓓ $y = -x - 16$

الحل:

$$f'(x) = 4x - 13 \Rightarrow f'(3) = -1 \text{ ، } f(3) = -19$$

$$y + 19 = -(x - 3) \Rightarrow y = -x - 16$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(16) إذا كانت $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ عند النقطة P على منحنى الدالة f فإن:

ⓐ معادلة خط المماس: $y = 5x + 7$ ⓑ معادلة الخط العمودي (الناظم): $y = -\frac{1}{5}x + 7$

ⓒ معادلة الخط العمودي (الناظم): $y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$ ⓓ معادلة خط المماس: $y = 5x + 3$

الحل:

المماس: $y - 3 = 5(x - 2) \Rightarrow y = 5x - 7$

الناظم: $y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$

الإجابة الصحيحة:
(c)

البند (4-2) – مشتقات الدوال المثلثية

(1) إذا كانت $y = 1 + x - \cos x$ فإن $\frac{dy}{dx} = 1 + \sin x$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 1 - (-\sin x) = 1 + \sin x$$

العبارة صحيحة

(2) إذا كانت $y = \dfrac{4}{\cos x}$ فإن $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{\cos^2 x}$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$y = 4\sec x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4\sec x \tan x = \frac{4\sin x}{\cos^2 x}$$

العبارة خاطئة

(3) ميل المماس لمنحنى الدالة $y = \sin x + 3$ عند $x = \pi$ هو 1

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$y' = \cos x$$

$$y'(\pi) = \cos \pi = -1$$

العبارة خاطئة

(4) إن منحنى الدالة $y = \tan x$ ومنحنى الدالة $y = \cot x$ ليست لهما مماسات أفقية.

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$(\tan x)' = \sec^2 x \geq 1$ لا تساوي صفرًا

$(\cot x)' = -\csc^2 x \leq -1$ لا تساوي صفرًا

العبارة صحيحة

(5) إذا كانت $y = \dfrac{1}{x} + 5\sin x$ فإن $\dfrac{dy}{dx}$ تساوي:

ⓐ $-\dfrac{1}{x^2} - 5\cos x$ ⓑ $\dfrac{1}{x^2} + 5\cos x$

ⓒ $-\dfrac{1}{x^2} + 5\cos x$ ⓓ $\dfrac{1}{x^2} - 5\cos x$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} + 5\cos x$$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(6) إذا كانت $f(x) = 3x + x\tan x$ فإن $f'(0)$ يساوي:

(a) -3 (b) 0

(c) 1 (d) 3

الحل:

$$f'(x) = 3 + \tan x + x\sec^2 x$$

$$f'(0) = 3 + 0 + 0 = 3$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(7) إذا كانت $y = \dfrac{x}{1+\cos x}$ فإن $\dfrac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\dfrac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}$ (b) $\dfrac{1+\cos x - x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(c) $\dfrac{1+\cos x - x\sin x}{1+\cos^2 x}$ (d) $\dfrac{1+\cos x + x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\cos x)(1) - x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x + x\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(8) معادلة المستقيم العمودي على المماس لبيان الدالة $y = 2\cos x$ عند النقطة $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ هي:

(a) $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}$ (b) $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

(c) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}$ (d) $y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}$

الحل:

$$y' = -2\sin x \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$$

ميل العمودي $\dfrac{1}{2}$

$$y - 0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

الإجابة الصحيحة:
(a)

(9) إذا كانت $y = \dfrac{1}{\sin x}$ فإن y' تساوي:

ⓐ $\cot x \cdot \csc x$ ⓑ $\cos x$

ⓒ $-\cot x \cdot \csc x$ ⓓ $-\cos x$

الحل:

$$y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x \cot x$$

الإجابة الصحيحة:
(c)

البند (5-2) – قاعدة السلسلة

(1) إذا كانت $y = \cos(\sqrt{3}x)$ فإن $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\sqrt{3}x) \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)$$

الإشارة خاطئة

العبارة خاطئة

(2) إذا كانت $y = 5\cot\left(\dfrac{2}{x}\right)$ فإن $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10}{x^2}\csc^2\left(\dfrac{2}{x}\right)$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -5\csc^2\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) = \frac{10}{x^2}\csc^2\left(\frac{2}{x}\right)$$

العبارة صحيحة

(3) إذا كانت $y = (x + \sqrt{x})^{-2}$ فإن $\dfrac{dy}{dx} = -2(x + \sqrt{x})^{-1}\left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

ⓐ صحيحة

ⓑ خاطئة

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -2(x + \sqrt{x})^{-3}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

الأس الصحيح -3 وليس -1

العبارة خاطئة

(4) إذا كانت $s = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3t\right)$ فإن $\dfrac{ds}{dt} = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 3t\right)$

ⓐ صحيحة

ⓑ خاطئة

الحل:

$$\frac{ds}{dt} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right) \cdot (-3) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right)$$

العبارة صحيحة

(5) إذا كانت $y = \sin^{-5} x - \cos^3 x$ فإن $\dfrac{dy}{dx}$ تساوي

ⓐ $5\sin^{-6} x\cos x - 3\cos^2 x\sin x$

ⓑ $5\sin^{-6} x\cos x + 3\cos^2 x\sin x$

ⓒ $-5\sin^{-6} x\cos x - 3\cos^2 x\sin x$

ⓓ $-5\sin^{-6} x\cos x + 3\cos^2 x\sin x$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -5\sin^{-6} x\cos x - 3\cos^2 x(-\sin x)\\ &= -5\sin^{-6} x\cos x + 3\cos^2 x\sin x\end{aligned}$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(6) إذا كانت $y = \dfrac{3}{\sqrt{2x+1}}$ فإن $\dfrac{dy}{dx}$ تساوي

ⓐ $3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$
ⓑ $-3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$
ⓒ $-3(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$
ⓓ $3(2x+1)^{-1}$

الحل:

$$y = 3(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(-\frac{1}{2}\right)(2x+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = -3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(7) إذا كانت $s = \dfrac{4}{3\pi}\sin 3t + \dfrac{4}{5\pi}\cos 5t$ فإن $\dfrac{ds}{dt}$ تساوي

ⓐ $\dfrac{4}{\pi}\sin 3t - \dfrac{4}{\pi}\cos 5t$
ⓑ $\dfrac{4}{\pi}\cos 3t + \dfrac{4}{\pi}\sin 5t$
ⓒ $\dfrac{4}{\pi}\cos 3t - \dfrac{4}{\pi}\sin 3t$
ⓓ $\dfrac{4}{\pi}\cos 3t - \dfrac{4}{\pi}\sin 5t$

الحل:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{4}{3\pi}\cdot 3\cos 3t + \frac{4}{5\pi}\cdot(-5\sin 5t)$$
$$= \frac{4}{\pi}\cos 3t - \frac{4}{\pi}\sin 5t$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(8) إذا كانت $r = \tan(2-\theta)$ فإن $\dfrac{dr}{d\theta}$ تساوي

ⓐ $\sec^2(2-\theta)$
ⓑ $-\sec^2(2-\theta)$
ⓒ $\sec^2(\theta+2)$
ⓓ $\sec(2-\theta)$

الحل:

$$\frac{dr}{d\theta} = \sec^2(2-\theta)\cdot(-1) = -\sec^2(2-\theta)$$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(9) إذا كانت $f(u)=\cot\frac{\pi u}{10}$ و $u=g(x)=5\sqrt{x}$ فإن $(f\circ g)'(x)$ عند $x=+1$ تساوي

ⓐ $\frac{3\pi}{4}$ ⓑ $\frac{\pi}{4}$

ⓒ $-\frac{\pi}{4}$ ⓓ $-\frac{3\pi}{4}$

الحل:

$$g'(x)=\frac{5}{2\sqrt{x}}\Rightarrow g'(1)=\frac{5}{2}\,,\ g(1)=5$$
$$f'(u)=-\frac{\pi}{10}\csc^2\frac{\pi u}{10}\Rightarrow f'(5)=-\frac{\pi}{10}$$
$$(f\circ g)'(1)=f'(5)\cdot g'(1)=-\frac{\pi}{10}\cdot\frac{5}{2}=-\frac{\pi}{4}$$

الإجابة الصحيحة:
(c)

البند (2-6) – المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

(1) إذا كان: $y=\frac{-x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$ فإن: $\frac{d^2y}{dx^2}=-2x$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=-x^2+x+1$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2x+1\neq-2x$$

العبارة خاطئة

(2) إذا كان: $y=\frac{-3x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+4x$ فإن: $\frac{d^3y}{dx^3}=-18x$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$y''=-9x^2-3\,,\ y'=-3x^3-3x+4$$
$$y'''=-18x$$

العبارة صحيحة

(3) معادلة المماس لمنحنى: $x^2 - y^2 - x^2y = 7$ عند النقطة $(2, -1)$ هي: $y = 4x - 9$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

باشتقاق الطرفين: $2x - 2y\,y' - 2xy - x^2y' = 0$

عند $(2, -1)$: $4 + 2y' + 4 - 4y' = 0 \Rightarrow y' = 4$

$$y + 1 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 9$$

العبارة صحيحة

(4) إذا كانت: $f(x) = (1 + 6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن: $f''(x)$ تساوي

ⓐ $\frac{8}{27}(1 + 6x)^{-\frac{4}{3}}$ ⓑ $8(1 + 6x)^{-\frac{4}{3}}$

ⓒ $-8(1 + 6x)^{-\frac{4}{3}}$ ⓓ $-64(1 + 6x)^{-\frac{4}{3}}$

الحل:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(1 + 6x)^{-\frac{1}{3}} \cdot 6 = 4(1 + 6x)^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = 4\left(-\frac{1}{3}\right)(1 + 6x)^{-\frac{4}{3}} \cdot 6 = -8(1 + 6x)^{-\frac{4}{3}}$$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(5) إذا كانت: $f(x) = \frac{2x + 1}{3x + 2}$ فإن: $f^{(4)}(x)$ تساوي

ⓐ $24(3x + 2)^{-5}$ ⓑ $-24(3x + 2)^{-5}$

ⓒ $648(3x + 2)^{-5}$ ⓓ $-648(3x + 2)^{-5}$

الحل:

$$f'(x) = \frac{2(3x + 2) - 3(2x + 1)}{(3x + 2)^2} = (3x + 2)^{-2}$$

$$f''' = 54(3x + 2)^{-4} \text{ ، } f'' = -6(3x + 2)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = -648(3x + 2)^{-5}$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(6) ميل الخطّ العمودي على المماس (الناظم) عند النقطة $A(3,2)$ على منحنى: $x^2 - y^2 - 2xy = -7$ هو

ⓐ -5 ⓑ $-\frac{1}{5}$

ⓒ $\frac{1}{5}$ ⓓ 5

الحل:

$$2x - 2yy' - 2y - 2xy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x-y}{x+y}$$

عند $A(3,2)$: ميل المماس $= \frac{1}{5}$

ميل الناظم $= -5$

الإجابة الصحيحة: (a)

(7) ميل المماس عند النقطة $A(1,1)$ على منحنى: $x^2 - 3y^2 + 2xy = 0$ هي

ⓐ -1 ⓑ 0

ⓒ 1 ⓓ 2

الحل:

$$2x - 6yy' + 2y + 2xy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x+2y}{6y-2x}$$

عند $A(1,1)$: $y' = \frac{4}{4} = 1$

الإجابة الصحيحة: (c)

البند (1-3) – القيم القصوى (العظمى / الصغرى) للدوال

(1) إذا كانت f دالة متصلة على (a,b) فإن f لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

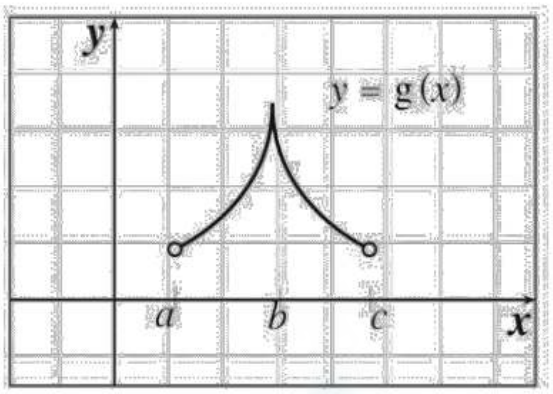
الحل:

نظرية القيم القصوى تشترط فترة مغلقة $[a,b]$

على الفترة المفتوحة قد لا توجد قيم قصوى مطلقة

العبارة خاطئة

(2) في الشكل التالي، للدالة g قيمة قصوى محلية عند $x = c$.



ⓐ صحيحة

ⓑ خاطئة

الحل:

c غير منتمٍ لمجال g (دائرة مفرغة)

فلا توجد قيمة قصوى عند $x = c$

العبارة خاطئة

(3) الدالة $g : g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ لها قيمة عظمى في مجالها.

ⓐ صحيحة

ⓑ خاطئة

الحل:

المجال $[-3, 3]$ و $g(x) \le \sqrt{9} = 3$

القيمة العظمى $g(0) = 3$

العبارة صحيحة

(4) الدالة $f : f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ لها قيمة عظمى في مجالها.

ⓐ صحيحة

ⓑ خاطئة

الحل:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 1} = \infty$$

فالدالة غير محدودة من أعلى وليس لها قيمة عظمى

العبارة خاطئة

(7) عدد النقاط الحرجة للدالة $y = 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة $(0, 2)$ هو

(a) 3
(b) 2
(c) 1
(d) 0

الحل:

$$y' = 9x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$x = 1 \in (0, 2)$ فقط ، إذن نقطة حرجة واحدة

الإجابة الصحيحة:
(c)

(9) إذا كانت $f(x) = ax^2 - 25x$ لها قيمة قصوى محلية عند $x = \frac{5}{2}$ ، فإن a تساوي

(a) 2
(b) 3
(c) 4
(d) 5

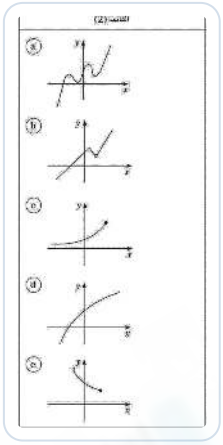
الحل:

$$f'(x) = 2ax - 25$$

$$f'\left(\frac{5}{2}\right) = 5a - 25 = 0 \Rightarrow a = 5$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(10) اختر من القائمة (2) ما يناسب: لها قيمة عظمى مطلقة.



ⓐ الشكل **(a)**

ⓑ الشكل **(b)**

ⓒ الشكل **(c)**

ⓓ الشكل **(d)**

ⓔ الشكل (e)

الحل:

الدالة في الشكل

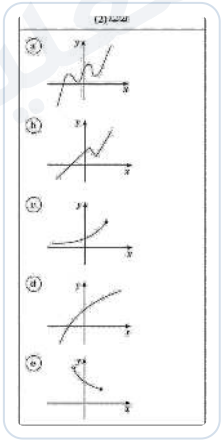
(c) تزايدية وتنتهي بنقطة مغلقة

فلها قيمة عظمى مطلقة عند نقطة النهاية اليمنى

الإجابة الصحيحة:

(c)

(11) اختر من القائمة (2) ما يناسب: لها أكثر من قيمة قصوى محلية.



ⓐ الشكل **(a)**

ⓑ الشكل **(b)**

ⓒ الشكل **(c)**

ⓓ الشكل **(d)**

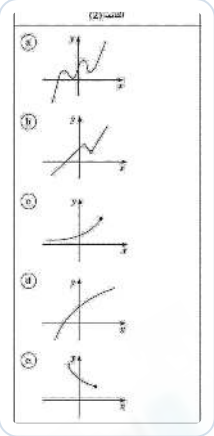
ⓔ الشكل (e)

الحل:

الشكل **(a)** له قيمتان عظميان محليتان وقيمة صغرى محلية

الإجابة الصحيحة:
(a)

(12) اختر من القائمة (2) ما يناسب: ليس لها قيم قصوى محلية أو مطلقة



ⓐ الشكل **(a)**

ⓑ الشكل **(b)**

ⓒ الشكل **(c)**

ⓓ الشكل **(d)**

ⓔ الشكل (e)

الحل:

الشكل

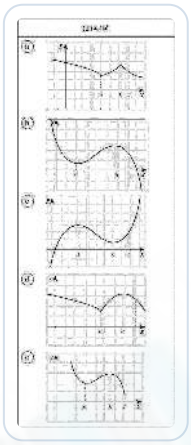
(d) تزايدي على مجاله ولا نهاية مغلقة له

فليس له قيم قصوى محلية أو مطلقة

الإجابة الصحيحة:

(d)

(13) اختر لكل جدول من القائمة (1) الرسم البياني الذي يناسبه في القائمة (2): $f'(a)=0$ ، $f'(b)=0$ ، $f'(c)$ أكبر من الصفر



ⓐ الشكل (a)

ⓑ الشكل (b)

ⓒ الشكل (c)

ⓓ الشكل (d)

ⓔ الشكل (e)

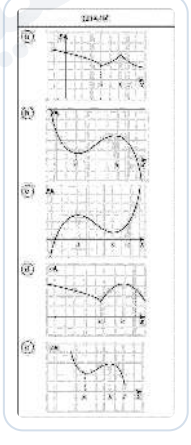
الحل:

مماس أفقي عند a (عظمى) و b (صغرى)

وبعد b الدالة متزايدة فيكون $f'(c)>0$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(14) اختر لكل جدول من القائمة (1) الرسم البياني الذي يناسبه في القائمة (2): $f'(a)=0$ ، $f'(b)=0$ ، $f'(c)$ أصغر من الصفر



ⓐ الشكل **(a)**

ⓑ الشكل **(b)**

ⓒ الشكل **(c)**

ⓓ الشكل **(d)**

ⓔ الشكل (e)

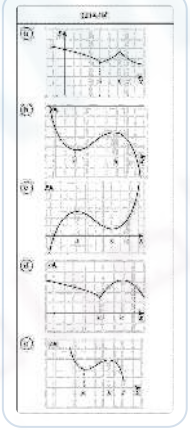
الحل:

مماس أفقي عند a (صغرى) و b (عظمى)

وبعد b الدالة متناقصة فيكون $f'(c) < 0$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(15) اختر لكل جدول من القائمة (1) الرسم البياني الذي يناسبه في القائمة (2): $f'(a)$ غير موجودة ، $f'(b) = 0$ ، $f'(c)$ أصغر من الصفر



ⓐ الشكل **(a)**

ⓑ الشكل **(b)**

ⓒ الشكل **(c)**

ⓓ الشكل **(d)**

ⓔ الشكل (e)

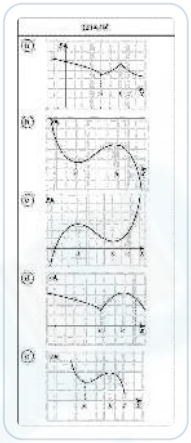
الحل:

نقطة ركنية (رأس حاد) عند a ومماس أفقي عند b

وبعد b الدالة متناقصة فيكون $f'(c) < 0$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(16) اختر لكل جدول من القائمة (1) الرسم البياني الذي يناسبه في القائمة (2): $f'(a)$ غير موجودة ، $f'(b)$ غير موجودة ، $f'(c)$ أصغر من الصفر



ⓐ الشكل **(a)**

ⓑ الشكل **(b)**

ⓒ الشكل **(c)**

ⓓ الشكل **(d)**

ⓔ الشكل (e)

الحل:

نقطتان ركنيتان عند a و b

وبعد b الدالة متناقصة فيكون $f'(c) < 0$

الإجابة الصحيحة:
(a)

البند (2-3) – تزايد وتناقص الدوال

(1) الدالة $g : g(x) = x^2 - x - 3$ متزايدة على $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$x < \frac{1}{2} \text{ لكل } g'(x) = 2x - 1 < 0$$

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \text{ فالدالة متناقصة على}$$

العبارة خاطئة

(2) الدالة $f : f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ متناقصة على كل من الفترة $(-\infty, -\sqrt{5})$ والفترة $(\sqrt{5}, \infty)$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$f'(x) = 4x^3 - 20x = 4x(x^2 - 5)$$

$$\text{على } (-\infty, -\sqrt{5}) : f' < 0 \text{ متناقصة ، على } (\sqrt{5}, \infty) : f' > 0 \text{ متزايدة}$$

العبارة خاطئة

(3) الدالة $f : f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[0, 1]$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$f \text{ متصلة على } [0, 1]$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \text{ موجودة على } (0, 1) \text{ فهي قابلة للاشتقاق عليها}$$

العبارة صحيحة

(4) الدالة $f : f(x) = x^3 + 1$ مطّردة على $\mathbb{R}$.

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \text{ ولا تنعدم إلا عند } x = 0$$

فالدالة متزايدة على $\mathbb{R}$ أي مطّردة

العبارة صحيحة

(5) تكون الدالة k : $k(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$

ⓐ متزايدة على كل فترة من مجال تعريفها.

ⓑ متناقصة على كل فترة من مجال تعريفها.

ⓒ متناقصة على الفترة $(-\infty,-2)$ والفترة $(-2,2)$ ومتزايدة على الفترة $(2,\infty)$

ⓓ ليس أيٌّ مما سبق.

الحل:

$$k'(x)=\frac{(x^2-4)-2x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2}<0$$

فالدالة متناقصة على كل فترة من مجال تعريفها

الإجابة الصحيحة:
(b)

(7) إذا كانت f' : $f'(x)=-x^2$ ، فإنّ الدالة f

ⓐ متزايدة على مجال تعريفها.

ⓑ متناقصة على مجال تعريفها.

ⓒ متزايدة على الفترة $(-\infty,0)$ فقط

ⓓ متناقصة على الفترة $(0,\infty)$ فقط

الحل:

$f'(x)=-x^2\le 0$ ولا تنعدم إلا عند $x=0$

فالدالة متناقصة على مجال تعريفها

الإجابة الصحيحة:
(b)

(8) إذا كانت f' : $f'(x)=-3x$ ، فإنّ الدالة f

ⓐ متزايدة على الفترة $(0,\infty)$

ⓑ متناقصة على الفترة $(-\infty,0]$

ⓒ متزايدة على مجال تعريفها.

ⓓ متزايدة على الفترة $(-\infty,0)$ ومتناقصة على الفترة $(0,\infty)$

الحل:

$x<0\Rightarrow f'(x)>0$ متزايدة

$x>0\Rightarrow f'(x)<0$ متناقصة

الإجابة الصحيحة:
(d)

البند (3-3) – ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

(1) الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 5$ على الفترة $(0, 3)$ مقعّرة لأسفل.

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$y'' = 6x - 6$$

$y'' < 0$ على $(0, 1)$ و $y'' > 0$ على $(1, 3)$ فليست مقعرة لأسفل على كامل الفترة

العبارة خاطئة

(3) إذا كانت $f''(c) = 0$ ، فإنّ لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c, f(c))$.

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

مثال مضاد: $f(x) = x^4$ ، $f''(0) = 0$

لكن $f'' \geq 0$ حول الصفر فلا يتغير التقعر ولا انعطاف

العبارة خاطئة

(4) إذا كان لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c, f(c))$ فإن $f''(c) = 0$.

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

قد تكون $f''(c)$ غير موجودة

مثال: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ لها انعطاف عند $x = 0$ و $f''(0)$ غير موجودة

العبارة خاطئة

(5) يمكن أن تكون النقطة الحرجة نقطة انعطاف.

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

مثال: $f(x) = x^3$ ، $f'(0) = 0$ فالصفر نقطة حرجة

و $f''(x) = 6x$ تغيّر إشارتها عند 0 فهي نقطة انعطاف

العبارة صحيحة

(6) منحنى الدالة $y = -3x^8$ مقعّرة للأعلى.

ⓐ صحيحة

ⓑ خاطئة

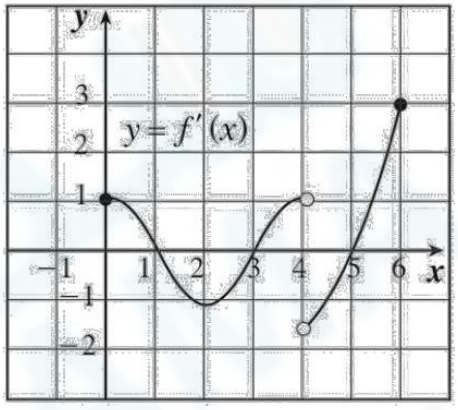
الحل:

$$y'' = -168x^6 \leq 0$$

فالمنحنى مقعر للأسفل

العبارة خاطئة

(7) إذا كان الشكل المقابل يمثل بيان دالة المشتقة (f') فإن الدالة f تكون



ⓐ متزايدة على كل من $(1,3)$, $(4,5)$.

ⓑ متناقصة على كل من $(1,3)$, $(4,5)$.

ⓒ لها قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ فقط.

ⓓ لها نقطة انعطاف عند كل من $x = 2$, $x = 4$.

الحل:

$f'(x) < 0$ على $(1,3)$ وعلى $(4,5)$ (البيان تحت محور السينات)

فالدالة f متناقصة على كل منهما

الإجابة الصحيحة:
(b)

(9) أي من منحنيات الدوال التالية يكون مقعرًا لأسفل في $(-1, 1)$؟

ⓐ $f(x) = x^2$
ⓑ $f(x) = x|x|$
ⓒ $f(x) = -x^3$
ⓓ $f(x) = -x^2$

الحل:

$$f(x) = -x^2 \Rightarrow f''(x) = -2 < 0 \text{ لكل } x$$

بينما x^2 مقعرة لأعلى و $x|x|$ ، $-x^3$ يتغير تقعرهما عند 0

الإجابة الصحيحة:
(d)

(10) إذا كانت f دالة كثيرة حدود، $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن

ⓐ $f''(c) = 0$
ⓑ $f'(c) = 0$
ⓒ $f(c) = 0$
ⓓ $f''(c)$ غير موجودة

الحل:

كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$

فعند نقطة الانعطاف $f''(c) = 0$

الإجابة الصحيحة:
(a)

(11) أي من الدوال التالية ليس لها نقطة انعطاف؟

ⓐ $f(x) = x^3 + 5x$
ⓑ $f(x) = 4x^2 - 2x^4$
ⓒ $f(x) = x^3$
ⓓ $f(x) = (x-2)^4$

الحل:

$$f(x) = (x-2)^4 \Rightarrow f''(x) = 12(x-2)^2 \geq 0$$

لا تتغير إشارة f'' فلا يوجد انعطاف

الإجابة الصحيحة:
(d)

(12) للدالة f : $f(x)=(x^2-3)^2$ نقاط انعطاف عددها

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

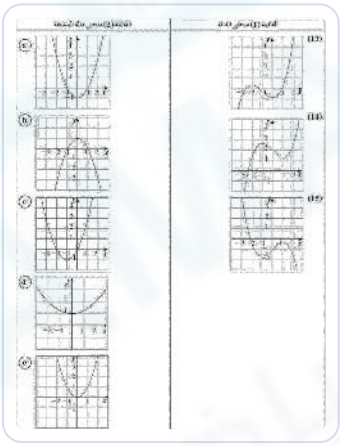
الحل:

$$f(x)=x^4-6x^2+9 \Rightarrow f''(x)=12x^2-12$$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$ وتتغير الإشارة عند كل منهما ، إذن نقطتان

الإجابة الصحيحة:
(b)

(13) اختر من القائمة (2) منحنى دالة المشتقة المناسب لمنحنى الدالة في القائمة (1): المنحنى (13)



a) الشكل **(a)**

b) الشكل **(b)**

c) الشكل **(c)**

d) الشكل **(d)**

e) الشكل (e)

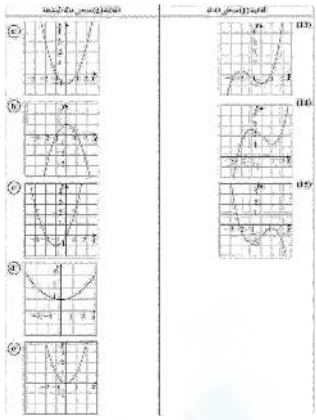
الحل:

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=-2$ وصغرى محلية عند $x=0$

إذن $f'(-2)=f'(0)=0$ و $f'<0$ على $(-2,0)$ ، $f'>0$ خارجها

الإجابة الصحيحة:
(c)

(14) اختر من القائمة (2) منحنى دالة المشتقة المناسب لمنحنى الدالة في القائمة (1): المنحنى (14)



ⓐ الشكل **(a)**

ⓑ الشكل **(b)**

ⓒ الشكل **(c)**

ⓓ الشكل **(d)**

ⓔ الشكل (e)

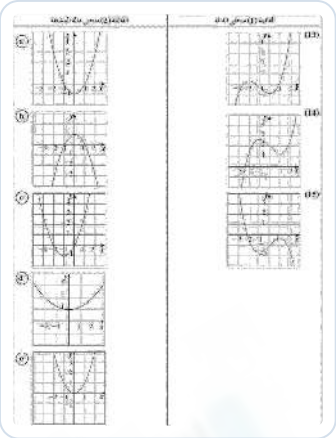
الحل:

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x \approx -1$ وصغرى محلية عند $x \approx 1$

إذن f' أصفارها ± 1 تقريبًا ، سالبة بينهما وموجبة خارجهما

الإجابة الصحيحة:
(a)

(15) اختر من القائمة (2) منحنى دالة المشتقة المناسب لمنحنى الدالة في القائمة (1): المنحنى (15)



ⓐ الشكل **(a)**

ⓑ الشكل **(b)**

ⓒ الشكل **(c)**

ⓓ الشكل **(d)**

ⓔ الشكل (e)

الحل:

الدالة متناقصة ثم متزايدة على $(-1,1)$ ثم متناقصة

إذن f' أصفارها ± 1 ، موجبة بينهما وسالبة خارجهما (قطع مكافئ مفتوح لأسفل)

الإجابة الصحيحة:
(b)

البند (3-4) – رسم بيان دوال كثيرات الحدود

(1) لتكن $f: f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$ و (C) منحناها. يمر المنحنى (C) بنقطة الأصل.

ⓐ صحيحة

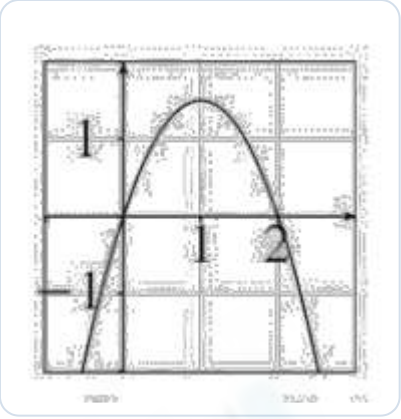
ⓑ خاطئة

الحل:

$f(0) = 2 \neq 0$ إذن لا يمر بنقطة الأصل

العبارة خاطئة

(2) لتكن $f: f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$ و (C) منحناها. الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة f'.



ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x = -\frac{3}{2}x(x-2)$$

قطع مكافئ مفتوح لأسفل يقطع محور السينات عند 0 و 2 ورأسه $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

العبارة صحيحة

(3) لتكن $f: f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$ و (C) منحناها. المماس عند النقطة التي إحداثيها السيني يساوي 2 موازٍ لمحور السينات.

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$f'(2) = -\frac{3}{2}(4) + 3(2) = 0$ إذن المماس أفقي

العبارة صحيحة

(4) لتكن $f: f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$ و (C) منحناها. 4 هي قيمة عظمى محلية.

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ أو } x = 2 \text{ ، } f(2) = 4$$

$f''(x) = -3x + 3$ ، $f''(2) = -3 < 0$ إذن $f(2) = 4$ قيمة عظمى محلية

العبارة صحيحة

(5) لتكن $f: f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$ و (C) منحناها. المنحنى (C) مقعر لأعلى على الفترة $(-\infty, 1)$.

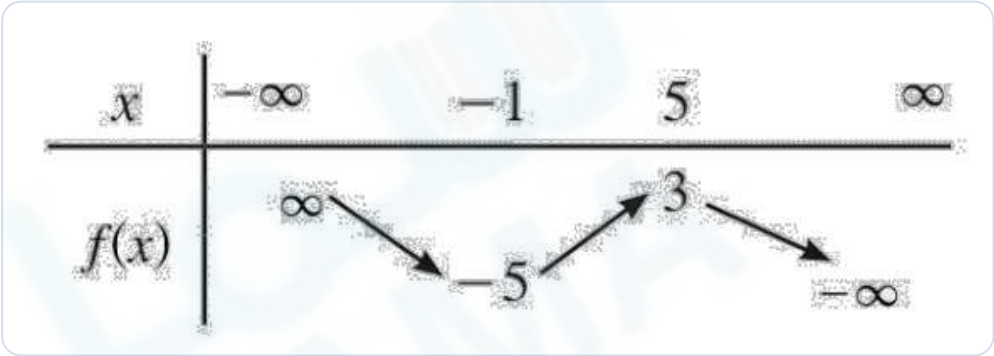
ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$f''(x) = -3x + 3 > 0$ عندما $x < 1$

العبارة صحيحة

(6) في التمارين (8-6) الدالة f دالة كثيرة حدود جدول تغيرها (المرفق). العبارة الصحيحة فيما يلي هي:



ⓐ $f(-2) > f(0)$ ⓑ $f(0) < f(6)$

ⓒ $f(-9) > f(-2)$ ⓓ $f(-1) > f(8)$

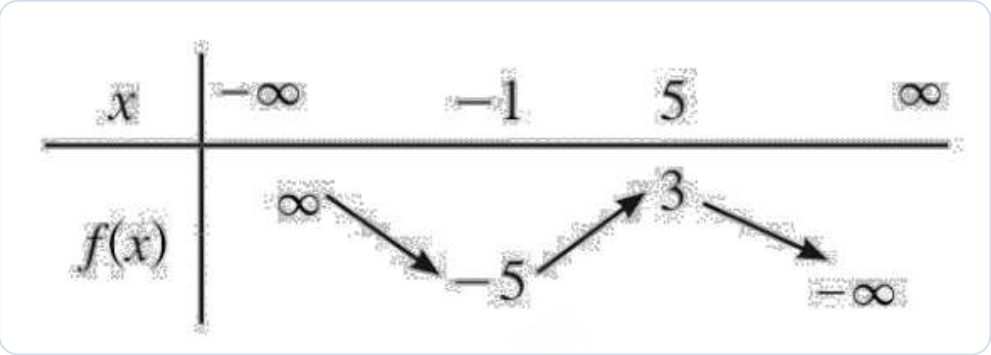
الحل:

f متناقصة على $(-\infty, -1)$ و $-9 < -2$

إذن $f(-9) > f(-2)$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(7) في التمارين (8-6) الدالة f دالة كثيرة حدود جدول تغيرها (المرفق). للمعادلة $f(x) = 0$:



ⓐ حل واحد
ⓑ حلّان
ⓒ ثلاثة حلول
ⓓ لا حل لها

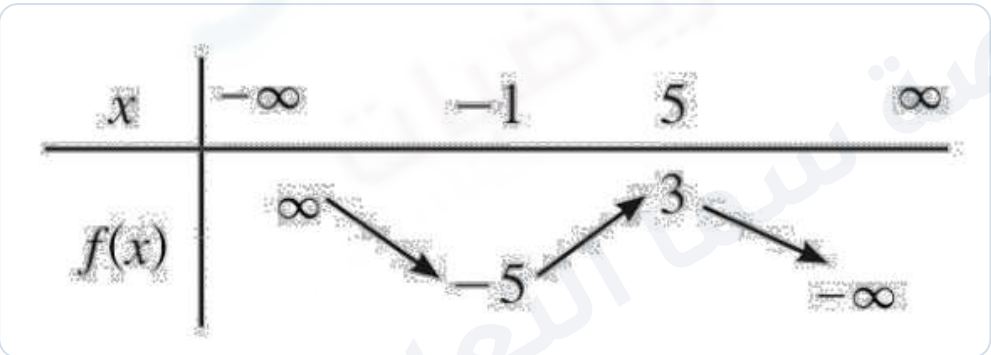
الحل:

f تتغير من ∞ إلى -5 ثم إلى 3 ثم إلى $-\infty$

إذن تقطع محور السينات ثلاث مرات

الإجابة الصحيحة:
(c)

(8) في التمارين (8-6) الدالة f دالة كثيرة حدود جدول تغيرها (المرفق). جدول تغير الدالة f يوضح أن:



ⓐ -5 قيمة صغرى مطلقة.
ⓑ 3 قيمة عظمى مطلقة.
ⓒ -5 قيمة صغرى محلية، 3 قيمة عظمى محلية.
ⓓ -1 قيمة صغرى محلية، 5 قيمة عظمى محلية.

الحل:

$f(-1) = -5$ قيمة صغرى محلية (تناقص ثم تزايد)

$f(5) = 3$ قيمة عظمى محلية (تزايد ثم تناقص)

الإجابة الصحيحة:
(c)

(9) لتكن الدالة $f:\ f(x)=-x^2+7x+1$

ⓐ لمنحنى f قيمة عظمى محلية.
ⓑ لمنحنى f نقطة انعطاف.
ⓒ منحنى f مقعر لأعلى.
ⓓ لمنحنى f قيمة صغرى محلية.

الحل:

$$f'(x)=-2x+7=0\Rightarrow x=\frac{7}{2}$$

$f''(x)=-2<0$ إذن قيمة عظمى محلية والمنحنى مقعر لأسفل

الإجابة الصحيحة:
(a)

(10) لتكن $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ ,\ a\neq 0$. $f:$ لمنحنى f دائمًا:

ⓐ قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية.
ⓑ نقطة انعطاف.
ⓒ تقعّر لأسفل ثم تقعّر لأعلى.
ⓓ لا تمر بنقطة الأصل.

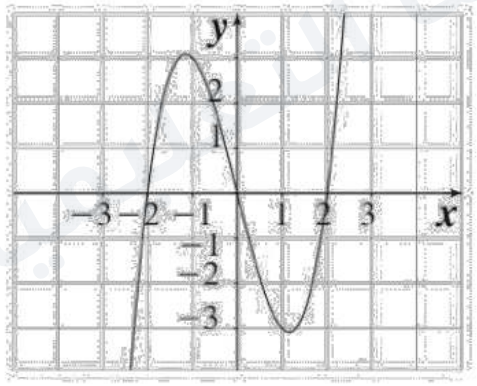
الحل:

$f''(x)=6ax+2b$ تنعدم عند $x=-\frac{b}{3a}$ وتغير إشارتها

إذن لمنحنى الدالة التكعيبية دائمًا نقطة انعطاف

الإجابة الصحيحة:
(b)

(12) الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f. اختر من القائمة (2) ما يناسب: $f'(x)=0$



ⓐ $(-\infty, 0)$
ⓑ $(-\infty, -1)\ ,\ (1, \infty)$
ⓒ $-2\ ,\ 0\ ,\ 2$
ⓓ $-1\ ,\ 1$
ⓔ $(0, \infty)$

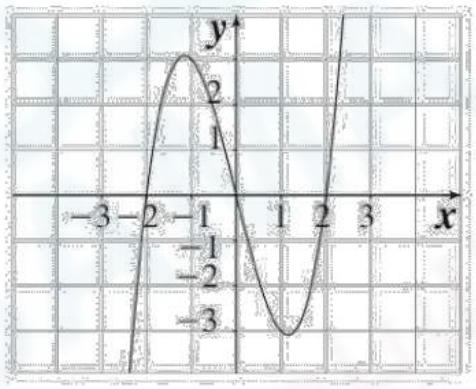
الحل:

من الرسم: للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -1$ وصغرى محلية عند $x = 1$

إذن $f'(x) = 0$ عند $x = -1\ ,\ 1$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(13) الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f. اختر من القائمة (2) ما يناسب: $f'(x) > 0$ في .....



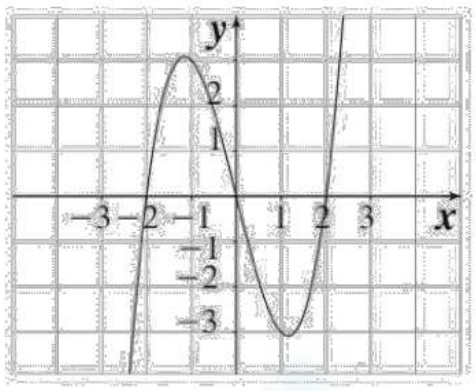
ⓐ $(-\infty, 0)$
ⓑ $(-\infty, -1)\ ,\ (1, \infty)$
ⓒ $-2\ ,\ 0\ ,\ 2$
ⓓ $-1\ ,\ 1$
ⓔ $(0, \infty)$

الحل:

الدالة متزايدة على $(-\infty, -1)$ وعلى $(1, \infty)$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(14) الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f. اختر من القائمة (2) ما يناسب: $f''(x) < 0$ في .....



ⓐ $(-\infty, 0)$

ⓑ $(-\infty, -1)\ ,\ (1, \infty)$

ⓒ $-2\ ,\ 0\ ,\ 2$

ⓓ $-1\ ,\ 1$

ⓔ $(0, \infty)$

الحل:

المنحنى مقعر لأسفل على $(-\infty, 0)$ ونقطة الانعطاف $(0, 0)$

الإجابة الصحيحة:
(a)

البند (5-3) – تطبيقات على القيم القصوى

(1) أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته $16\ \text{cm}^2$ هو $16\ \text{cm}$

ⓐ صحيحة

ⓑ خاطئة

الحل:

$$P' = 2\left(1 - \frac{16}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow x = 4\ ,\ P = 2\left(x + \frac{16}{x}\right)$$

$P = 16\ \text{cm}$ ، 4 المستطيل مربع طول ضلعه

العبارة صحيحة

(2) أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويان على القطع المكافئ الذي معادلته $y = 12 - x^2$ ، هي 24 units^2

ⓐ صحيحة

ⓑ خاطئة

الحل:

$$A' = 24 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ، } A = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$$

$$A = 4 \times 8 = 32 \text{ units}^2 \neq 24 \text{ أكبر مساحة}$$

العبارة خاطئة

(3) مستطيل مساحته 36 cm^2 فإن أبعاده التي تعطي أصغر محيط هي:

ⓐ $9 \text{ cm} , 4 \text{ cm}$

ⓑ $12 \text{ cm} , 3 \text{ cm}$

ⓒ $6 \text{ cm} , 6 \text{ cm}$

ⓓ $18 \text{ cm} , 2 \text{ cm}$

الحل:

$$P' = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ ، } P = 2\left(x + \frac{36}{x}\right)$$

$$\text{إذن البعدان } 6 \text{ cm} , 6 \text{ cm}$$

الإجابة الصحيحة:
(c)

(4) أبعاد أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويان على القطع المكافئ $y = 4 - x^2$ هي:

ⓐ $8 , \frac{4\sqrt{3}}{3}$

ⓑ $\frac{8}{3} , \sqrt{3}$

ⓒ $4 , 4$

ⓓ $\frac{4\sqrt{3}}{3} , \frac{8}{3}$

الحل:

$$A' = 8 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ، } A = 2x(4 - x^2)$$

$$\text{القاعدة } 2x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ ، الارتفاع } 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(5) أردت التخطيط لصنع صندوق على هيئة شبه مكعب بدون غطاء من قطعة ورق مقوى مستطيلة أبعادها 16 cm , 10 cm ، وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس، ثم طيّ الأجزاء البارزة. أبعاد الصندوق الذي له أكبر حجم يمكن صنعه على أساسها هي:

ⓐ $2\text{ cm}, 6\text{ cm}, 12\text{ cm}$ ⓑ $3\text{ cm}, 4\text{ cm}, 12\text{ cm}$

ⓒ $2\text{ cm}, 8\text{ cm}, 12\text{ cm}$ ⓓ $3\text{ cm}, 6\text{ cm}, 8\text{ cm}$

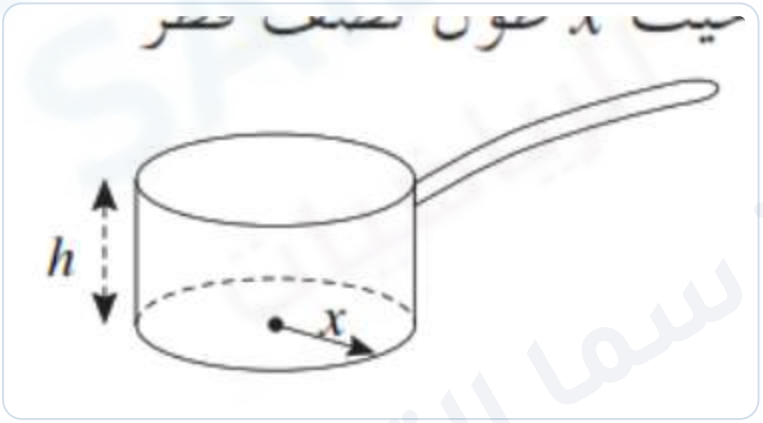
الحل:

$$V = x(10-2x)(16-2x) \Rightarrow V' = 12x^2 - 104x + 160 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ، } x = \frac{20}{3} \text{ (مرفوض)}$$

الأبعاد: $2\ ,\ 6\ ,\ 12$

الإجابة الصحيحة:
(a)

(6) تعطى المساحة الكلية لوعاء أسطواني الشكل بالمعادلة $s = \pi x^2 + \frac{2v}{x}$ ، حيث x طول نصف قطر قاعدته و V حجمه. (تذكر: $V = \pi x^2 h$). إذا كان حجم الوعاء ثابتًا فإن القيمة الدنيا لمساحته هي عندما:



ⓐ $x > h$ ⓑ $x = h$

ⓒ $x < h$ ⓓ ليس أيٌّ مما سبق

الحل:

$$s' = 2\pi x - \frac{2v}{x^2} = 0 \Rightarrow v = \pi x^3$$

$$\pi x^2 h = \pi x^3 \Rightarrow x = h$$

الإجابة الصحيحة:
(b)

البند (1-4) – التقدير

(1) إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96% هي 2.055

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$\frac{\alpha}{2} = 0.02$ ، المساحة 0.98 تقابل $Z \approx 2.055$ من الجدول

العبارة صحيحة

(2) إذا أخذنا عينة من 225 هاتفًا، ووجدنا أنّ متوسط صلاحية استخدامها $\overline{x}$ هو 1.7 سنة، والانحراف المعياري $S = 0.5$ ، ودرجة الثقة 95% فنجد أن فترة الثقة هي: $2.63 < \mu < 2.76$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$E = 1.96 \times \frac{0.5}{15} \approx 0.065$$

الفترة $1.635 < \mu < 1.765$ (يجب أن تحوي $\overline{x} = 1.7$)

العبارة خاطئة

(3) إنّ القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96.6% هي:

ⓐ 2.12 ⓑ 2.17

ⓒ 21.2 ⓓ 21%

الحل:

$\frac{\alpha}{2} = 0.017$ ، المساحة 0.983 تقابل $Z = 2.12$

الإجابة الصحيحة:
(a)

(4) المتوسط الحسابي لدرجات 9 طلاب هو $\overline{x} = 2.76$ حيث النهاية العظمى 4 درجات والانحراف المعياري $S = 0.87$. إنّ فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي عند درجة ثقة 95% هي:

ⓐ $(2.1916\ ,\ 3.3284)$ ⓑ $(1.6232\ ,\ 3.8968)$

ⓒ $(2.1916\ ,\ 3.8968)$ ⓓ $(2.0913\ ,\ 3.4287)$

الحل:

$n = 9 < 30$ و σ مجهول ، $t_{0.025}(8) = 2.306$

$E = 2.306 \times \dfrac{0.87}{3} \approx 0.6687$ ، الفترة $(2.0913\ ,\ 3.4287)$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(5) لنفترض أن متوسط مجتمع إحصائي يقع ضمن الفترة $62.84 < \mu < 69.46$ فمتوسط هذه العينة يساوي:

ⓐ 56.34 ⓑ 62.96

ⓒ 6.62 ⓓ 66.15

الحل:

$\overline{x}$ منتصف فترة الثقة

$$\overline{x} = \frac{62.84 + 69.46}{2} = 66.15$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(6) إن حجم العينة المطلوبة لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع مع هامش خطأ وحدتين، ومستوى ثقة 95% ، وانحراف معياري للمجتمع $\sigma = 8$ يساوي:

ⓐ 65 ⓑ 62

ⓒ 8 ⓓ 26

الحل:

$$n = \left(\frac{1.96 \times 8}{2}\right)^2 \approx 61.47$$

نقرّب لأعلى: $n = 62$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(7) أنجز 16 طالبًا في كلية الطب قياس ضغط الدم لدى الشخص نفسه فحصلوا على النتائج التالية:
$134, 138, 130, 135, 120, 125, 120, 130, 135, 144, 143, 140, 130, 150, 140, 130$. على افتراض أن الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي $\sigma = 10$ mm Hg فإن فترة الثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي هي:

ⓐ $(129.1\ ,\ 131.55)$
ⓑ $(129.1\ ,\ 138.9)$
ⓒ $(131.55\ ,\ 136.45)$
ⓓ $(136.45\ ,\ 138.9)$

الحل:

$$E = 1.96 \times \frac{10}{4} = 4.9 \text{ ، } \overline{x} = \frac{2144}{16} = 134$$

الفترة $(129.1\ ,\ 138.9)$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(8) تتقارب قيمتي t , Z المتناظرة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري إذا زادت درجات الحرية عن:

ⓐ 29
ⓑ 28
ⓒ 27
ⓓ 26

الحل:

كلما زادت درجات الحرية اقترب توزيع t من التوزيع الطبيعي المعياري

وعند $n \geq 30$ أي درجات حرية أكبر من 29 تتقارب القيم

الإجابة الصحيحة:
(a)

البند (2-4) – اختبارات الفروض الإحصائية

(1) في مجتمع إحصائي إذا كان المتوسط الحسابي $\mu = 860$ وعينة من هذا المجتمع حجمها $n = 25$ والمتوسط الحسابي $\overline{x} = 900$ والانحراف المعياري $S = 125$. فإن المقياس الإحصائي هو: $t = 1.6$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$t = \frac{900 - 860}{\frac{125}{\sqrt{25}}} = \frac{40}{25} = 1.6$$

العبارة صحيحة

(2) متوسط العمر لعينة من 100 مصباح كهربائيّ بالساعات في أحد المصانع هو $\overline{x} = 1600$ بانحراف معياري $S = 125$. يقول صاحب المصنع أن متوسط عمر المصابيح بالساعات هو $\mu = 1640$. إن المقياس الإحصائي هو $Z = 3.2$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$Z = \frac{1600 - 1640}{\frac{125}{10}} = \frac{-40}{12.5} = -3.2$$

إذن $Z = -3.2$ وليس 3.2

العبارة خاطئة

(3) متوسط عمر الإطارات في أحد المصانع $\mu = 25000$ ، في دراسة لعينة عشوائية تبيّن أن المتوسط الحسابي هو $\overline{x} = 27000$ مع انحراف معياري $S = 5000$. إذا كان المقياس الإحصائي $t = 2$ فإنّ حجم العينة: $n = 25$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$2 = \frac{27000 - 25000}{\frac{5000}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \sqrt{n} = 5$$

$$n = 25$$

العبارة صحيحة

(4) أخذت عينة عشوائية من مجتمع إحصائي حجمها $n = 81$ مع متوسط حسابي $\overline{x} = 3.6$ وانحراف معياري $S = 1.8$. إذا كان المقياس الإحصائي $Z = -1.5$ فإن المتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu = 3.3$

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$$-1.5 = \frac{3.6 - \mu}{\frac{1.8}{9}} = \frac{3.6 - \mu}{0.2}$$

$$3.6 - \mu = -0.3 \Rightarrow \mu = 3.9 \neq 3.3$$

العبارة خاطئة

(5) إذا كان القرار رفض فرض العدم، وفترة الثقة $(-1.96\ ,\ 1.96)$ فإن قيمة الاختبار Z ممكن تكون:

ⓐ 1.5 ⓑ -2.5

ⓒ 1.87 ⓓ -1.5

الحل:

نرفض فرض العدم إذا وقعت Z خارج الفترة $(-1.96\ ,\ 1.96)$

$$-2.5 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(6) إذا كانت قيمة الاختبار الإحصائي $Z = -1.5$ وفترة القبول $(-1.96\ ,\ 1.96)$ فإن القرار يكون:

ⓐ رفض فرض العدم ⓑ قبول فرض العدم

ⓒ قبول الفرض البديل ⓓ Z لا تنتمي للفترة

الحل:

$-1.5 \in (-1.96\ ,\ 1.96)$ إذن نقبل فرض العدم

الإجابة الصحيحة:
(b)

(7) في دراسة حول متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة هو $\mu = 320$ (دينارًا) وقد تبيّن أن المتوسط الحسابي لعينة حجمها $n = 25$ منزلًا من هذه المدينة هو $\overline{x} = 310$ (دينارًا) مع انحراف معياري $S = 40$. إن المقياس الإحصائي هو:

(a) 1.25
(b) -1.25
(c) 0.8
(d) -0.8

الحل:

$$t = \frac{310 - 320}{\frac{40}{5}} = \frac{-10}{8} = -1.25 \quad \text{نستخدم } n < 30$$

الإجابة الصحيحة: (b)

(8) في دراسة على عينة أسلاك معدنية حجمها $n = 64$ تبيّن أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل السلك $\overline{x} = 360\ \text{kg}$ مع انحراف معياري $S = 50\ \text{kg}$ إذا كان المقياس الإحصائي لقوة تحمل كافة الأسلاك المعدنية $Z = -2.4$ فإنّ المتوسط الحسابي μ هو:

(a) 346
(b) 396
(c) 376
(d) 326

الحل:

$$Z = \frac{360 - \mu}{\frac{50}{8}} = \frac{360 - \mu}{6.25}$$

$$-2.4 \times 6.25 = -15 \Rightarrow \mu = 375 \approx 376 \quad \text{(أقرب خيار)}$$

الإجابة الصحيحة: (c)

(9) هدف إحدى الشركات الكبرى هو ربح صافٍ متوسطه الحسابي $\mu = 200000$ (دينار) في كل فرع من فروعها المنتشرة في عدد من الدول. في دراسة لعينة من عدد من الفروع لهذه الشركة أعطأ متوسطًا حسابيًا $\overline{x} = 195000$ (دينارًا) مع انحراف معياري $S = 80000$ (دينارًا) إذا كان المقياس الإحصائي $Z = -0.625$ فإنّ حجم العينة n هو:

(a) 100
(b) 125
(c) 90
(d) 110

الحل:

$$-0.625 = \frac{195000 - 200000}{\frac{80000}{\sqrt{n}}} = \frac{-5000\sqrt{n}}{80000}$$

$$\sqrt{n} = 10 \Rightarrow n = 100$$

الإجابة الصحيحة:
(a)

(10) في دراسة لمجتمع إحصائي تبيّن أنّ متوسطه الحسابي $\mu = 125$ أخذت عينة من هذا المجتمع حجمها $n = 36$ فتبيّن أن متوسطها الحسابي $\overline{x} = 130$. إذا كان المقياس الإحصائي $Z = 3.125$ فإنّ الانحراف المعياري σ هو:

(a) -9.6 (b) 6.9

(c) 9.6 (d) -6.9

الحل:

$$3.125 = \frac{130 - 125}{\frac{\sigma}{6}} = \frac{30}{\sigma}$$

$$\sigma = \frac{30}{3.125} = 9.6$$

الإجابة الصحيحة:
(c)

البند (3-4) – الارتباط والانحدار

(1) الارتباط هو علاقة بين متغيرين.

(a) صحيحة (b) خاطئة

الحل:

الارتباط يقيس قوة واتجاه العلاقة بين متغيرين

العبارة صحيحة

(2) إذا كان r معامل الارتباط بين متغيرين فإن $-1 < r < 1$

(a) صحيحة (b) خاطئة

الحل:

$-1 \leq r \leq 1$ ، فيمكن أن يكون $r = 1$ أو $r = -1$ (ارتباط تام)

العبارة خاطئة

(3) إذا كان معامل الارتباط بين متغيرين $r = -1$ كان الارتباط تامًا.

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$r = -1$ ارتباط عكسي تام

العبارة صحيحة

(4) الانحدار هو وصف العلاقة بين متغيرين.

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

الانحدار يصف العلاقة بين متغيرين بمعادلة (خط الانحدار $\hat{y} = a + bx$)

العبارة صحيحة

(5) إذا كان معامل الارتباط $r = 0$ فإن الارتباط منعدم.

ⓐ صحيحة ⓑ خاطئة

الحل:

$r = 0$ يعني لا يوجد ارتباط خطي بين المتغيرين

العبارة صحيحة

(6) قيمة مُعامل الارتباط (r) التي تجعل الارتباط طردي (موجب) تام بين المتغيرين y , x هي:

ⓐ -1 ⓑ -0.5

ⓒ 0.5 ⓓ 1

الحل:

الارتباط الطردي التام عندما $r = 1$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(7) إذا كانت قيمة مُعامل الارتباط (r) بين متغيرين حيث $r \in (-1\ ,\ -0.5]$ فإن العلاقة يمكن أن تكون:

ⓐ عكسية تامة
ⓑ عكسية قوية
ⓒ طردية تامة
ⓓ طردية قوية

الحل:

r سالب فالعلاقة عكسية ، و $-1 < r \leq -0.5$ قوية (وليست تامة لأن $r \neq -1$)

الإجابة الصحيحة:
(b)

(8) إذا كانت معادلة خط الانحدار للمتغيرين y , x هي $\hat{y} = 5.5 + 3.4x$ فإن قيمة y المتوقعة عندما $x = 6$ هي:

ⓐ 0.5
ⓑ 6.8
ⓒ 29.98
ⓓ 25.9

الحل:

$$\hat{y} = 5.5 + 3.4(6) = 5.5 + 20.4 = 25.9$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(9) إذا كان مُعامل الارتباط بين متغيرين $r = 0.85$ فإن الارتباط يكون:

ⓐ طردي قوي
ⓑ طردي ضعيف
ⓒ طردي متوسط
ⓓ طردي تام

الحل:

r موجب و $0.5 \leq r < 1$ إذن الارتباط طردي قوي

الإجابة الصحيحة:
(a)

(10) إذا كانت معادلة خط الانحدار للمتغيرين y , x هي $\hat{y} = 1 + 1.4x$. فإن مقدار الخطأ عند $x = 5$ علمًا بأن القيمة الجدولية هي $y = 9$ يساوي:

ⓐ -1
ⓑ 1
ⓒ 17
ⓓ 8

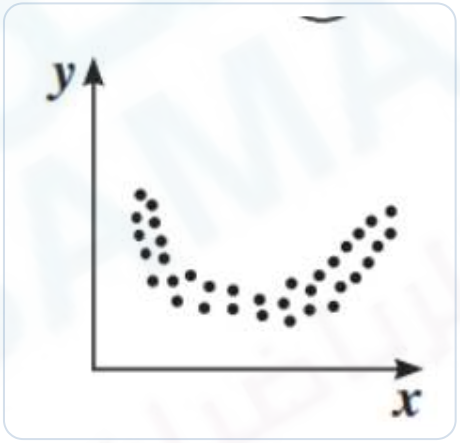
الحل:

$$\hat{y} = 1 + 1.4(5) = 8$$

$$\text{مقدار الخطأ } y - \hat{y} = 9 - 8 = 1$$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(11) الشكل أدناه يمثل علاقة بين متغيرين y , x نوع هذه العلاقة هو:



ⓐ علاقة خطية طردية
ⓑ علاقة خطية عكسية
ⓒ علاقة غير خطية
ⓓ ليس أيٌّ مما سبق

الحل:

النقاط تأخذ شكل منحنى (قطع مكافئ) وليس خطًا مستقيمًا

إذن العلاقة غير خطية

الإجابة الصحيحة:
(c)

(12) من الجدول التالي:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	23	18	17	14	10	6	5	1

فإذا كانت معادلة خط الانحدار هي $\hat{y} = -3.05x + 25.5$ ، فإن مقدار الخطأ عندما $x = 5$ يساوي:

ⓐ 0.25

ⓑ -0.25

ⓒ 20.25

ⓓ 10.25

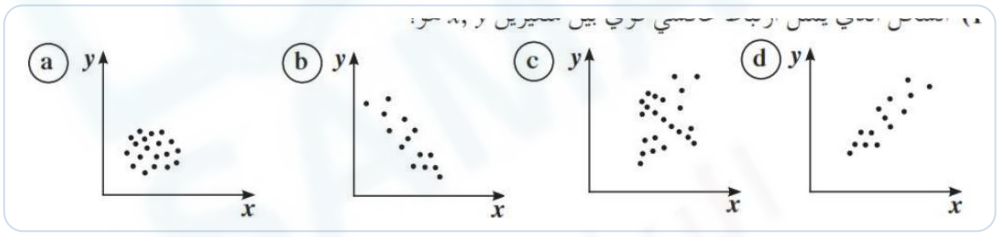
الحل:

$$\hat{y} = -3.05(5) + 25.5 = 10.25$$

$$\text{مقدار الخطأ } y - \hat{y} = 10 - 10.25 = -0.25$$

الإجابة الصحيحة:
(b)

(13) الشكل الذي يمثل ارتباط عكسي قوي بين متغيرين y , x هو:



ⓐ الشكل **(a)**

ⓑ الشكل **(b)**

ⓒ الشكل **(c)**

ⓓ الشكل **(d)**

الحل:

النقاط قريبة من خط مستقيم ميله سالب (تتناقص y بزيادة x)

الإجابة الصحيحة:
(b)

(14) قيمة مُعامل الارتباط لا يمكن أن تساوي:

(a) 0 (b) 1

(c) -0.5 (d) 1.5

الحل:

$$-1 \leq r \leq 1 \text{ و } 1.5 > 1$$

الإجابة الصحيحة:
(d)

(15) إذا كان مُعامل الارتباط بين المتغيرين y , x يساوي صفر فإن الارتباط يكون:

(a) قوي (b) ضعيف

(c) منعدم (d) تام

الحل:

$r = 0$ إذن الارتباط منعدم

الإجابة الصحيحة:
(c)