مذكرات سما

الرياضيات

الوحدة 1



الصف العاشر

المرحلة الثانوية



الفصل الدراسي الأول
2027 - 2026

www.samakw.com
samakw_net
60084568 /50855008/97442417
حولي مجمع بيروت الدور الأول

الصف العاشر · الفصل الدراسي الأول

المذكرة الشاملة — الوحدة الأولى

القيمة المطلقة والمعادلات والمتباينات التربيعية — نسخة الحل · 2026 / 2027

10
الصف

بنود الوحدة

البند (1-1) دالة القيمة المطلقة

البند (2-1) حل معادلة القيمة المطلقة

البند (3-1) حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد جبريًّا وبيانيًّا

البند (4-1) مجموع وناتج ضرب جذري معادلة تربيعية وتكوين المعادلة

البند (5-1) حل متباينة من الدرجة الثانية

طريقة الحل المعتمدة

📌 القانون قبل التعويض ، وكل خطوة في سطر

✍️ خطوة النقل وتجميع الحدود ، والحلان قبل التبسيط في القانون العام

📈 دالة المرجع ظاهرة في الرسم ، والرسم داخل الحل

🎯 المتباينات بجدول الإشارة ثم خط الأعداد

إعداد: الأستاذ وليد حسين — مادة الرياضيات · منصة سما التعليمية

البند (1-1): دالة القيمة المطلقة — Absolute Value Function

💡 فكرة الدرس
التعرف على دالة القيمة المطلقة وتمثيلها بيانيًّا ، والتعرف على خواص دالة القيمة المطلقة ، واستخدام هندسة التحويلات لرسم بعض دوال القيمة المطلقة.

📚 تعلمنا فيما سبق
إن القيمة المطلقة لعدد حقيقي تعبّر عن بُعد هذا العدد عن الصفر على خط الأعداد.

📝 المصطلحات
القيمة المطلقة (Absolute Value) · الدالة (Function) · المجال (Domain) · رأس المنحنى (Vertex) · التمثيل البياني (Graph) · المدى (Range) · محور التماثل (Axis of Symmetry)

📖 مسألة الدرس
في معرض العلوم بالمدرسة صمّم أحمد وزملاؤه تجربة باستخدام شعاع الليزر ومرآة مستوية ، لوحظ أن شعاع الليزر انطلق من المصدر واصطدم بالمرآة عند النقطة $(0, 0)$ ثم انعكس ليصيب الهدف. المطلوب: كتابة قاعدة الدالة الناتجة من انعكاس شعاع الليزر.

الحل: مسار الشعاع قبل الانعكاس يمثله $y = -x : x < 0$ ، وبعد الانعكاس $y = x : x \geq 0$ ، فتكون قاعدة الدالة الناتجة: $f(x) = |x|$

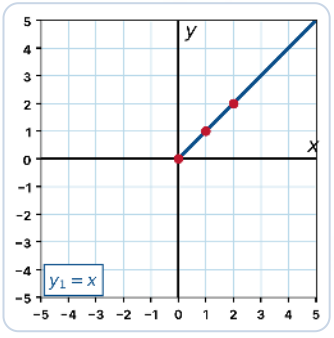
⚠️ انتبه
سنرمز لمحور السينات بـ (x-axis) ولمحور الصادات بـ (y-axis).

✍️ والآن
ارسم كلًّا من الدوال التالية

(a) $y_1 = x : x \geq 0$

الحل

x	0	1	2
y	0	1	2

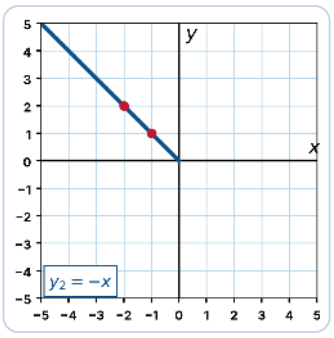


(b) $y_2 = -x : x < 0$

الحل

x	-2	-1	0 (دائرة مفرغة)
y	2	1	0 (دائرة مفرغة)

الدائرة المفرغة عند $x = 0$ تعني أن 0 لا ينتمي لمجال الدالة y_2



🔁 أعد تعريف الدالة $y_3 = |x|$ ، وما علاقة y_3 بكلٍّ من y_1, y_2 ؟

$$y_3 = |x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

بيان الدالة y_3 هو اتحاد بيانَي الدالتين y_1 و y_2 ، أي أن $y_3 = y_1 \cup y_2$ ، حيث y_1 هو الجزء الأيمن من المنحنى $(x \geq 0)$ و y_2 هو الجزء الأيسر $(x < 0)$.

⋆ **الصورة الأساسية لدالة القيمة المطلقة**

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = |x|$$

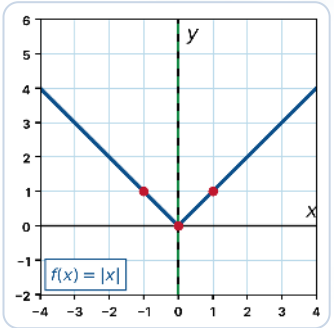
مكوناتها: ① المجال $\mathbb{R}$ ② المجال المقابل $\mathbb{R}$ ③ قاعدة اقترانها $f(x) = |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$ أي أن $$f(x) = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

بيان بيان الدالة الأساسية $f(x) = |x|$

الحل

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2



ℹ️ **معلومة: محور التماثل**

هو خط يقسم التمثيل البياني إلى جزأين متطابقين تمامًا (يحوّل التمثيل البياني إلى نفسه).

🔎 نستنتج أن

- تمثيل الدالة $y = |x|$ بيانيًّا ينتج من اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية (رأس المنحنى) وهي نقطة الأصل $(0, 0)$ ، ويشبهان الحرف **V**.
- رأس المنحنى هو $(0, 0)$ وعنده توجد أصغر قيمة للدالة.
- الدالة متماثلة حول محور الصادات $(x = 0)$ ، نسميها فيما بعد دالة زوجية.
- مدى الدالة هو $[0, \infty)$

📌 ومن التعريف: إذا كانت $a, b, x \in \mathbb{R}$ فإن

$$|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases} \quad ①$$

$$|x + a| = \begin{cases} x + a & : x \geq -a \\ -x - a & : x < -a \end{cases} \quad ②$$

$$(a > 0) \text{ حيث } |ax + b| = \begin{cases} ax + b & : x \geq \dfrac{-b}{a} \\ -ax - b & : x < \dfrac{-b}{a} \end{cases} \quad ③$$

خواص القيمة المطلقة

$|a + b| \leq |a| + |b|$ ③ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ② $|x| \geq 0$ ①

📝 ملحوظات هامة

$\sqrt{x^2} = |x|$ ② $|a|^2 = a^2$ ①

⚠️ انتبه

مجال دالة القيمة المطلقة هو $\mathbb{R}$ ما لم يُذكر غير ذلك. وعند رسم بيان أي دالة اكتب مجال الدالة أولًا.

رسم بيان دالة القيمة المطلقة باستخدام رأس المنحنى ومحور التماثل

مثال (1) ارسم بيان الدالة: $f(x) = |2x + 4|$

الحل

المجال: $\mathbb{R}$

أولًا: باستخدام محور التماثل

نضع $2x + 4 = 0$

$2x = -4$

معادلة محور التماثل ← $x = -2$

$f(-2) = |2(-2) + 4| = 0$

رأس المنحنى: $(-2, 0)$

نأخذ قيمتين على يمين $x = -2$:

$f(-1) = |2(-1) + 4| = 2$

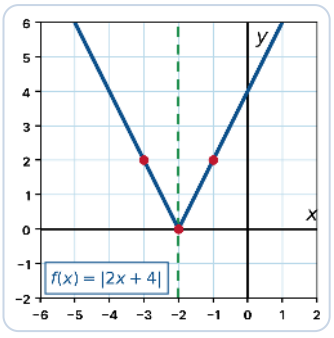
$f(0) = |2(0) + 4| = 4$

ومن التماثل حول $x = -2$:

$f(-3) = f(-1) = 2$

$f(-4) = f(0) = 4$

x	0	−1	−2	−3	−4
y	4	2	0	2	4



ثانيًا: باستخدام إعادة تعريف القيمة المطلقة

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & : x \geq -2 \\ -2x - 4 & : x < -2 \end{cases}$$

$f(-1) = 2(-1) + 4 = 2$ ، لأن $-1 > -2$

$f(-3) = -2(-3) - 4 = 2$ ، لأن $-3 < -2$

نحصل على الجدول نفسه والبيان نفسه.

مما سبق نلاحظ

بفرض أن $f(x) = |2x + 4| + 0$: $a = 2, b = 4, c = 0$

① رأس المنحنى هو $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = (-2, 0)$

② معادلة محور التماثل هي $x = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{2} = -2$

③ مدى الدالة هو $[c, \infty) = [0, \infty)$

تحقق من فهمك (1)

ارسم بيان الدالة

(1) $f(x) = |3x + 6|$

الحل

المجال: $\mathbb{R}$

$a = 3,\ b = 6,\ c = 0$

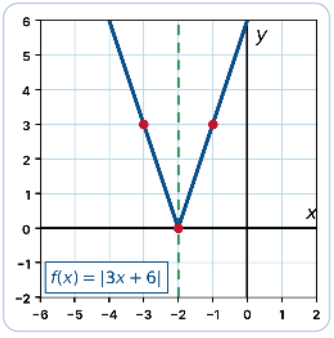
رأس المنحنى: $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = (-2, 0)$

محور التماثل: $x = \frac{-b}{a}$

$x = -2$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[0, \infty)$

x	−1	−2	−3
y	3	0	3



⋆ تعميم: الصورة القياسية لدوال القيمة المطلقة

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، مجالها $\mathbb{R}$ ومجالها المقابل $\mathbb{R}$ ، $f(x) = |ax + b| + c$

① رأس المنحنى هو النقطة $\left(\frac{-b}{a}, c\right)$

② معادلة محور التماثل هي $x = \frac{-b}{a}$

③ مدى الدالة هو $[c, \infty)$

④ إذا كانت الدالة على الصورة $f(x) = -|ax + b| + c$ يصبح المدى $(-\infty, c]$ ويكون المنحنى مفتوحًا لأسفل.

مثال (a-2) أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى الدالة ثم ارسم بيانها: $y = |x - 2| + 1$

الحل

المجال: $\mathbb{R}$

$a = 1,\ b = -2,\ c = 1$

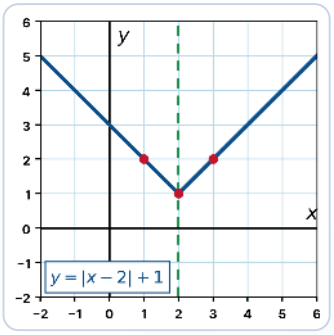
رأس المنحنى: $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = (2, 1)$

محور التماثل: $x = \frac{-b}{a}$

$x = 2$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[1, \infty)$

x	1	2	3
y	2	1	2



عند رأس المنحنى $(2, 1)$ توجد أصغر قيمة للدالة.

مثال (b-2) أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى الدالة ثم ارسم بيانها: $y = -|2x + 3|$

الحل

المجال: $\mathbb{R}$

$a = 2,\ b = 3,\ c = 0$

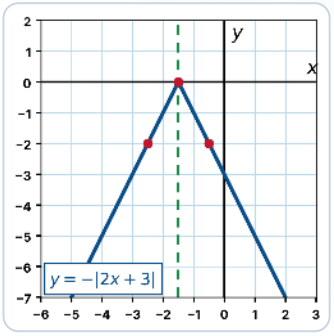
رأس المنحنى: $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

محور التماثل: $x = \frac{-b}{a}$

$x = -\frac{3}{2}$

المنحنى مفتوح لأسفل ← المدى: $(-\infty, 0]$

x	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
y	-2	0	-2



عند رأس المنحنى $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ توجد أكبر قيمة للدالة.

تذكّر

في $f(x)=|ax+b|+c$ نضع $ax+b=0$ فيكون $x=\dfrac{-b}{a}$ ، و $f\left(\dfrac{-b}{a}\right)=c$ ، فرأس المنحنى هو $\left(\dfrac{-b}{a},\ c\right)$

ملحوظة

الإشارة السالبة خارج القيمة المطلقة لا تؤثر على نقطة رأس المنحنى ، ومنحنى الدالة يكون مفتوحًا لأسفل.

تحقق من فهمك (2)

أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كلٍّ من الدوال التالية ثم ارسم بيان كلٍّ منها

(a) $f(x)=|x+1|+3$

الحل

المجال: $\mathbb{R}$

$a=1,\ b=1,\ c=3$

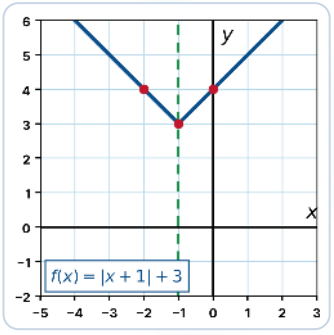
رأس المنحنى: $\left(\dfrac{-b}{a},\ c\right)=(-1,\ 3)$

محور التماثل: $x=\dfrac{-b}{a}$

$x=-1$

المدى: $[3,\ \infty)$ ← المنحنى مفتوح لأعلى

x	-2	-1	0
y	4	3	4



(b) $y=-|x+1|$

الحل

المجال: $\mathbb{R}$

$a=1,\ b=1,\ c=0$

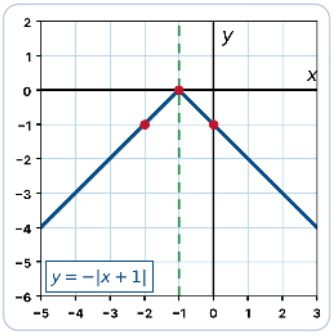
رأس المنحنى: $\left(\dfrac{-b}{a},\ c\right)=(-1,\ 0)$

محور التماثل: $x=\dfrac{-b}{a}$

$x=-1$

المدى: $(-\infty,\ 0]$ ← المنحنى مفتوح لأسفل

x	-2	-1	0
y	-1	0	-1



$$g(x) = \left|\frac{1}{2}x + 1\right| \quad \textbf{(c)}$$

الحل

المجال: $\mathbb{R}$

$$a = \frac{1}{2},\ b = 1,\ c = 0$$

رأس المنحنى: $\left(\frac{-b}{a}, c\right)$

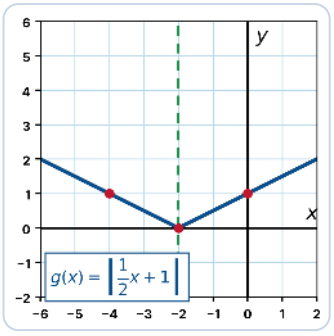
$$= (-2, 0)$$

محور التماثل: $x = \frac{-b}{a}$

$$x = -2$$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[0, \infty)$

x	-4	-2	0
y	1	0	1



$$f(x) = 1 - |x - 2| \quad \textbf{(d)}$$

الحل

$$f(x) = -|x - 2| + 1$$

المجال: $\mathbb{R}$

$$a = 1,\ b = -2,\ c = 1$$

رأس المنحنى: $\left(\frac{-b}{a}, c\right)$

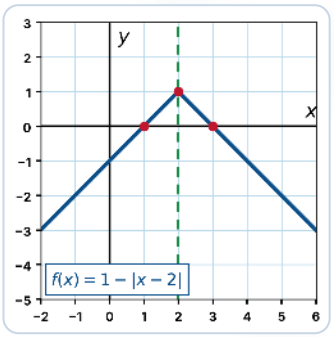
$$= (2, 1)$$

محور التماثل: $x = \frac{-b}{a}$

$$x = 2$$

المنحنى مفتوح لأسفل ← المدى: $(-\infty, 1]$

x	1	2	3
y	0	1	0



🔄 رسم بيان دوال القيمة المطلقة باستخدام بعض التحويلات الهندسية

ℹ️ معلومة

الدالة الأساسية هي دالة المرجع $g(x) = |x|$ ، ومعامل x فيها هو الواحد دائمًا.

① الانسحاب في اتجاه محور السينات

إزاحة أفقية

استكشف ارسم بيان الدالة: $f(x) = |x + 3|$

الحل

المجال: $\mathbb{R}$

① لإيجاد صفر المطلق نضع $f(x) = 0$

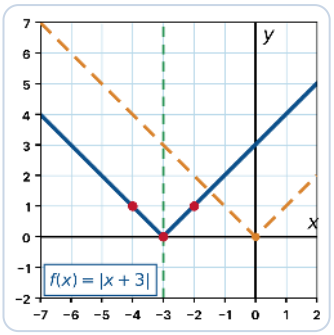
$x + 3 = 0$

$x = -3$ وهو محور التماثل

② نكوّن جدول القيم:

-2	-3	-4	x
1	0	1	y

③ نرسم الدالة:



④ نلاحظ أن بيان $f(x) = |x + 3|$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ ثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات (جهة اليسار).

مثال (3) ارسم بيان الدالة $f(x) = |x - 1|$ باستخدام التحويلات الهندسية.

الحل

المجال: $\mathbb{R}$

① صفر المطلق: $x - 1 = 0$

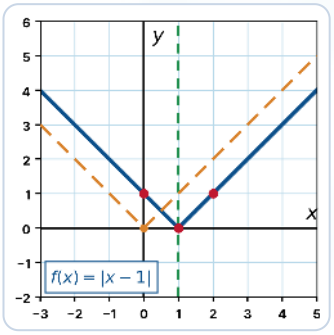
$x = 1$ وهو محور التماثل

② جدول قيم دالة المرجع $g(x) = |x|$:

1	0	-1	x
1	0	1	y

③ نرسم الدالة بإزاحة مقدارها وحدة واحدة جهة اليمين

رأس المنحنى: $(1, 0)$



📋 ملخص: الإزاحة الأفقية

- $f(x) = |x - 2|$: رأس المنحنى $(2, 0)$ ، إزاحة أفقية وحدتان يمينًا
- $f(x) = |x|$: الدالة الأساسية ، رأس المنحنى $(0, 0)$
- $f(x) = |x + 2|$: رأس المنحنى $(-2, 0)$ ، إزاحة أفقية وحدتان يسارًا

⋆ تعميم

منحنى الدالة $f(x) = |x + a|$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بإزاحة أفقية مقدارها $|a|$ وحدة في الاتجاه:

① الموجب لمحور السينات (جهة اليمين) عندما $a < 0$

② السالب لمحور السينات (جهة اليسار) عندما $a > 0$

تحقق من فهمك (3)

حدد مسافة الانسحاب ثم ارسم بيان كل دالة مستخدمًا الإزاحة لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

(a) $f(x) = |x - 3|$

الحل

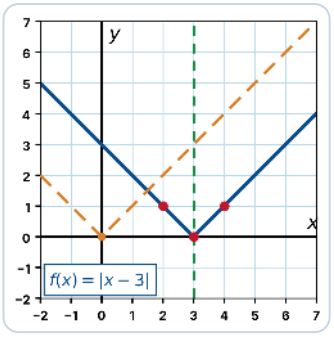
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع) ورأسها $(0, 0)$

إزاحة أفقية: 3 وحدة جهة اليمين

رأس المنحنى: $(3, 0)$

محور التماثل: $x = 3$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[0, \infty)$



(b) $y = |x + 2|$

الحل

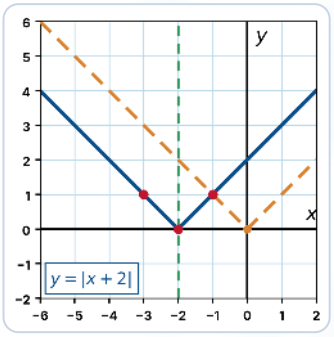
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع) ورأسها $(0, 0)$

إزاحة أفقية: 2 وحدة جهة اليسار

رأس المنحنى: $(-2, 0)$

محور التماثل: $x = -2$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[0, \infty)$



(c) $f(x) = \left|x - \frac{7}{2}\right|$

الحل

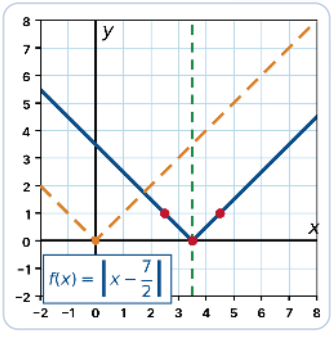
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع) ورأسها $(0, 0)$

إزاحة أفقية: $\frac{7}{2}$ وحدة جهة اليمين

رأس المنحنى: $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$

محور التماثل: $x = \frac{7}{2}$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[0, \infty)$



(d) $y = \left| x - \frac{3}{2} \right|$

الحل

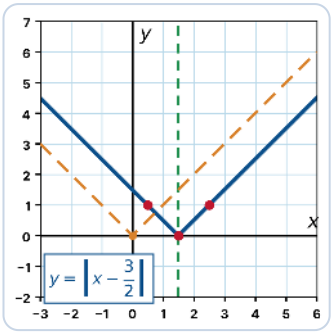
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع) ورأسها $(0, 0)$

إزاحة أفقية: $\frac{3}{2}$ وحدة جهة اليمين

رأس المنحنى: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

محور التماثل: $x = \frac{3}{2}$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[0, \infty)$



② الانسحاب في اتجاه محور الصادات

إزاحة رأسية

استكشف ارسم بيان الدالة: $f(x) = |x| - 1$

الحل

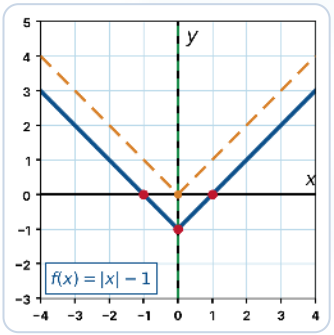
① صفر المطلق هو $x = 0$ وهي معادلة محور التماثل

رأس المنحنى: $(0, -1)$

② نكوّن جدول القيم:

x	−1	0	1
y	0	−1	0

③ نرسم الدالة:



④ نلاحظ أن بيان $f(x) = |x| - 1$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان $g(x) = |x|$ وحدة واحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات (لأسفل).

مثال (4) ارسم بيان الدالة $f(x) = |x| + 2$ باستخدام التحويلات الهندسية.

الحل

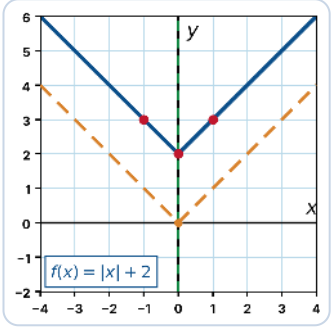
① صفر المطلق هو $x = 0$ وهي معادلة محور التماثل

رأس المنحنى: $(0, 2)$

② جدول قيم دالة المرجع $g(x) = |x|$:

x	−1	0	1
y	1	0	1

③ نرسم الدالة بانسحاب بيان $g(x) = |x|$ وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور الصادات (لأعلى)



📋 ملخص: الإزاحة الرأسية

- $f(x) = |x| + 2$: رأس المنحنى $(0, 2)$ ، إزاحة رأسية وحدتان لأعلى
- $f(x) = |x|$: الدالة الأساسية ، رأس المنحنى $(0, 0)$
- $f(x) = |x| - 2$: رأس المنحنى $(0, -2)$ ، إزاحة رأسية وحدتان لأسفل

☆ تعميم

منحنى الدالة $f(x) = |x| + a$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بإزاحة رأسية مقدارها $|a|$ وحدة في الاتجاه:

① الموجب لمحور الصادات (رأسيًا لأعلى) عندما $a > 0$

② السالب لمحور الصادات (رأسيًا لأسفل) عندما $a < 0$

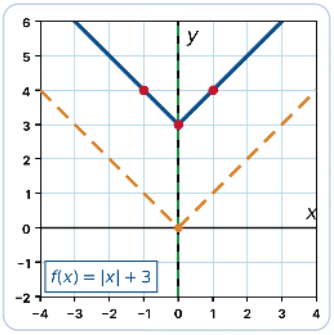
🎯 تحقق من فهمك (4)

ارسم بيان كلٍّ من الدوال التالية باستخدام التحويلات الهندسية والدالة الأساسية $g(x) = |x|$

(a) $f(x) = |x| + 3$

الحل

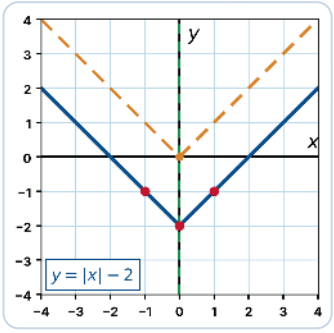
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
إزاحة رأسية: 3 وحدة لأعلى
رأس المنحنى: $(0, 3)$
محور التماثل: $x = 0$
المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[3, \infty)$



(b) $y = |x| - 2$

الحل

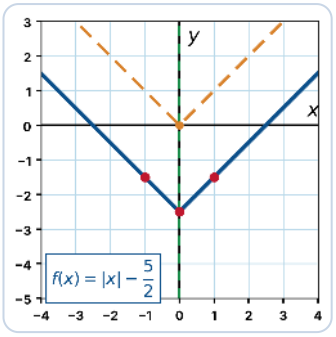
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
إزاحة رأسية: 2 وحدة لأسفل
رأس المنحنى: $(0, -2)$
محور التماثل: $x = 0$
المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[-2, \infty)$



(c) $f(x) = |x| - \frac{5}{2}$

الحل

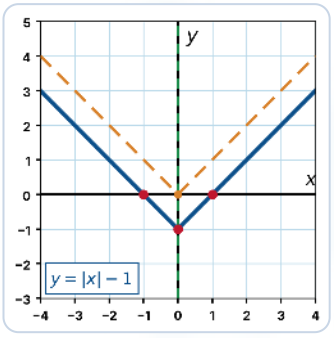
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
إزاحة رأسية: $\frac{5}{2}$ وحدة لأسفل
رأس المنحنى: $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$
محور التماثل: $x = 0$
المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[-\frac{5}{2}, \infty)$



(d) $y = |x| - 1$

الحل

دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
إزاحة رأسية: 1 وحدة لأسفل
رأس المنحنى: $(0, -1)$
محور التماثل: $x = 0$
المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[-1, \infty)$



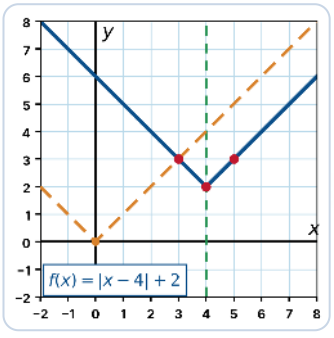
③ الانسحاب المركّب

إزاحة أفقية تليها إزاحة رأسية لمنحنى الدالة $f(x) = |x|$

مثال (a-5) ارسم بيان الدالة $f(x) = |x - 4| + 2$ باستخدام دالة المرجع والإزاحة.

الحل

دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
إزاحة أفقية: 4 وحدة جهة اليمين
إزاحة رأسية: 2 وحدة لأعلى
رأس المنحنى: $(4, 2)$
محور التماثل: $x = 4$
المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[2, \infty)$

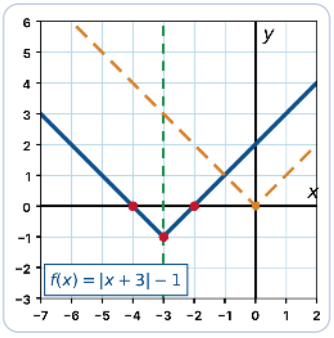


ملحوظة: نقطة تقاطع منحنى $f(x)$ مع منحنى الدالة الأساسية $g(x)$ هي $(3, 3)$
$f(3) = |3 - 4| + 2 = 3$
$g(3) = |3| = 3$
أي أن $x = 3$ هو حل المعادلة
$|x - 4| + 2 = |x|$

مثال (b-5) ارسم بيان الدالة $f(x) = |x+3| - 1$ باستخدام دالة المرجع والإزاحة.

الحل

دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
إزاحة أفقية: 3 وحدة جهة اليسار
إزاحة رأسية: 1 وحدة لأسفل
رأس المنحنى: $(-3, -1)$
محور التماثل: $x = -3$
المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[-1, \infty)$



ملحوظة: منحنى الدالة يقطع محور السينات عند
$x = -2$ ، $x = -4$

⋆ تعميم

منحنى الدالة $f(x) = |x+a| + b$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بإزاحة:
① أفقية (محور السينات) مقدارها $|a|$ مع مراعاة الاتجاه يمينًا أو يسارًا
② رأسية (محور الصادات) مقدارها $|b|$ مع مراعاة الاتجاه لأعلى أو لأسفل

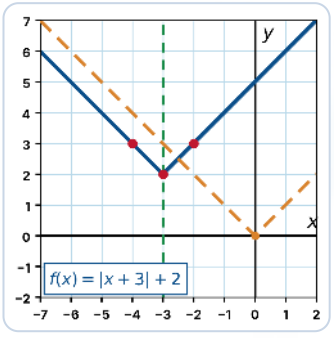
🎯 تحقق من فهمك (5)

ارسم بيان الدوال التالية باستخدام دالة المرجع والإزاحة

(a) $f(x) = |x+3| + 2$

الحل

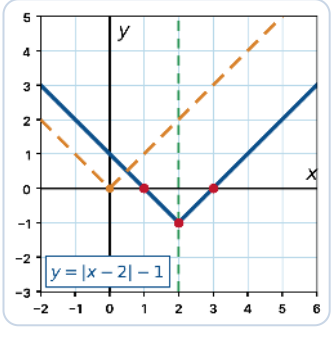
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
إزاحة أفقية: 3 وحدة جهة اليسار
إزاحة رأسية: 2 وحدة لأعلى
رأس المنحنى: $(-3, 2)$
محور التماثل: $x = -3$
المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[2, \infty)$



(b) $y = |x-2| - 1$

الحل

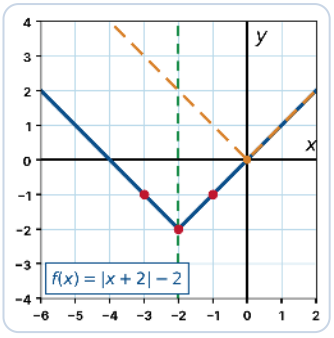
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
إزاحة أفقية: 2 وحدة جهة اليمين
إزاحة رأسية: 1 وحدة لأسفل
رأس المنحنى: $(2, -1)$
محور التماثل: $x = 2$
المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[-1, \infty)$



(c) $f(x) = |x + 2| - 2$

الحل

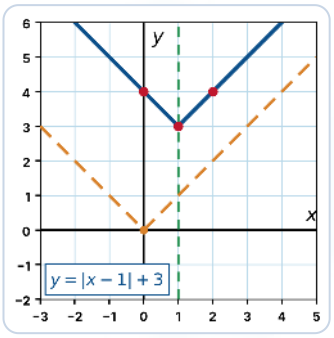
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
إزاحة أفقية: 2 وحدة جهة اليسار
إزاحة رأسية: 2 وحدة لأسفل
رأس المنحنى: $(-2, -2)$
محور التماثل: $x = -2$
المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[-2, \infty)$



(d) $y = |x - 1| + 3$

الحل

دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
إزاحة أفقية: 1 وحدة جهة اليمين
إزاحة رأسية: 3 وحدة لأعلى
رأس المنحنى: $(1, 3)$
محور التماثل: $x = 1$
المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[3, \infty)$

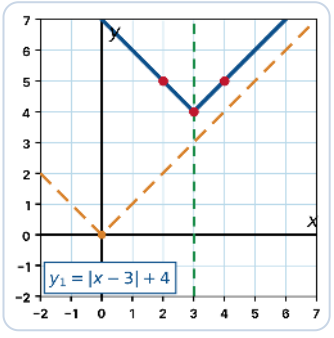


استخدام النماذج

نموذج صمّم مهندس مظلة مدخل مبنى على شكل حرف **V** ، ويمكن تمثيل شكلها بالدالة $y = |x|$ ، ثم عدّل المظلة بإزاحة 3 وحدات إلى اليمين و 4 وحدات إلى الأعلى. **(a)** اكتب الدالة الجديدة **(b)** حدّد إحداثيات رأس المنحنى **(c)** ارسم الدالة الجديدة

الحل

(a) إزاحة 3 وحدات إلى اليمين ثم 4 وحدات إلى الأعلى:
$y_1 = |x - 3| + 4$
(b) رأس المنحنى: $(3, 4)$
(c) التمثيل البياني:



④ الانعكاس في محور السينات

للدالة الأساسية $g(x)=|x|$

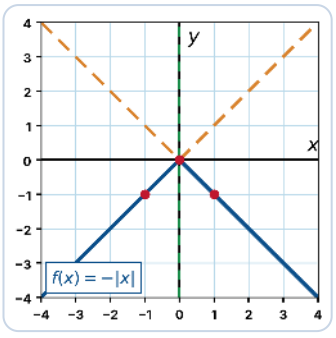
استكشف ارسم بيان الدالة: $f(x)=-|x|$

الحل

$$f(x)=\begin{cases}-(x) & :x\geq 0\\ -(-x) & :x<0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-x & :x\geq 0\\ x & :x<0\end{cases}$$

x	0	−1	1
y	0	−1	−1



نلاحظ أن بيان $f(x)=-|x|$ هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالة الأساسية $g(x)=|x|$

تعميم ⋆

إذا كانت $f(x)=-|x+b|+c$ فيجب مراعاة ترتيب التحويلات الهندسية لرسم بيانها من $g(x)=|x|$:
① انعكاس في محور السينات للدالة الأساسية ② إزاحة أفقية (يمينًا أو يسارًا) ③ إزاحة رأسية (لأعلى أو لأسفل) ④ تحديد رأس المنحنى ومحور التماثل

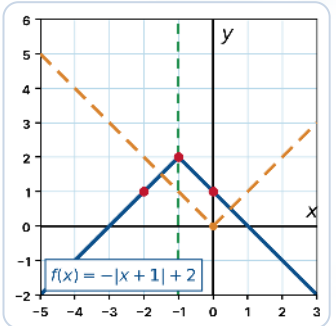
انتبه ⚠

$$\sqrt{(x+a)^2}=|x+a|\cdot|-ax|=|ax|\cdot|-x|=|x|\cdot\sqrt{x^2}=|x|\cdot|a-x|=|x-a|$$

مثال (6) ارسم بيانيًّا منحنى الدالة $f(x)=-|x+1|+2$ مستخدمًا منحنى الدالة الأساسية $g(x)=|x|$

الحل

دالة المرجع: $g(x)=|x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0,0)$
انعكاس في محور السينات
إزاحة أفقية: 1 وحدة جهة اليسار
إزاحة رأسية: 2 وحدة لأعلى
رأس المنحنى: $(-1,2)$
محور التماثل: $x=-1$
المنحنى مفتوح لأسفل ← المدى: $(-\infty,2]$



ملحوظة: منحنى الدالة يقطع محور السينات عند $x=1\ ،\ x=-3$

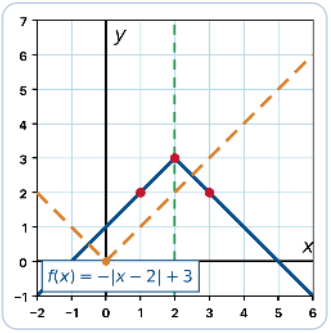
تحقق من فهمك (6)

ارسم بيانيًّا كلًّا من الدوال التالية مستخدمًا بيان منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

(a) $f(x) = -|x - 2| + 3$

الحل

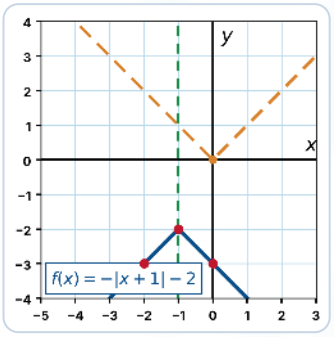
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
انعكاس في محور السينات
إزاحة أفقية: 2 وحدة جهة اليمين
إزاحة رأسية: 3 وحدة لأعلى
رأس المنحنى: $(2, 3)$
محور التماثل: $x = 2$
المنحنى مفتوح لأسفل ← المدى: $(-\infty, 3]$



(b) $f(x) = -|x + 1| - 2$

الحل

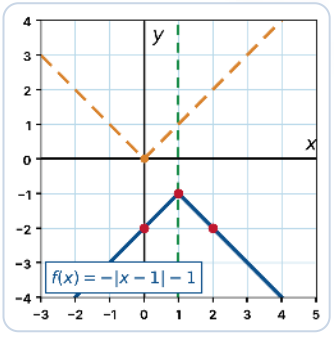
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
انعكاس في محور السينات
إزاحة أفقية: 1 وحدة جهة اليسار
إزاحة رأسية: 2 وحدة لأسفل
رأس المنحنى: $(-1, -2)$
محور التماثل: $x = -1$
المنحنى مفتوح لأسفل ← المدى: $(-\infty, -2]$



(c) $f(x) = -|x - 1| - 1$

الحل

دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
انعكاس في محور السينات
إزاحة أفقية: 1 وحدة جهة اليمين
إزاحة رأسية: 1 وحدة لأسفل
رأس المنحنى: $(1, -1)$
محور التماثل: $x = 1$
المنحنى مفتوح لأسفل ← المدى: $(-\infty, -1]$



(d) $f(x) = -|x+2| + 1$

الحل

دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع) ورأسها $(0, 0)$

انعكاس في محور السينات

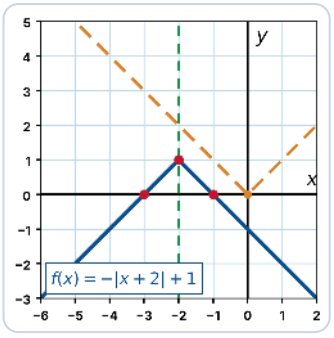
إزاحة أفقية: 2 وحدة جهة اليسار

إزاحة رأسية: 1 وحدة لأعلى

رأس المنحنى: $(-2, 1)$

محور التماثل: $x = -2$

المنحنى مفتوح لأسفل ← المدى: $(-\infty, 1]$



فكّر معي هل يمكن رسم بيان الدالة $f(x) = |2x-4| + 3$ باستخدام التحويلات الهندسية؟

الحل

لا يمكن رسمها بالانسحاب والانعكاس فقط ، لأن معامل x لا يساوي الواحد:

$|2x-4| = 2|x-2|$ (تحتاج إلى تمدد رأسي)

لذلك نرسمها باستخدام رأس المنحنى ومحور التماثل:

المجال: $\mathbb{R}$

$a = 2,\ b = -4,\ c = 3$

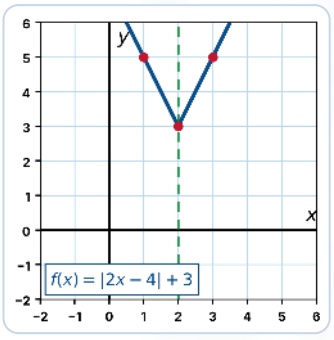
رأس المنحنى: $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = (2, 3)$

محور التماثل: $x = \frac{-b}{a}$

$x = 2$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[3, \infty)$

x	1	2	3
y	5	3	5



؟ سؤال: هل يمكن أن نعكس الترتيب بإجراء الإزاحة الرأسية أو الأفقية قبل إجراء الانعكاس في محور السينات؟

لا يمكننا ؛ لأننا سوف نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب.

مثال: للحصول على $f(x) = -|x+1| + 2$ نجري: انعكاسًا $(-|x|)$ ← إزاحة أفقية وحدة لليسار $(-|x+1|)$ ← إزاحة رأسية وحدتين لأعلى $(-|x+1| + 2)$.

أما إذا أجرينا: إزاحة أفقية $(|x+1|)$ ← إزاحة رأسية $(|x+1| + 2)$ ← انعكاسًا ، فنحصل على $-|x+1| - 2$ وهو منحنى مختلف.

أتدرّب وأحل المسائل

صح أو خطأ (درجة لكل بند)

ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة ، و (b) إذا كانت خاطئة:

1. بيان الدالة $f(x) = |x|$ ينطبق على بيان الدالة $g(x) = x$ — (a) (b)

2. بيان الدالة $g(x) = -|x|$ هو انعكاس لبيان الدالة $f(x) = |x|$ حول محور السينات — (a) (b)

3 بيان الدالة $f(x) = |x - 4| + 2$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان الدالة $g(x) = |x|$ 4 وحدات جهة اليمين ووحدتين للأعلى

a b

4 محور التماثل للدالة $f(x) = |x - 3|$ هو $x = 3$

a b

5 مدى الدالة $f(x) = |x + 3| - 3$ هو $[-3, \infty)$

a b

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

6 أي من الدوال التالية رأس منحناها $(-3, 2)$:

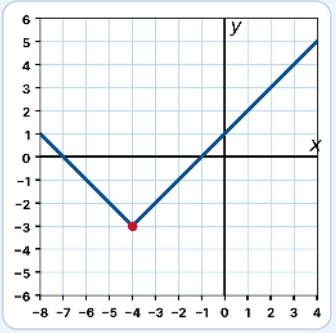
a $y = |x + 3| + 2$

b $y = |x - 3| + 2$

c $y = |x + 3| - 2$

d $y = |x - 3| - 2$

7 أي من قواعد الدوال التالية تمثل منحنى الدالة المرسوم:



a $y = |x - 4| - 3$

b $y = |x - 4| + 3$

c $y = |x + 4| + 3$

d $y = |x + 4| - 3$

تعليل الإجابات

(1) خطأ: ينطبقان فقط عندما $x \geq 0$ · **(7)** رأس المنحنى المرسوم $(-4, -3)$ فالقاعدة $y = |x + 4| - 3$

أسئلة المقال (1)

مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال التالية ثم حدّد مجالها ومداها

(a) $g(x) = |-3x|$

الحل

المجال: $\mathbb{R}$

$a = 3,\ b = 0,\ c = 0$

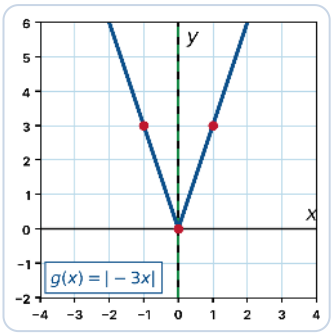
رأس المنحنى: $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = (0, 0)$

محور التماثل: $x = \frac{-b}{a}$

$x = 0$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[0, \infty)$

x	-1	0	1
y	3	0	3



(b) $h(x) = |x + 4|$

الحل

المجال: $\mathbb{R}$

$a = 1,\ b = 4,\ c = 0$

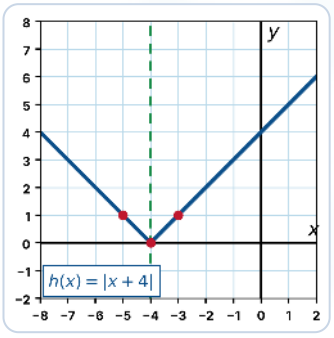
رأس المنحنى: $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = (-4, 0)$

محور التماثل: $x = \frac{-b}{a}$

$x = -4$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[0, \infty)$

x	-5	-4	-3
y	1	0	1



(c) $f(x) = 2|x - 4| - 6$

الحل

$2|x - 4| = |2x - 8|$

$f(x) = |2x - 8| - 6$

المجال: $\mathbb{R}$

$a = 2,\ b = -8,\ c = -6$

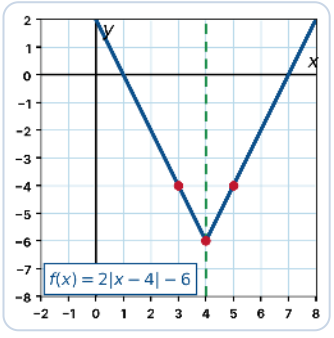
رأس المنحنى: $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = (4, -6)$

محور التماثل: $x = \frac{-b}{a}$

$x = 4$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[-6, \infty)$

x	3	4	5
y	-4	-6	-4



(d) $f(x) = 2|x|$

الحل

$$2|x| = |2x|$$

المجال: $\mathbb{R}$

$$a = 2,\ b = 0,\ c = 0$$

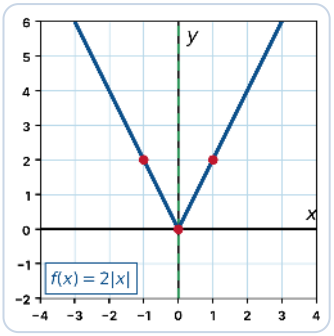
رأس المنحنى: $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = (0, 0)$

محور التماثل: $x = \frac{-b}{a}$

$$x = 0$$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[0, \infty)$

x	-1	0	1
y	2	0	2



(e) $g(x) = |x| + 3$

الحل

المجال: $\mathbb{R}$

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 3$$

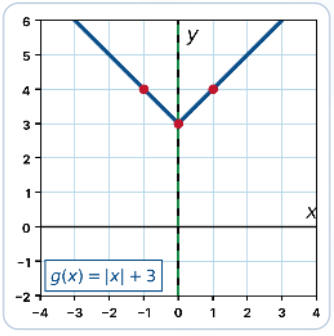
رأس المنحنى: $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = (0, 3)$

محور التماثل: $x = \frac{-b}{a}$

$$x = 0$$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[3, \infty)$

x	-1	0	1
y	4	3	4



أسئلة المقال (2)

ارسم بيانيًّا كلًّا من الدوال التالية مستخدمًا التحويلات الهندسية للدالة الأساسية $g(x) = |x|$

(a) $f(x) = |x + 5|$

الحل

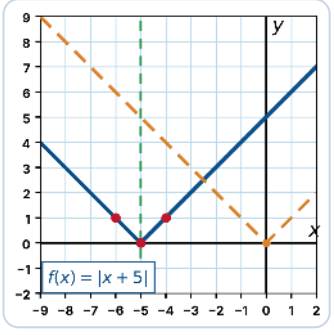
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع) ورأسها $(0, 0)$

إزاحة أفقية: 5 وحدة جهة اليسار

رأس المنحنى: $(-5, 0)$

محور التماثل: $x = -5$

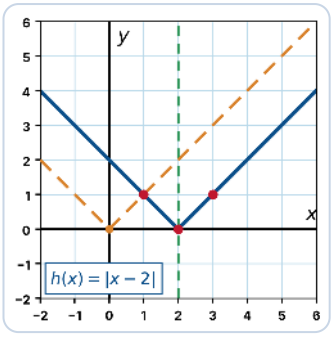
المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[0, \infty)$



(b) $h(x) = |x - 2|$

الحل

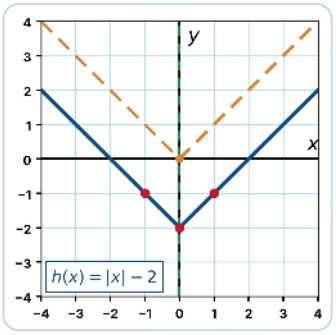
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
إزاحة أفقية: 2 وحدة جهة اليمين
رأس المنحنى: $(2, 0)$
محور التماثل: $x = 2$
المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[0, \infty)$



(c) $h(x) = |x| - 2$

الحل

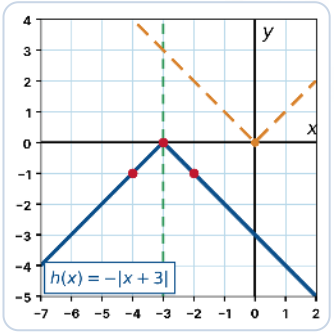
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
إزاحة رأسية: 2 وحدة لأسفل
رأس المنحنى: $(0, -2)$
محور التماثل: $x = 0$
المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[-2, \infty)$



(d) $h(x) = -|x + 3|$

الحل

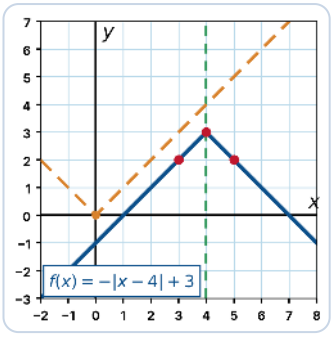
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع)
ورأسها $(0, 0)$
انعكاس في محور السينات
إزاحة أفقية: 3 وحدة جهة اليسار
رأس المنحنى: $(-3, 0)$
محور التماثل: $x = -3$
المنحنى مفتوح لأسفل ← المدى: $(-\infty, 0]$



(e) $f(x) = -|x-4| + 3$

الحل

دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع) ورأسها $(0, 0)$
انعكاس في محور السينات
إزاحة أفقية: 4 وحدة جهة اليمين
إزاحة رأسية: 3 وحدة لأعلى
رأس المنحنى: $(4, 3)$
محور التماثل: $x = 4$
المنحنى مفتوح لأسفل ← المدى: $(-\infty, 3]$

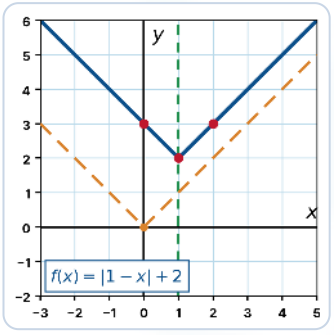


(f) $f(x) = |1-x| + 2$

الحل

$|1-x| = |x-1|$
$f(x) = |x-1| + 2$
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع) ورأسها $(0, 0)$
إزاحة أفقية: 1 وحدة جهة اليمين
إزاحة رأسية: 2 وحدة لأعلى
رأس المنحنى: $(1, 2)$
محور التماثل: $x = 1$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[2, \infty)$



أسئلة المقال (3)

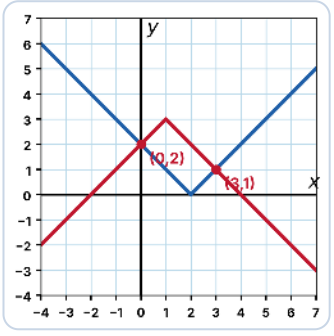
ارسم بيانيًا كلًا من الدالتين على نفس المستوى الإحداثي ، ثم أوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطعهما

(a) $g(x) = -|x-1| + 3$ ، $f(x) = |x-2|$

الحل

منحنى f : رأسه $(2, 0)$ ومفتوح لأعلى (الأزرق)
منحنى g : رأسه $(1, 3)$ ومفتوح لأسفل (الأحمر)
من الرسم: نقطتا التقاطع $(0, 2)$ ، $(3, 1)$
التحقق:
$f(0) = |0-2| = 2$
$g(0) = -|0-1| + 3 = 2$
$f(3) = |3-2| = 1$
$g(3) = -|3-1| + 3 = 1$

الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع: $x = 0$ ، $x = 3$



(b) $f(x) = |x-3|$ ، $g(x) = 3-|x|$

الحل

منحنى f : رأسه $(3, 0)$ ومفتوح لأعلى (الأزرق)
منحنى $g(x) = -|x|+3$: رأسه $(0, 3)$ ومفتوح لأسفل (الأحمر)

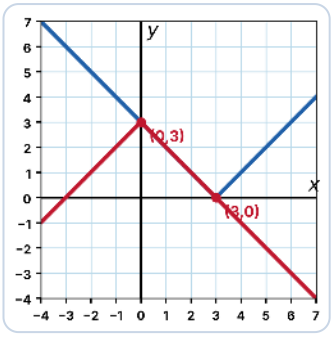
من الرسم: المنحنيان ينطبقان على القطعة المستقيمة الواصلة بين $(0, 3)$ و $(3, 0)$

التحقق: عندما $0 \le x \le 3$:

$$f(x) = -(x-3) = 3-x$$
$$g(x) = 3-x$$

يتقاطع المنحنيان عند جميع قيم x التي تحقق $0 \le x \le 3$

أي $x \in [0, 3]$



(c) $f(x) = |x-2|-3$ ، $g(x) = 4-|x-2|$

الحل

منحنى f : رأسه $(2, -3)$ ومفتوح لأعلى (الأزرق)
منحنى $g(x) = -|x-2|+4$: رأسه $(2, 4)$ ومفتوح لأسفل (الأحمر)

من الرسم: التقاطع عند $x = -\frac{3}{2}$ ، $x = \frac{11}{2}$

التحقق جبريًا:

$$|x-2|-3 = 4-|x-2|$$
$$|x-2|+|x-2| = 4+3$$
$$2|x-2| = 7$$
$$|x-2| = \frac{7}{2}$$

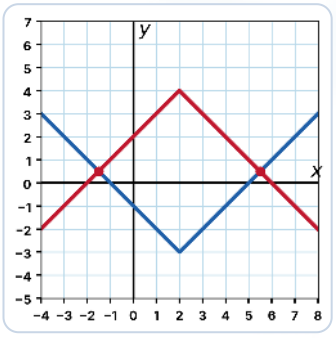
إما

$$x-2 = \frac{7}{2}$$
$$x = \frac{7}{2}+2$$
$$x = \frac{11}{2}$$

أو

$$x-2 = -\frac{7}{2}$$
$$x = -\frac{7}{2}+2$$
$$x = -\frac{3}{2}$$

الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع: $x = -\frac{3}{2}$ ، $x = \frac{11}{2}$



مهارات تفكير عليا

(1) ارسم بيان الدالة: $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$

الحل

$$\sqrt{x^2} = |x|$$
$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

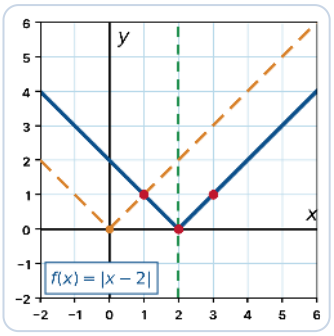
دالة المرجع: $g(x) = |x|$ (المنحنى المتقطع) ورأسها $(0, 0)$

إزاحة أفقية: 2 وحدة جهة اليمين

رأس المنحنى: $(2, 0)$

محور التماثل: $x = 2$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[0, \infty)$



(a-2) مثّل الدالة بيانيًّا ثم حدّد مجالها ومداها: $f(x) = 3 - |2x|$

الحل

$$f(x) = -|2x| + 3$$

المجال: $\mathbb{R}$

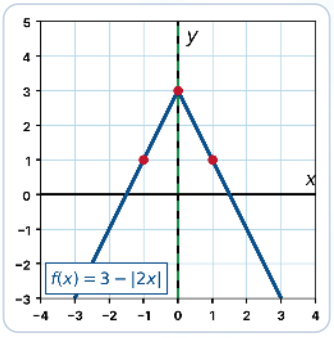
$a = 2,\ b = 0,\ c = 3$

رأس المنحنى: $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = (0, 3)$

محور التماثل: $x = \frac{-b}{a}$
$x = 0$

المنحنى مفتوح لأسفل ← المدى: $(-\infty, 3]$

1	0	−1	x
1	3	1	y



(b-2) مثّل الدالة بيانيًّا ثم حدّد مجالها ومداها: $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

الحل

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$
$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$$

المجال: $\mathbb{R}$

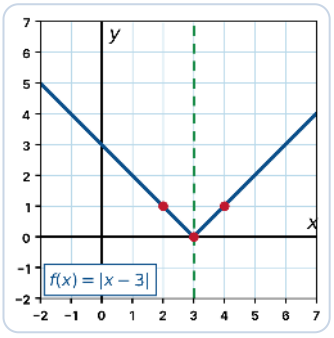
$a = 1,\ b = -3,\ c = 0$

رأس المنحنى: $\left(\frac{-b}{a}, c\right) = (3, 0)$

محور التماثل: $x = \frac{-b}{a}$
$x = 3$

المنحنى مفتوح لأعلى ← المدى: $[0, \infty)$

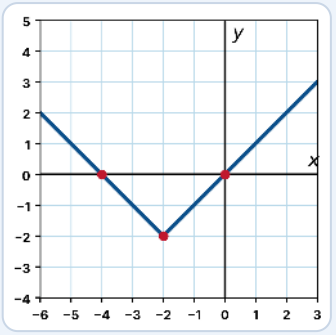
4	3	2	x
1	0	1	y



اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

1 المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = |x + 2| - 2$ ومحور السينات تساوي ..... وحدة مربعة:



(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 4

التعليل علّل إجابتك عن البند السابق.

الحل

المنطقة مثلث رؤوسه $(-4, 0)$ ، $(0, 0)$ ، $(-2, -2)$

المساحة = الارتفاع $\times$ القاعدة $\times \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2$$

$$= 4 \text{ وحدات مربعة}$$

🌟 أحسنت! أنهيت البند (1-1) بنجاح 👏

البند (2-1): حل معادلة القيمة المطلقة — Solving Absolute Value Equations

💡 فكرة الدرس
حل معادلة القيمة المطلقة جبريًا على الصورة: ① $|ax+b|=|cx+d|$ ② $|ax+b|=cx+d$

📚 تعلمنا فيما سبق
حل معادلات من الدرجة الأولى · حل معادلات تربيعية · حل معادلات القيمة المطلقة.

📝 المصطلحات
معادلة القيمة المطلقة (Absolute Value Equation) · مجموعة الحل (Solution Set — S.S)

🔍 ملحوظة
مجموعة حل المعادلة ويرمز لها بالرمز $S.S$ هي مجموعة جميع قيم المتغيرات التي تجعل المعادلة صحيحة.

📖 مسألة الدرس
أراد حمد أن يشتري كرة قدم للمباراة التي ستقام في ملعب المدرسة ، فلنساعد حمدًا لإيجاد الكرة المناسبة ، علمًا بأن الكتلة المثالية لكرة القدم هي $430\ g$ ويسمح أن تزيد أو تنقص عن هذه الكتلة بمقدار $20\ g$.

① ما أكبر كتلة يمكن أن تكون لكرة القدم؟ $430+20=450\ g$

② ما أقل كتلة يمكن أن تكون لكرة القدم؟ $430-20=410\ g$

③ اكتب معادلة قيمة مطلقة تمثل الموقف: بفرض أن كتلة الكرة x : $|x-430|=20$ ومجموعة حلها $\{410, 450\}$

⚖️ معادلات القيمة المطلقة (Absolute Value Equation)

📌 معادلة القيمة المطلقة
هي معادلة تتضمن تعبيرًا جبريًا داخل رمز القيمة المطلقة. ومن تعريف القيمة المطلقة يمكن تحويل معادلة القيمة المطلقة إلى معادلتين مرتبطتين بها لا تحتويان على رمز القيمة المطلقة ، وذلك بجعل العبارة التي داخل القيمة المطلقة موجبًا مرة وسالبًا مرة أخرى.

⋆ مفهوم أساسي: حل معادلات القيمة المطلقة
لحل المعادلة $|ax+b|=c$ حيث $c\geq 0$ نحل المعادلتين المرتبطتين بها وهما:

إما $ax+b=c$ أو $ax+b=-c$

حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=c\ ,\ c\geq 0$

📌 تعلمنا فيما سبق أن حل معادلة القيمة المطلقة
① $|x|=A$: إذا كان $A>0$ فإن للمعادلة حلّين هما $x=A$ أو $x=-A$ ، $S.S=\{-A, A\}$

② $|x|=0$: للمعادلة حل وحيد هو $x=0$ ، $S.S=\{0\}$

③ $|x|=A$: إذا كان $A<0$ فإن المعادلة ليس لها حل ، $S.S=\emptyset$

مثال توضيحي (a) أوجد مجموعة الحل: $|x-3|=2$

الحل

إما
$$x-3=2$$
$$x=2+3$$
$$x=5$$

أو
$$x-3=-2$$
$$x=-2+3$$
$$x=1$$

$$S.S=\{1,5\}$$

مثال توضيحي (b) أوجد مجموعة الحل: $|3x+2|=0$

الحل

$$3x+2=0$$
$$3x=-2$$
$$x=-\frac{2}{3}$$
$$S.S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

مثال توضيحي (c) أوجد مجموعة الحل: $|5x+2|=-4$

الحل

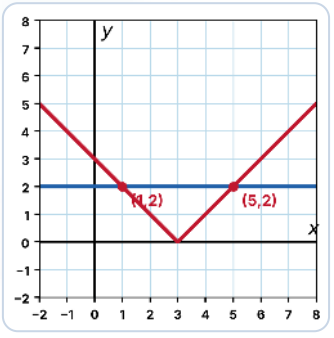
$-4<0$

القيمة المطلقة لا تكون سالبة

$$S.S=\emptyset$$

بيانيًا من المثال التوضيحي (a) بيانيًا: $f_1(x)=|x-3|$ ، $f_2(x)=2$

الحل



نقطتا التقاطع عند $x=1$ و $x=5$ ، وهما حلّا المعادلة.

تذكّر

① إذا كان $|x|=x$ فإن $x\geq 0$ ، $x\in[0,\infty)$ ② إذا كان $|x|=-x$ فإن $x\leq 0$ ، $x\in(-\infty,0]$

انتبه

$|a|=|b|\Leftrightarrow a=b$ أو $a=-b$ · $|a|=|b|\Leftrightarrow a^2=b^2$

📌 **خواص القيمة المطلقة:** لكل $a, b \in \mathbb{R}$ فإن

① $|a| \geq 0$ ② $|a+b| \leq |a| + |b|$ ③ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ④ $|x-a| = |a-x|$

⑤ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$ ⑥ $|x| = |-x|$ ⑦ $|a|^n = a^n$ حيث n عدد زوجي ⑧ $\sqrt{x^2} = |x|$ لأي عدد حقيقي x

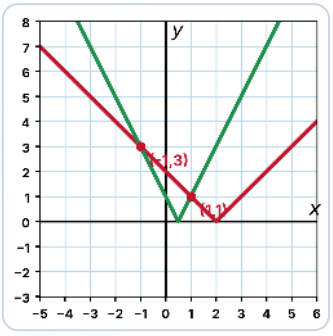
أولًا: حل المعادلة على الصورة $|ax+b| = |cx+d|$

نشاط ① ارسم بيان الدالة $f(x) = |x-2|$ وبيان الدالة $g(x) = |2x-1|$ على نفس المستوى الإحداثي ، مستخدمًا إحداثيَّي رأس المنحنى ومحور التماثل في كلٍّ منهما.

الحل

x	1	2	3
$f(x)$	1	0	1

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g(x)$	1	0	1



② من الرسم: الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين $f(x), g(x)$ هي $x_1 = -1$ ، $x_2 = 1$

③ تسمى مجموعة الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين مجموعة حل المعادلة $|x-2| = |2x-1|$ أي أن مجموعة حل المعادلة هي $\{-1, 1\}$

وهذه الطريقة تسمى الطريقة البيانية لحل المعادلة.

مثال (1) أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-2| = |2x-1|$

الحل

الحل الأول (باستخدام خواص القيمة المطلقة):

نعلم أن $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$

إما	أو
$x-2 = 2x-1$	$x-2 = -(2x-1)$
$x-2x = -1+2$	$x-2 = -2x+1$
$-x = 1$	$x+2x = 1+2$
$x = -1$	$3x = 3$
	$x = \frac{3}{3} = 1$

$S.S = \{1, -1\}$

الحل الآخر (بتربيع الطرفين):

$(|x-2|)^2 = (|2x-1|)^2$

بفك التربيع ← $x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 4x + 1$

جعل المعادلة صفرية ← $4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 4x - 4 = 0$

جمع الحدود المتشابهة ← $3x^2 - 3 = 0$

$3(x^2 - 1) = 0$

بالتحليل ← $3(x-1)(x+1) = 0$

إما	أو
$x-1 = 0$	$x+1 = 0$
$x = 1$	$x = -1$

$S.S = \{-1, 1\}$

🧠 **تذكّر**

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ · $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ · إذا كان $|a| = |b|$ فإن $|a|^2 = |b|^2$

انتبه ⚠️

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{1} \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

تحقق من فهمك (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة

(1) $|x-1|=|x+2|$

الحل

إما
$$x-1=x+2$$
$$x-x=2+1$$
$$0=3$$
عبارة خاطئة ، لا يوجد حل

أو
$$x-1=-(x+2)$$
$$x-1=-x-2$$
$$x+x=-2+1$$
$$2x=-1$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

$$S.S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

ملحوظة 🔍

سوف تقتصر دراستنا على الحل الجبري الذي يعتمد على خواص القيمة المطلقة أو بعض العمليات الجبرية.

مثال (2-a) أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x+4|=|x-3|$ (باستخدام خواص القيمة المطلقة)

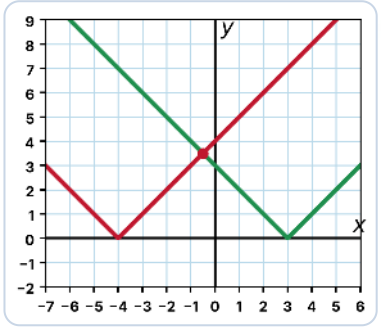
الحل

نعلم أن $|a|=|b| \Leftrightarrow a=\pm b$

إما
$$x+4=x-3$$
$$x-x=-3-4$$
$$0=-7$$
عبارة خاطئة ، لا يوجد حل

أو
$$x+4=-(x-3)$$
$$x+4=-x+3$$
$$x+x=3-4$$
$$2x=-1$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

$$S.S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$



مثال (b-2) أوجد مجموعة حل المعادلة: $|2y+1| = |3y+4|$ (بتربيع الطرفين)

الحل

$$(|2y+1|)^2 = (|3y+4|)^2$$

بفك التربيع ← $4y^2 + 4y + 1 = 9y^2 + 24y + 16$

جعل المعادلة صفرية ← $9y^2 + 24y + 16 - 4y^2 - 4y - 1 = 0$

جمع الحدود المتشابهة ← $5y^2 + 20y + 15 = 0$

$$5(y^2 + 4y + 3) = 0$$

بالتحليل ← $5(y+1)(y+3) = 0$

إما	أو
$y + 1 = 0$	$y + 3 = 0$
$y = -1$	$y = -3$

$$S.S = \{-3, -1\}$$

⚠️ انتبه

يمكنك حل المعادلة باستخدام: خواص القيمة المطلقة ، أو تربيع الطرفين. وهذا ما يسمى بالحل الجبري.

🎯 تحقق من فهمك (2)

أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات التالية

(a) $|y-4| = |2y-5|$

الحل

إما	أو
$y - 4 = 2y - 5$	$y - 4 = -(2y - 5)$
$y - 2y = -5 + 4$	$y - 4 = -2y + 5$
$-y = -1$	$y + 2y = 5 + 4$
$y = 1$	$3y = 9$
	$y = \frac{9}{3} = 3$

$$S.S = \{3, 1\}$$

(b) $|2x-3| = |x+1|$

الحل

إما	أو
$2x - 3 = x + 1$	$2x - 3 = -(x + 1)$
$2x - x = 1 + 3$	$2x - 3 = -x - 1$
$x = 4$	$2x + x = -1 + 3$
	$3x = 2$
	$x = \frac{2}{3}$

$$S.S = \left\{4, \frac{2}{3}\right\}$$

(c) $|3y+1| = |y-2|$

الحل

إما
$3y+1 = y-2$
$3y-y = -2-1$
$2y = -3$
$y = -\frac{3}{2}$

أو
$3y+1 = -(y-2)$
$3y+1 = -y+2$
$3y+y = 2-1$
$4y = 1$
$y = \frac{1}{4}$

$S.S = \left\{\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}\right\}$

(d) $|x-4| = |2x-5|$

الحل

إما
$x-4 = 2x-5$
$x-2x = -5+4$
$-x = -1$
$x = 1$

أو
$x-4 = -(2x-5)$
$x-4 = -2x+5$
$x+2x = 5+4$
$3x = 9$
$x = \frac{9}{3} = 3$

$S.S = \{3, 1\}$

ثانيًا: حل المعادلة على الصورة $|ax+b| = cx+d$

مثال (3) أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-3| = 3x-1$

الحل

القيمة المطلقة دائمًا غير سالبة ، فيجب أن يكون الطرف الأيسر غير سالب ، وهذا ما نسميه شرط الحل:

شرط الحل
$3x-1 \geq 0$
$3x \geq 1$
$x \geq \frac{1}{3}$
$x \in \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

إما
$x-3 = 3x-1$
$x-3x = -1+3$
$-2x = 2$
$x = \frac{2}{-2} = -1$
$-1 \notin \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$ ✗ مرفوض

أو
$x-3 = -(3x-1)$
$x-3 = -3x+1$
$x+3x = 1+3$
$4x = 4$
$x = \frac{4}{4} = 1$
✔ $1 \in \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

$S.S = \{1\}$

تذكّر

① $|x| = c\ ,\ c \geq 0$ دائمًا ② $c > 0$ ③ $cx+d \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-d}{c}$ شرط الحل هو ما يسمى بمجموعة التعويض (مجال الدالة)

تحقق من فهمك (3)

أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات التالية

(a) $|2x-1| = x+2$

الحل

شرط الحل
$x+2 \geq 0$
$x \geq -2$
$x \in [-2, \infty)$

إما	أو
$2x-1 = x+2$	$2x-1 = -(x+2)$
$2x-x = 2+1$	$2x-1 = -x-2$
$x = 3$	$2x+x = -2+1$
✔ $3 \in [-2, \infty)$	$3x = -1$
	$x = -\frac{1}{3}$
	✔ $-\frac{1}{3} \in [-2, \infty)$

$S.S = \left\{3, -\frac{1}{3}\right\}$

(b) $|2x+5| = x+5$

الحل

شرط الحل
$x+5 \geq 0$
$x \geq -5$
$x \in [-5, \infty)$

إما	أو
$2x+5 = x+5$	$2x+5 = -(x+5)$
$2x-x = 5-5$	$2x+5 = -x-5$
$x = 0$	$2x+x = -5-5$
✔ $0 \in [-5, \infty)$	$3x = -10$
	$x = -\frac{10}{3}$
	✔ $-\frac{10}{3} \in [-5, \infty)$

$S.S = \left\{0, -\frac{10}{3}\right\}$

مثال (a-4) أوجد مجموعة حل المعادلة:

$$|4x+2| = 1-2x$$

الحل

شرط الحل

$$-2x+1 \geq 0$$
$$-2x \geq -1$$
$$x \leq \frac{1}{2}$$
$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

إما

$$4x+2 = -2x+1$$
$$4x+2x = 1-2$$
$$6x = -1$$
$$x = -\frac{1}{6}$$
$$-\frac{1}{6} \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$
✔

أو

$$4x+2 = -(-2x+1)$$
$$4x+2 = 2x-1$$
$$4x-2x = -1-2$$
$$2x = -3$$
$$x = -\frac{3}{2}$$
$$-\frac{3}{2} \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$
✔

$$S.S = \left\{-\frac{1}{6}, -\frac{3}{2}\right\}$$

مثال (b-4) أوجد مجموعة حل المعادلة:

$$|x+4| + 2x + 3 = 0$$

الحل

$$|x+4| = -2x-3$$

شرط الحل

$$-2x-3 \geq 0$$
$$-2x \geq 3$$
$$x \leq -\frac{3}{2}$$
$$x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$$

إما

$$x+4 = -2x-3$$
$$x+2x = -3-4$$
$$3x = -7$$
$$x = -\frac{7}{3}$$
$$-\frac{7}{3} \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$$
✔

أو

$$x+4 = -(-2x-3)$$
$$x+4 = 2x+3$$
$$x-2x = 3-4$$
$$-x = -1$$
$$x = 1$$
$$1 \notin \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$$
✖ مرفوض

$$S.S = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$$

انتبه ⚠

إذا كانت $c < 0$, $a > b$ فإن $a \cdot c < b \cdot c$

$$|3-x| = |x-3| \cdot |4x+2| = 4\left|x+\frac{1}{2}\right|$$

$$x^2 = |x|^2 \cdot \sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| \cdot |3x-9| = 3|x-3|$$

تحقق من فهمك (4)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية

(a) $|2\ell - 3| = |4\ell - 1|$

الحل

إما
$$2\ell - 3 = 4\ell - 1$$
$$2\ell - 4\ell = -1 + 3$$
$$-2\ell = 2$$
$$\ell = \frac{2}{-2} = -1$$

أو
$$2\ell - 3 = -(4\ell - 1)$$
$$2\ell - 3 = -4\ell + 1$$
$$2\ell + 4\ell = 1 + 3$$
$$6\ell = 4$$
$$\ell = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S.S = \left\{\frac{2}{3}, -1\right\}$$

(b) $|3x - 1| + 4x - 13 = 0$

الحل

$$|3x - 1| = 13 - 4x$$

شرط الحل
$$-4x + 13 \geq 0$$
$$-4x \geq -13$$
$$x \leq \frac{13}{4}$$
$$x \in \left(-\infty, \frac{13}{4}\right]$$

إما
$$3x - 1 = -4x + 13$$
$$3x + 4x = 13 + 1$$
$$7x = 14$$
$$x = \frac{14}{7} = 2$$
$$\checkmark\ 2 \in \left(-\infty, \frac{13}{4}\right]$$

أو
$$3x - 1 = -(-4x + 13)$$
$$3x - 1 = 4x - 13$$
$$3x - 4x = -13 + 1$$
$$-x = -12$$
$$x = 12$$
$$\times\ 12 \notin \left(-\infty, \frac{13}{4}\right]$$
مرفوض

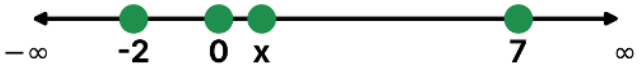
$$S.S = \{2\}$$

استخدام النماذج

نموذج يقع منزل سعد بين مدرسته والنادي الرياضي ، وتوجد هذه المواقع الثلاثة على خط مستقيم يمر بحديقة الأحمدي. تبعد المدرسة عن الحديقة $2\ km$ ويبعد النادي الرياضي عن الحديقة $7\ km$ في الاتجاه المعاكس. كم يبعد منزل سعد عن الحديقة إذا كان البعد بين المنزل والنادي الرياضي ضعف البعد بين المنزل والمدرسة؟

الحل

نمثل المواقع على خط الأعداد: الحديقة عند 0 ، المدرسة عند -2 ، النادي عند 7 ، وليكن x موقع منزل سعد.



البعد بين المنزل والمدرسة:
$|x-(-2)| = |x+2|$
البعد بين المنزل والنادي: $|7-x| = |x-7|$
$|x-7| = 2|x+2|$
(خواص القيمة المطلقة) $|x-7| = |2x+4|$

إما
$$\begin{aligned} x-7 &= 2x+4 \\ x-2x &= 4+7 \\ -x &= 11 \\ x &= -11 \end{aligned}$$

أو
$$\begin{aligned} x-7 &= -(2x+4) \\ x-7 &= -2x-4 \\ x+2x &= -4+7 \\ 3x &= 3 \\ x &= \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

$x = -11$ مرفوضة ، لأن منزل سعد يقع بين المدرسة والنادي أي $-2 < x < 7$
$x = 1$ مقبولة
يبعد منزل سعد عن الحديقة $1\ km$ في اتجاه النادي الرياضي.

تذكّر
$$2|A| = |2| \cdot |A| = |2A| \cdot |a| \cdot |b| = |a \cdot b| \cdot |a-b| = |b-a| \ : \forall a, b \in \mathbb{R}$$

أتدرّب وأحل المسائل

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)
ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

1 حل المعادلة $|2x-1| = x+3$ هو:

(a) $x = 1$
(b) $x = 4$ أو $x = -\frac{2}{3}$
(c) $x = -1$
(d) لا يوجد حل

2 حل المعادلة $|x+2| = x+2$ هو:

(a) $x = -2$
(b) $x \in (-2, \infty)$
(c) $x \in [-2, \infty)$
(d) $\emptyset$

3 حل المعادلة $|x-3| = |x+1|$ هو:

(a) $x = \pm 1$
(b) $x = -1$
(c) $x = 1$
(d) $x = 2$

4 مجموعة حل المعادلة $|x-3|=|3-x|$ هي:

(a) $\{3\}$ (b) $\{-3,3\}$ (c) $\mathbb{R}$ (d) $\emptyset$

5 حل المعادلة $|x-4|=|4-x|$ هو:

(a) $x=-4$ (b) $x=4$

(c) $\mathbb{R}$ (d) لا يوجد حل

6 حل المعادلة $|2x-3|=|x+3|$ هو:

(a) $x=0\ ,\ x=6$ (b) $x=-5\ ,\ x=0$

(c) $x=5\ ,\ x=6$ (d) $x=\pm 6$

7 مجموعة حل المعادلة $|x-2|+x=2$ هي:

(a) $\emptyset$ (b) $(-\infty,2)$ (c) $(-\infty,2]$ (d) $\{2\}$

تعليل الإجابات

(1) $2x-1=x+3\Rightarrow x=4$ أو $2x-1=-x-3\Rightarrow x=-\frac{2}{3}$ ، والحلان يحققان الشرط $x\geq -3$

(2) $|x+2|=x+2$ عندما $x+2\geq 0$ أي $x\geq -2$ · **(3)** $x-3=-(x+1)\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1$ (والحالة الأخرى $-3=1$ خاطئة) · **(4)** و **(5)** لأن $|x-a|=|a-x|$ لكل $x\in\mathbb{R}$ · **(6)** $2x-3=x+3\Rightarrow x=6$ أو $2x-3=-x-3\Rightarrow x=0$ ·

(7) $|x-2|=2-x=-(x-2)$ ويتحقق عندما $x-2\leq 0$ أي $x\leq 2$

أسئلة المقال

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية

(a) $|x-2|=|x+4|$

الحل

إما
$x-2=x+4$
$x-x=4+2$
$0=6$
عبارة خاطئة ، لا يوجد حل

أو
$x-2=-(x+4)$
$x-2=-x-4$
$x+x=-4+2$
$2x=-2$
$x=\frac{-2}{2}=-1$

$S.S=\{-1\}$

(b) $|x-4|=|x+2|$

الحل

إما
$x-4=x+2$
$x-x=2+4$
$0=6$
عبارة خاطئة ، لا يوجد حل

أو
$x-4=-(x+2)$
$x-4=-x-2$
$x+x=-2+4$
$2x=2$
$x=\frac{2}{2}=1$

$S.S=\{1\}$

(c) $|4-5x|+|3x+1|=0$

الحل

مجموع قيمتين مطلقتين (كل منهما ≥ 0) يساوي صفرًا
فيجب أن يكون في الوقت نفسه:

$4-5x=0$ و $3x+1=0$

$x=\frac{4}{5}$ و $x=-\frac{1}{3}$

وهذا مستحيل

$S.S=\emptyset$

(d) $|x-3|=2x-1$

الحل

شرط الحل

$2x-1\geq 0$

$2x\geq 1$

$x\geq \frac{1}{2}$

$x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)$

إما

$x-3=2x-1$

$x-2x=-1+3$

$-x=2$

$x=-2$

$-2\notin\left[\frac{1}{2},\infty\right)$ ✗

مرفوض

أو

$x-3=-(2x-1)$

$x-3=-2x+1$

$x+2x=1+3$

$3x=4$

$x=\frac{4}{3}$

$\frac{4}{3}\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)$ ✔

$S.S=\left\{\frac{4}{3}\right\}$

(e) $|2y+3|=3y-2$

الحل

شرط الحل

$3y-2\geq 0$

$3y\geq 2$

$y\geq \frac{2}{3}$

$y\in\left[\frac{2}{3},\infty\right)$

إما

$2y+3=3y-2$

$2y-3y=-2-3$

$-y=-5$

$y=5$

$5\in\left[\frac{2}{3},\infty\right)$ ✔

أو

$2y+3=-(3y-2)$

$2y+3=-3y+2$

$2y+3y=2-3$

$5y=-1$

$y=-\frac{1}{5}$

$-\frac{1}{5}\notin\left[\frac{2}{3},\infty\right)$ ✗

مرفوض

$S.S=\{5\}$

(f) $|x-1| = 5x + 10$

الحل

شرط الحل

$$5x + 10 \geq 0$$
$$5x \geq -10$$
$$x \geq -2$$
$$x \in [-2, \infty)$$

إما

$$x - 1 = 5x + 10$$
$$x - 5x = 10 + 1$$
$$-4x = 11$$
$$x = -\frac{11}{4}$$

✖ $-\frac{11}{4} \notin [-2, \infty)$

مرفوض

أو

$$x - 1 = -(5x + 10)$$
$$x - 1 = -5x - 10$$
$$x + 5x = -10 + 1$$
$$6x = -9$$
$$x = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}$$

✔ $-\frac{3}{2} \in [-2, \infty)$

$$S.S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

(g) $|2i - 3| = 4i - 1$

الحل

شرط الحل

$$4i - 1 \geq 0$$
$$4i \geq 1$$
$$i \geq \frac{1}{4}$$
$$i \in \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$$

إما

$$2i - 3 = 4i - 1$$
$$2i - 4i = -1 + 3$$
$$-2i = 2$$
$$i = \frac{2}{-2} = -1$$

✖ $-1 \notin \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$

مرفوض

أو

$$2i - 3 = -(4i - 1)$$
$$2i - 3 = -4i + 1$$
$$2i + 4i = 1 + 3$$
$$6i = 4$$
$$i = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

✔ $\frac{2}{3} \in \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$

$$S.S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

(h) $|3y-7|=2y-5$

الحل

شرط الحل
$2y-5\geq 0$
$2y\geq 5$
$y\geq \frac{5}{2}$
$y\in\left[\frac{5}{2},\infty\right)$

إما
$3y-7=2y-5$
$3y-2y=-5+7$
$y=2$
✖ $2\notin\left[\frac{5}{2},\infty\right)$
مرفوض

أو
$3y-7=-(2y-5)$
$3y-7=-2y+5$
$3y+2y=5+7$
$5y=12$
$y=\frac{12}{5}$
✖ $\frac{12}{5}\notin\left[\frac{5}{2},\infty\right)$
مرفوض

$S.S=\emptyset$

(i) $\frac{1}{2}|8x-2|=x+2$

الحل

$\frac{1}{2}|8x-2|=\left|\frac{1}{2}(8x-2)\right|=|4x-1|$
$|4x-1|=x+2$

شرط الحل
$x+2\geq 0$
$x\geq -2$
$x\in[-2,\infty)$

إما
$4x-1=x+2$
$4x-x=2+1$
$3x=3$
$x=\frac{3}{3}=1$
✔ $1\in[-2,\infty)$

أو
$4x-1=-(x+2)$
$4x-1=-x-2$
$4x+x=-2+1$
$5x=-1$
$x=-\frac{1}{5}$
✔ $-\frac{1}{5}\in[-2,\infty)$

$S.S=\left\{1,-\frac{1}{5}\right\}$

(j) $|x+4|+23=17$

الحل

$|x+4|=17-23$
$|x+4|=-6$
$-6<0$ والقيمة المطلقة لا تكون سالبة
$S.S=\emptyset$

(k) $|2x+6| = x-3$

الحل

شرط الحل

$x - 3 \geq 0$
$x \geq 3$
$x \in [3, \infty)$

إما

$2x + 6 = x - 3$
$2x - x = -3 - 6$
$x = -9$
$-9 \notin [3, \infty)$ ✗ مرفوض

أو

$2x + 6 = -(x - 3)$
$2x + 6 = -x + 3$
$2x + x = 3 - 6$
$3x = -3$
$x = \frac{-3}{3} = -1$
$-1 \notin [3, \infty)$ ✗ مرفوض

$S.S = \emptyset$

مهارات تفكير عليا

(1) حل المعادلة مستخدمًا خواص القيمة المطلقة: $(x+5)^2 = 9$

الحل

$\sqrt{(x+5)^2} = \sqrt{9}$
$|x+5| = 3$

إما

$x + 5 = 3$
$x = 3 - 5$
$x = -2$

أو

$x + 5 = -3$
$x = -3 - 5$
$x = -8$

$S.S = \{-8, -2\}$

(a-2) أوجد مجموعة حل المعادلة: $|3x-9| - |3-x| = 10$

الحل

$|3x - 9| = 3|x - 3|$
$|3 - x| = |x - 3|$
$3|x - 3| - |x - 3| = 10$
$2|x - 3| = 10$
$|x - 3| = 5$

إما

$x - 3 = 5$
$x = 5 + 3$
$x = 8$

أو

$x - 3 = -5$
$x = -5 + 3$
$x = -2$

$S.S = \{-2, 8\}$

(b-2) أوجد مجموعة حل المعادلة: $\sqrt{x^2-2x+1}+x=5$

الحل

$$\sqrt{(x-1)^2}+x=5$$
$$|x-1|=5-x$$

شرط الحل
$-x+5\geq 0$
$-x\geq -5$
$x\leq 5$
$x\in(-\infty,5]$

إما
$x-1=-x+5$
$x+x=5+1$
$2x=6$
$x=\frac{6}{2}=3$
✔ $3\in(-\infty,5]$

أو
$x-1=-(-x+5)$
$x-1=x-5$
$x-x=-5+1$
$0=-4$

عبارة خاطئة ، لا يوجد حل

$S.S=\{3\}$

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)
ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت مجموعة حل المعادلة $|x-a|=b$ هي $\{5,11\}$ فإن $(a,b)=$

(a) $(-8,3)$ (b) $(-3,8)$ (c) $(8,3)$ (d) $(3,8)$

التعليل علّل إجابتك عن البند السابق.

الحل

$x=a\pm b$
$a+b=11$
$a-b=5$
بالجمع: $2a=16$
$a=8$
$b=11-8=3$

📋 **خلاصة البند (2-1): طرق الحل**
① $|ax+b|=c$: إذا $c>0$ حلان $ax+b=\pm c$ · إذا $c=0$ حل واحد · إذا $c<0$ فإن $S.S=\emptyset$
② $|ax+b|=|cx+d|$: إما $ax+b=cx+d$ أو $ax+b=-(cx+d)$ ، أو بتربيع الطرفين
③ $|ax+b|=cx+d$: نوجد شرط الحل $cx+d\geq 0$ ، ثم نحل الحالتين ، ونقبل ما يحقق الشرط فقط

🌟 أحسنت! أتقنت حل معادلات القيمة المطلقة 👏

البند (3-1): حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد «جبريًا وبيانيًا»

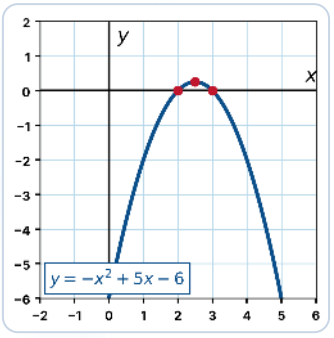
💡 فكرة الدرس
حل المعادلة التربيعية باستخدام القانون العام ، وبيانيًا.

📚 فيما سبق تعلمنا
التمثيل البياني للدالة · حل المعادلة التربيعية باستخدام التحليل وباستخدام إكمال المربع.

📝 المصطلحات
القانون العام (Quadratic Formula) · المميز (Discriminant)

📖 مسألة الدرس في الشكل يمثّل الماء الخارج من النافورة منحنى قطع مكافئ ، ويمكن تمثيل هذا المسار بالدالة التربيعية $y = -x^2 + 5x - 6$. ① أوجد الإحداثيات السينية لنقطتَي تقاطع المنحنى مع المحور السيني. ② أوجد إحداثيات الرأس (أعلى نقطة للمنحنى).

الحل



$$-x^2 + 5x - 6 = 0 \text{ ①}$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x-2)(x-3) = 0$$

إما	أو
$x - 2 = 0$	$x - 3 = 0$
$x = 2$	$x = 3$

$$x = \frac{-b}{2a} \text{ ②}$$
$$x = \frac{-5}{2(-1)} = \frac{5}{2}$$
$$y = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{2}\right) - 6$$
$$y = -\frac{25}{4} + \frac{50}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4}$$

الرأس: $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$

⋆ مفاهيم أساسية
① **الدالة الثابتة:** $f(x) = c\ ,\ c \in \mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الصفرية) وتمثيلها البياني خط مستقيم أفقي يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات عند القيمة c.
② **الدالة الخطية:** $f(x) = ax + b\ ,\ a \neq 0$ (دالة من الدرجة الأولى) وتمثيلها البياني خط مستقيم.
③ **الدالة التربيعية:** $f(x) = ax^2 + bx + c\ ,\ a \neq 0$ (دالة من الدرجة الثانية) تمثل قطعًا مكافئًا ، مفتوحًا لأعلى إذا كانت $a > 0$ ومفتوحًا لأسفل إذا كانت $a < 0$.

🧠 تذكّر
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

📈 حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (المعادلة التربيعية) بيانيًّا

📌 لحل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بيانيًّا نتبع الخطوات التالية

① ضع المعادلة على الصورة $ax^2+bx+c=0$

② افرض أن $f(x)=ax^2+bx+c$ ثم ارسم منحنى الدالة f

③ عيّن نقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات ، فتكون الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع هي حلول المعادلة $f(x)=0$

- المنحنى يقطع محور السينات في نقطتين ← يوجد حلان مختلفان ← عدد الحلول = **2**
- المنحنى يقطع محور السينات في نقطة واحدة ← يوجد حلان حقيقيان متساويان ← عدد الحلول = **1** (مكرر)
- المنحنى لا يقطع محور السينات ← لا يوجد حل للمعادلة ← عدد الحلول = **0**

🔍 ملحوظة

الدالة التربيعية تسمى (دالة القطع المكافئ) ، تتغير فتحة القطع المكافئ للأسفل إذا كان المعامل الرئيسي لها عددًا سالبًا. ومجموعة الحل هي الإحداثيات السينية لتقاطع المنحنى مع محور السينات.

✍️ مثال (1)

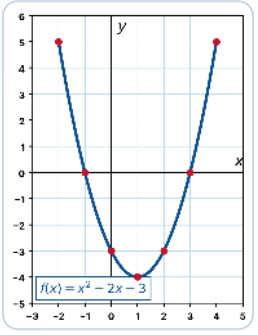
أوجد بيانيًّا مجموعة حل كل معادلة في $\mathbb{R}$ مستعينًا بالفترة الموضحة

(a) $x^2-2x-3=0\ ,\ [-2,4]$

الحل

نفرض أن $f(x)=x^2-2x-3$ ، ونكوّن جدول القيم:

x	4	3	2	1	0	-1	-2
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5



من الرسم:

الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات هي $x=3\ ،\ x=-1$

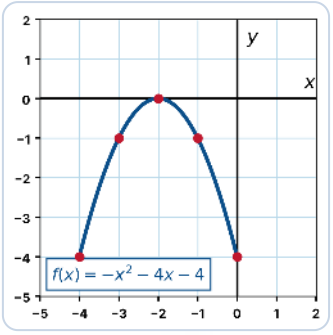
$S.S=\{-1,3\}$

(b) $-x^2-4x-4=0\ ,\ [-4,0]$

الحل

نفرض أن $f(x)=-x^2-4x-4$ ، ونكوّن جدول القيم:

x	0	−1	−2	−3	−4
$f(x)$	−4	−1	0	−1	−4



من الرسم:

الإحداثي السيني لنقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات هو $x=-2$

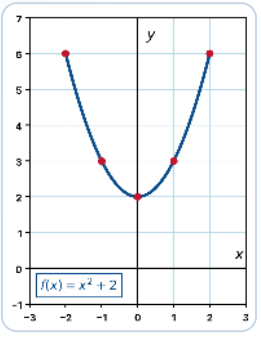
$S.S=\{-2\}$

(c) $x^2+2=0\ ,\ [-2,2]$

الحل

نفرض أن $f(x)=x^2+2$ ، ونكوّن جدول القيم:

x	2	1	0	−1	−2
$f(x)$	6	3	2	3	6



من الرسم:

المنحنى لا يقطع محور السينات نهائيًا

$S.S=\emptyset$

⚠️ **انتبه**

الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات هي التي عندها $f(x)=0$

تحقق من فهمك (1)

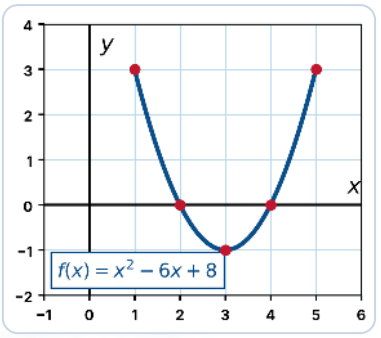
أوجد بيانيًّا مجموعة حل كل معادلة في $\mathbb{R}$ مستعينًا بالفترة الموضحة

(a) $x^2 - 6x + 8 = 0\ ,\ [1, 5]$

الحل

نفرض أن $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ، ونكوّن جدول القيم:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	0	−1	0	3



من الرسم:
الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع مع محور السينات هي $x = 2$ ، $x = 4$

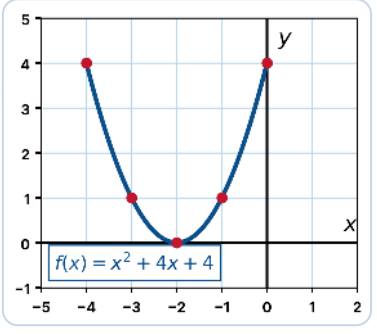
$S.S = \{2, 4\}$

(b) $x^2 + 4x + 4 = 0\ ,\ [-4, 0]$

الحل

نفرض أن $f(x) = x^2 + 4x + 4$ ، ونكوّن جدول القيم:

x	−4	−3	−2	−1	0
$f(x)$	4	1	0	1	4



من الرسم:
الإحداثي السيني لنقطة التقاطع مع محور السينات هو $x = -2$

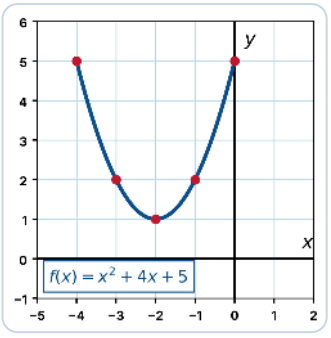
$S.S = \{-2\}$

$x^2 + 4x + 5 = 0\ ,\ [-4, 0]$ **(c)**

الحل

نفرض أن $f(x) = x^2 + 4x + 5$ ، ونكوّن جدول القيم:

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	5	2	1	2	5



من الرسم:
المنحنى لا يقطع محور السينات نهائيًا
$S.S = \emptyset$

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

تعلمنا سابقًا إيجاد حل المعادلة التربيعية باستخدام التحليل إلى عاملين وباستخدام إكمال المربع ، ولكن يوجد قانون عام لحل المعادلة التربيعية ، والآن سنقوم باستنتاج القانون العام لحل أي معادلة تربيعية.

استنتاج استنتاج القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

$ax^2 + bx + c = 0\ ,\ a \neq 0\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R}$

الحل

$ax^2 + bx = -c$ ← إضافة المعكوس الجمعي لـ c للطرفين

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ ← قسمة الطرفين على a

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ← بإكمال المربع

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ ← بتحليل الطرف الأيمن

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ ← بتوحيد المقام

$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\ ,\ b^2 - 4ac \geq 0$ ← بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$ ← بطرح $\frac{b}{2a}$ من الطرفين

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

★ القانون العام لحل المعادلات التربيعية في متغير واحد

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ,\ b^2 - 4ac \geq 0\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R}\ ,\ a \neq 0$$

يسمى المقدار $b^2 - 4ac$ مميز المعادلة التربيعية ويرمز له بالرمز Δ ويقرأ (دلتا) ، والمميز هو الذي يميّز نوع الجذرين ويحدد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة بدون حلها ، أي أن: $\Delta = b^2 - 4ac$

📊 نوع الجذرين حسب إشارة المميز

- $\Delta > 0$: للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان ← عدد الحلول = **2**
- $\Delta = 0$: للمعادلة جذران حقيقيان متساويان ← عدد الحلول = **1** (مكرر)
- $\Delta < 0$: لا يوجد للمعادلة جذور حقيقية ← عدد الحلول = **0**

⚠️ انتبه

المعادلة التربيعية مثل القفل له مفتاح ثابت ، والقانون العام هو المفتاح الذي يفتح أي معادلة تربيعية مهما كانت صعبة ، وهو خطة إنقاذ ثابتة لحل المعادلة التربيعية التي يستحيل حلها بالتحليل.

🧠 تذكّر: المربع الكامل

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ · $\sqrt{x^2} = |x|$ · $\sqrt{(x+a)^2} = |x+a|$ · إذا كان $|x+a| = c\ ,\ c > 0$ فإن $x + a = \pm c$

✍️ مثال (2)

حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة

(a) $4x^2 - 4x - 3 = 0$

الحل

$a = 4,\ b = -4,\ c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(-3)$

$\Delta = 64 > 0$

جذران حقيقيان مختلفان ← عدد الحلول = 2

(b) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

الحل

$a = 2,\ b = -4,\ c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(2)(2)$

$\Delta = 0$

جذران حقيقيان متساويان ← عدد الحلول = 1 (مكرر)

(c) $x^2 + 2x + 3 = 0$

الحل

$a = 1,\ b = 2,\ c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (2)^2 - 4(1)(3)$

$\Delta = -8 < 0$

لا توجد جذور حقيقية ← عدد الحلول = 0

🎯 تحقق من فهمك (2)

حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة

(a) $2x^2 - 7x - 4 = 0$

الحل

$a = 2,\ b = -7,\ c = -4$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-7)^2 - 4(2)(-4)$

$\Delta = 81 > 0$

جذران حقيقيان مختلفان ← عدد الحلول = 2

(b) $x^2 - 10x + 25 = 0$

الحل

$a = 1,\ b = -10,\ c = 25$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-10)^2 - 4(1)(25)$

$\Delta = 0$

جذران حقيقيان متساويان ← عدد الحلول = 1 (مكرر)

(c) $3x^2 - 2x + 2 = 0$

الحل

$$a = 3,\ b = -2,\ c = 2$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(2)$$
$$\Delta = -20 < 0$$

لا توجد جذور حقيقية ← عدد الحلول = 0

(d) $x^2 = 15$

الحل

$$x^2 - 15 = 0$$
$$a = 1,\ b = 0,\ c = -15$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (0)^2 - 4(1)(-15)$$
$$\Delta = 60 > 0$$

جذران حقيقيان مختلفان ← عدد الحلول = 2

(e) $x^2 - x = 0$

الحل

$$a = 1,\ b = -1,\ c = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(0)$$
$$\Delta = 1 > 0$$

جذران حقيقيان مختلفان ← عدد الحلول = 2

(f) $2x^2 - 8x + 8 = 0$

الحل

$$a = 2,\ b = -8,\ c = 8$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-8)^2 - 4(2)(8)$$
$$\Delta = 0$$

جذران حقيقيان متساويان ← عدد الحلول = 1 (مكرر)

✍ مثال (3)

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون

(a) $x^2 - x - 5 = 0$

الحل

$a = 1,\ b = -1,\ c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-5)$

$\Delta = 21 > 0$

← جذران حقيقيان مختلفان

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{21}}{2(1)}$

إما $x = \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2}$ | أو $x = \dfrac{1 - \sqrt{21}}{2}$

$S.S = \left\{ \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2}, \dfrac{1 - \sqrt{21}}{2} \right\}$

(b) $x^2 - 8 = 0$

الحل

$a = 1,\ b = 0,\ c = -8$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (0)^2 - 4(1)(-8)$

$\Delta = 32 > 0$

← جذران حقيقيان مختلفان

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \dfrac{-(0) \pm \sqrt{32}}{2(1)}$

إما $x = \dfrac{\sqrt{32}}{2}$, $x = \dfrac{4\sqrt{2}}{2}$, $x = 2\sqrt{2}$

أو $x = \dfrac{-\sqrt{32}}{2}$, $x = \dfrac{-4\sqrt{2}}{2}$, $x = -2\sqrt{2}$

$S.S = \{2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\}$

(c) $x^2 = x + 1$

الحل

نضع المعادلة في الصورة العامة:

$x^2 - x - 1 = 0$

$a = 1,\ b = -1,\ c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1)$

$\Delta = 5 > 0$

← جذران حقيقيان مختلفان

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2(1)}$

إما $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ | أو $x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$S.S = \left\{ \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$

(d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

الحل

$a = 1,\ b = -6,\ c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(9)$

$\Delta = 0$

← جذران حقيقيان متساويان

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2(1)}$

$x = \dfrac{6}{2} = 3$

$S.S = \{3\}$

⚠️ انتبه

توضع المعادلة دائمًا على الصورة العامة $ax^2+bx+c=0$ ثم نوجد قيمة Δ ، فإن $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

في المعادلة التربيعية إذا كانت $b=0$ فإن $x=\dfrac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، مثل:

$$x^2-8=0\Rightarrow x^2=8\Rightarrow |x|=2\sqrt{2}\Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$$

ℹ️ معلومة

العدد الذهبي يساوي $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$ تقريبًا.

🎯 تحقق من فهمك (3)

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون

(a) $x^2-4x+2=0$

الحل

$a=1,\ b=-4,\ c=2$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-4)^2-4(1)(2)$

$\Delta=8>0$

← جذران حقيقيان مختلفان

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{8}}{2(1)}$$

إما $x=\dfrac{4+\sqrt{8}}{2}$ ، $x=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{2}$ ، $x=2+\sqrt{2}$

أو $x=\dfrac{4-\sqrt{8}}{2}$ ، $x=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}$ ، $x=2-\sqrt{2}$

$S.S=\{2+\sqrt{2}\ ,\ 2-\sqrt{2}\}$

(b) $4x^2-5x+1=0$

الحل

$a=4,\ b=-5,\ c=1$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-5)^2-4(4)(1)$

$\Delta=9>0$

← جذران حقيقيان مختلفان

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2(4)}$$

$$x=\frac{5\pm 3}{8}$$

إما $x=\dfrac{5+3}{8}$ ، $x=\dfrac{8}{8}=1$

أو $x=\dfrac{5-3}{8}$ ، $x=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

$S.S=\left\{1,\dfrac{1}{4}\right\}$

(c) $x^2 - 2x + 1 = 0$

الحل

$$a = 1,\ b = -2,\ c = 1$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1)$$
$$\Delta = 0$$

← جذران حقيقيان متساويان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2(1)}$$
$$x = \frac{2}{2} = 1$$

$$S.S = \{1\}$$

(d) $x^2 - 6x + 8 = 0$

الحل

$$a = 1,\ b = -6,\ c = 8$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(8)$$
$$\Delta = 4 > 0$$

← جذران حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2(1)}$$
$$x = \frac{6 \pm 2}{2}$$

إما $x = \frac{6+2}{2}$, $x = \frac{8}{2} = 4$

أو $x = \frac{6-2}{2}$, $x = \frac{4}{2} = 2$

$$S.S = \{4, 2\}$$

مثال (4) حل المعادلة التالية باستخدام القانون: $x^2 - 3x = 0$

الحل

$$a = 1,\ b = -3,\ c = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(0)$$
$$\Delta = 9 > 0$$

← جذران حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9}}{2(1)}$$
$$x = \frac{3 \pm 3}{2}$$

إما $x = \frac{3+3}{2}$, $x = \frac{6}{2} = 3$

أو $x = \frac{3-3}{2}$, $x = \frac{0}{2} = 0$

$$S.S = \{3, 0\}$$

⚠ انتبه

إذا كانت $\Delta = 0$ فإن حل المعادلة هو $x = \frac{-b}{2a}$ · إذا كان معامل x^2 عددًا سالبًا فإن منحنى الدالة التربيعية يكون مفتوحًا لأسفل.

تحقق من فهمك (4)

حل المعادلتين التاليتين باستخدام القانون

(a) $x^2 + 7x + 10 = 0$

الحل

$a = 1,\ b = 7,\ c = 10$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (7)^2 - 4(1)(10)$

$\Delta = 9 > 0$

← جذران حقيقيان مختلفان

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \dfrac{-(7) \pm \sqrt{9}}{2(1)}$

$x = \dfrac{-7 \pm 3}{2}$

إما $x = \dfrac{-7 + 3}{2}$ $x = \dfrac{-4}{2} = -2$

أو $x = \dfrac{-7 - 3}{2}$ $x = \dfrac{-10}{2} = -5$

$S.S = \{-2, -5\}$

(b) $2x^2 - 5x - 52 = 0$

الحل

$a = 2,\ b = -5,\ c = -52$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(-52)$

$\Delta = 441 > 0$

← جذران حقيقيان مختلفان

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{441}}{2(2)}$

$x = \dfrac{5 \pm 21}{4}$

إما $x = \dfrac{5 + 21}{4}$ $x = \dfrac{26}{4} = \dfrac{13}{2}$

أو $x = \dfrac{5 - 21}{4}$ $x = \dfrac{-16}{4} = -4$

$S.S = \left\{\dfrac{13}{2}, -4\right\}$

★ **تعميم: للدالة التربيعية** $ax^2 + bx + c = 0$ **حيث** $a, b, c \in \mathbb{R}\ ,\ a \neq 0$

- $b^2 - 4ac > 0$: المميز موجب ← عدد الحلول: حلان حقيقيان مختلفان (المنحنى يقطع محور السينات في نقطتين)
- $b^2 - 4ac = 0$: المميز صفر ← عدد الحلول: حلان حقيقيان متساويان (المنحنى يمس محور السينات)
- $b^2 - 4ac < 0$: المميز سالب ← لا يوجد حلول حقيقية (المنحنى لا يقطع محور السينات)

مثال (5) عددان فرديان متتاليان مجموع مربعيهما 34 ، فما العددان؟

الحل

نفرض أن العدد الفردي الأول = x ، فيكون العدد الفردي الثاني = $x+2$

مجموع مربعي العددين = 34

$$(x)^2+(x+2)^2=34$$
$$x^2+x^2+4x+4-34=0$$
$$2x^2+4x-30=0$$
$$2(x^2+2x-15)=0$$

لأن $2\neq 0$ ، $x^2+2x-15=0$

$$(x-3)(x+5)=0$$

إما	أو
$x-3=0$	$x+5=0$
$x=3$	$x=-5$
العدد الفردي الأول 3	العدد الفردي الأول -5
العدد الفردي الثاني 5	العدد الفردي الثاني -3

العددان الفرديان هما $3,5$ أو $-5,-3$

هل يمكن الحل بطريقة أخرى؟ نعم ، باستخدام القانون العام:

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=(2)^2-4(1)(-15)=64$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x=\frac{-2\pm 8}{2}$$
$$\checkmark\ x=-5 \text{ أو } x=3$$

⚠️ **انتبه: إذا كان العدد هو x فإن**

ضعف العدد = $2x$ · ثلاثة أمثال العدد = $3x$ · العدد الذي يليه = $x+1$ · مربع العدد = x^2 · العدد الفردي الذي يلي عددًا فرديًا = $x+2$ · العدد الزوجي الذي يلي عددًا زوجيًا = $x+2$

تحقق من فهمك (5)

(a) أوجد عددين زوجيين متتاليين مجموع مربعيهما 100

الحل

نفرض أن العدد الزوجي الأول = x ، فيكون العدد الزوجي الثاني = $x+2$

$$x^2+(x+2)^2=100$$
$$x^2+x^2+4x+4-100=0$$
$$2x^2+4x-96=0$$
$$2(x^2+2x-48)=0$$

لأن $2\neq 0$ ، $x^2+2x-48=0$

$$(x-6)(x+8)=0$$

إما	أو
$x-6=0$	$x+8=0$
$x=6$	$x=-8$
العددان 6, 8	العددان $-8,-6$

العددان هما $6,8$ أو $-8,-6$

(b) مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار $3\ cm$ ومساحته $40\ cm^2$. أوجد بُعدَي المستطيل.

الحل

نفرض أن عرض المستطيل = $x\ cm$ ، فيكون طوله = $(x+3)\ cm$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$x(x+3)=40$$
$$x^2+3x-40=0$$
$$(x+8)(x-5)=0$$

إما	أو
$x-5=0$	$x+8=0$
$x=5$	$x=-8$

$x=-8$ مرفوضة ✗ لأن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة

عرض المستطيل = $5\ cm$

طوله = $5+3=8\ cm$

🔍 ملحوظة

الأبعاد لا يمكن أن تكون قيمها بالسالب.

🏗️ استخدام النماذج

نموذج ملعب كرة القدم في استاد جابر الدولي في الكويت مستطيل الشكل. إذا كان عرض الملعب x مترًا ، وكان طوله يزيد عن عرضه بمقدار 37 مترًا ، فإذا علمت أن مساحة الملعب 7140 مترًا مربعًا: أوجد عرض الملعب وطوله.

الحل

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

$$x(x+37)=7140$$

تحويل المعادلة إلى الصورة العامة ← $x^2+37x-7140=0$

$$a=1,\ b=37,\ c=-7140$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=(37)^2-4(1)(-7140)$$

$$\Delta=1369+28560=29929$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x=\frac{-37\pm\sqrt{29929}}{2(1)}$$

$$x=\frac{-37\pm173}{2}$$

إما

$$x=\frac{-37+173}{2}$$

$$x=\frac{136}{2}=68$$

✔ مقبولة

أو

$$x=\frac{-37-173}{2}$$

$$x=\frac{-210}{2}=-105$$

✘ مرفوضة

عرض الملعب = 68 مترًا

طول الملعب = $68+37=105$ مترًا

💪 أتدرّب وأحل المسائل

صح أو خطأ (درجة لكل بند)

ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة ، و (b) إذا كانت خاطئة:

1. جذرا المعادلة $x^2-5x+6=0$ هما جذران حقيقيان متساويان — (a) (b)

2. المعادلة $x^2-4x+4=0$ لها جذران حقيقيان متساويان — (a) (b)

3. جذرا المعادلة $x^2+9=0$ هما $3,-3$ — (a) (b)

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

4. المعادلة $x^2-6x+9=0$:

(b) لها جذران حقيقيان متساويان
(a) لها جذران حقيقيان مختلفان
(d) ليس أيًّا مما سبق
(c) ليس لها جذور حقيقية

5 المعادلة $x^2+4x+5=0$:

(a) لها جذران حقيقيان مختلفان
(b) لها جذران حقيقيان متساويان
(c) **ليس لها جذور حقيقية**
(d) ليس أيًّا مما سبق

6 جذرا المعادلة $x^2-3x-4=0$ هما:

(a) **$-1, 4$**
(b) $1, 4$
(c) $-2, 2$
(d) $-1, 3$

7 حل المعادلة $x^2=9$ هو:

(a) 3
(b) -3
(c) **± 3**
(d) لا يوجد حل

8 جذرا المعادلة $2x^2-7x+3=0$ هما:

(a) **$\frac{1}{2}, 3$**
(b) $1, 3$
(c) $2, 3$
(d) $1, \frac{3}{2}$

9 حل المعادلة $x^2-25=0$ هو:

(a) 5
(b) -5
(c) **± 5**
(d) لا يوجد حل

10 المعادلة التي مجموع جذريها يساوي 5 فيما يلي:

(a) $(x+1)(x+4)=0$
(b) **$x(x-5)=0$**
(c) $(x-1)(x+6)=0$
(d) $(x-5)(x+1)=0$

تعليل الإجابات

(1) $\Delta=25-24=1>0$ فالجذران مختلفان · **(2)** $\Delta=16-16=0$ · **(3)** $x^2=-9$ ،
(4) $\Delta=-36<0$ لا يوجد جذور حقيقية · **(5)** $\Delta=36-36=0$ · **(6)** $\Delta=16-20=-4<0$
(7) $(x-4)(x+1)=0$ · **(8)** $|x|=3\Rightarrow x=\pm 3$ · **(9)** $(2x-1)(x-3)=0$
(10) $x^2=25\Rightarrow x=\pm 5$ · جذرا $x(x-5)=0$ هما $0, 5$ ومجموعهما 5

أسئلة المقال (1)

أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية باستخدام القانون العام

(a) $x^2 - 3x - 10 = 0$

الحل

$$a = 1,\ b = -3,\ c = -10$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(-10)$$
$$\Delta = 49 > 0$$

← جذران حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2(1)}$$
$$x = \frac{3 \pm 7}{2}$$

إما $x = \frac{3+7}{2}$ $x = \frac{10}{2} = 5$

أو $x = \frac{3-7}{2}$ $x = \frac{-4}{2} = -2$

$$S.S = \{5, -2\}$$

(b) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

الحل

$$a = 2,\ b = -5,\ c = -3$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(-3)$$
$$\Delta = 49 > 0$$

← جذران حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2(2)}$$
$$x = \frac{5 \pm 7}{4}$$

إما $x = \frac{5+7}{4}$ $x = \frac{12}{4} = 3$

أو $x = \frac{5-7}{4}$ $x = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$$S.S = \left\{3, -\frac{1}{2}\right\}$$

(c) $\frac{1}{2}x^2 - 3 = 0$

الحل

$$a = \frac{1}{2},\ b = 0,\ c = -3$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (0)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(-3)$$
$$\Delta = 6 > 0$$

← جذران حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{6}}{2\left(\frac{1}{2}\right)}$$

إما
$$x = \frac{\sqrt{6}}{1}$$
$$x = \sqrt{6}$$

أو
$$x = \frac{-\sqrt{6}}{1}$$
$$x = -\sqrt{6}$$

$$S.S = \{\sqrt{6}\ ,\ -\sqrt{6}\}$$

(d) $3x^2 + x - 2 = 0$

الحل

$$a = 3,\ b = 1,\ c = -2$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (1)^2 - 4(3)(-2)$$
$$\Delta = 25 > 0$$

← جذران حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{25}}{2(3)}$$
$$x = \frac{-1 \pm 5}{6}$$

إما
$$x = \frac{-1 + 5}{6}$$
$$x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

أو
$$x = \frac{-1 - 5}{6}$$
$$x = \frac{-6}{6} = -1$$

$$S.S = \left\{\frac{2}{3}, -1\right\}$$

أسئلة المقال (2)

أوجد نوع الجذرين للمعادلتين التاليتين ثم تحقق باستخدام القانون

(a) $x^2 - 4x - 5 = 0$

الحل

$$a = 1,\ b = -4,\ c = -5$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-5)$$
$$\Delta = 36 > 0$$

← جذران حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2(1)}$$
$$x = \frac{4 \pm 6}{2}$$

إما $x = \frac{4+6}{2}$ $x = \frac{10}{2} = 5$

أو $x = \frac{4-6}{2}$ $x = \frac{-2}{2} = -1$

$$S.S = \{5, -1\}$$

(b) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

الحل

$$a = 2,\ b = -4,\ c = 2$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-4)^2 - 4(2)(2)$$
$$\Delta = 0$$

← جذران حقيقيان متساويان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2(2)}$$
$$x = \frac{4}{4} = 1$$
$$S.S = \{1\}$$

أسئلة المقال (3)

أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية

(a) $\frac{1}{2}x(x+6)=8$

الحل

$$x(x+6)=16$$
$$x^2+6x-16=0$$
$$a=1,\ b=6,\ c=-16$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=(6)^2-4(1)(-16)$$
$$\Delta=100>0$$

← جذران حقيقيان مختلفان

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x=\frac{-(6)\pm\sqrt{100}}{2(1)}$$
$$x=\frac{-6\pm10}{2}$$

إما $x=\frac{-6+10}{2}$ $x=\frac{4}{2}=2$

أو $x=\frac{-6-10}{2}$ $x=\frac{-16}{2}=-8$

$$S.S=\{2,-8\}$$

(b) $2x(x+1)=2$

الحل

$$2x^2+2x-2=0$$

بالقسمة على 2 :

$$x^2+x-1=0$$
$$a=1,\ b=1,\ c=-1$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=(1)^2-4(1)(-1)$$
$$\Delta=5>0$$

← جذران حقيقيان مختلفان

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x=\frac{-(1)\pm\sqrt{5}}{2(1)}$$

إما $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

أو $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$$S.S=\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

(4) ثلاثة أعداد موجبة متتالية مربع أكبرهم يساوي مجموع مربعي العددين الآخرين. أوجد هذه الأعداد.

الحل

نفرض أن الأعداد هي $x, x+1, x+2$ حيث $x > 0$

$$(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2$$
$$x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + 2x + 1$$
$$2x^2 - x^2 + 2x - 4x + 1 - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x-3)(x+1) = 0$$

إما	أو
$x - 3 = 0$	$x + 1 = 0$
✔ $x = 3$	✘ $x = -1$ مرفوض (الأعداد موجبة)

الأعداد هي $3, 4, 5$

تحقق: $5^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

(5) عددان زوجيان متتاليان مجموع مربعيهما يزيد عن حاصل ضربهما بمقدار 28 ، فما العددان؟

الحل

نفرض أن العددين $x, x+2$

$$x^2 + (x+2)^2 - x(x+2) = 28$$
$$x^2 + x^2 + 4x + 4 - x^2 - 2x = 28$$
$$x^2 + 2x + 4 - 28 = 0$$
$$x^2 + 2x - 24 = 0$$
$$(x+6)(x-4) = 0$$

إما	أو
$x - 4 = 0$	$x + 6 = 0$
$x = 4$	$x = -6$
العددان $4, 6$	العددان $-6, -4$

العددان هما $4, 6$ أو $-6, -4$

مهارات تفكير عليا

صح أو خطأ (درجة لكل بند)

ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة ، و (b) إذا كانت خاطئة:

1 إذا كانت المعادلة $x^2 - 6x - k = 0$ لها جذران حقيقيان متساويان فإن قيمة k هي 3 — (a) (b)

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

2 إذا كانت المعادلة $x^2 - kx + 4 = 0$ ليس لها جذور حقيقية فإن k تحقق:

(a) $k^2 > 16$ (b) $k^2 = 16$ (c) $k^2 < 16$ (d) $k > 16$

3 مجموعة حل المعادلة $x^2 = 2 - |x|$ هي:

(a) $\{1, -1\}$ (b) $\{2, -2\}$ (c) $\{1, -2\}$ (d) $\{-1, 2\}$

4 مجموعة حل المعادلة $x^2 - 2|x| = 8$ هي:

(a) $\{2, -2\}$ (b) $\{4, -4\}$ (c) $\{2, 4\}$ (d) $\emptyset$

5 إذا كانت $|x| > x$ ، $x^2 + 2x - 3 = 0$ فإن $2x + 4$ تساوي:

(a) -2 (b) 2 (c) 6 (d) 8

💬 تعليل الإجابات

(1) $k=-9 \Rightarrow 36+4k=0 \cdot \Delta$ **(2)** $k<16 \Rightarrow k^2-16<0 \cdot \Delta$ **(3)**

$|x|=1 \Rightarrow (|x|+2)(|x|-1)=0 \Rightarrow |x|^2+|x|-2=0$ **(4)**

$|x|=4 \Rightarrow (|x|-4)(|x|+2)=0 \Rightarrow |x|^2-2|x|-8=0$ **(5)** $x<0 \Rightarrow |x|>x$ ،

$x=-3 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0$ ، $2(-3)+4=-2$

(6) أوجد قيمة k بحيث يكون للمعادلة التالية جذران حقيقيان متساويان: $x^2+kx+4=0$

الحل

جذران حقيقيان متساويان ← $\Delta=0$

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$k^2-4(1)(4)=0$$
$$k^2=16$$
$$\sqrt{k^2}=\sqrt{16}$$
$$|k|=4$$
$$k=\pm4$$

(a-7) حل المعادلة: $x^2-3|x|-28=0$

الحل

$$x^2=|x|^2$$
$$|x|^2-3|x|-28=0$$
$$(|x|-7)(|x|+4)=0$$

إما $|x|-7=0$ ، $|x|=7$ ، $x=\pm7$

أو $|x|+4=0$ ، $|x|=-4$ مرفوض ✗

$S.S=\{-7,7\}$

(b-7) حل المعادلة: $|x-3|^2-|x-3|-6=0$

الحل

$$(|x-3|-3)(|x-3|+2)=0$$

إما $|x-3|=3$ ، $x-3=\pm3$ ، $x=0$ أو $x=6$

أو $|x-3|=-2$ مرفوض ✗

$S.S=\{0,6\}$

⚠️ انتبه

مربع العدد x هو x^2 ، وضعف العدد x هو $2x$

📋 خلاصة البند (1-3)

① الحل البياني: الحلول = الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات

② المميز: $\Delta=b^2-4ac$ — موجب: حلان · صفر: حل مكرر · سالب: لا حلول

③ القانون العام: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

🌟 أحسنت! القانون العام مفتاحك لكل معادلة تربيعية 🔑

البند (4-1): إيجاد مجموع وناتج ضرب جذري معادلة تربيعية – تكوين المعادلة التربيعية بمعلومية جذريها

فكرة الدرس

إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين من معادلة تربيعية · تكوين المعادلة التربيعية بمعلومية جذريها.

تعلمنا فيما سبق

كيفية إيجاد جذري المعادلة التربيعية في متغير واحد بعدة طرق: التحليل – إكمال المربع – القانون العام لحل المعادلة التربيعية – بيانيًّا.

المصطلحات

مجموع الجذرين (Sum of the Roots) · حاصل ضرب الجذرين (Product of the Roots)

مسألة الدرس إذا علمت أن جذري المعادلة $x^2-5x+6=0$ هما $m=3$, $\ell=2$ فأجب عن الأسئلة التالية:

الحل

① مجموع جذري المعادلة:
$\ell+m=2+3=5$

② ناتج ضرب جذري المعادلة:
$\ell\cdot m=2\times3=6$

③ $a=1,\ b=-5,\ c=6$

④ $\frac{-b}{a}=\frac{5}{1}=5$

$\frac{c}{a}=\frac{6}{1}=6$

⑤ هل توجد علاقة بين مجموع جذري المعادلة ومعاملات حدودها؟ نعم: $\ell+m=\frac{-b}{a}$

⑥ هل توجد علاقة بين ناتج ضرب جذري المعادلة ومعاملات حدودها؟ نعم: $\ell\cdot m=\frac{c}{a}$

أولًا: إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين للمعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ بدون حلها

تذكّر: الصورة العامة

$ax^2+bx+c=0$: a معامل x^2 ، b معامل x ، c الحد الثابت

⋆ مما سبق: جذرا المعادلة $ax^2+bx+c=0$ هما

$x_1=\ell=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ، $x_2=m=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ، فإن:

① $x_1+x_2=\ell+m=\frac{-b}{a}$ (مجموع الجذرين)

② $x_1\cdot x_2=\ell\cdot m=\frac{c}{a}$ (حاصل ضرب الجذرين)

③ $x_1-x_2=\ell-m=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$ ، $|\ell-m|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|$

تدرّب أكمل الجدول التالي:

الحل

المعادلة	المعاملات	مجموع الجذرين	حاصل ضرب الجذرين
$2x^2+5x-12=0$	$a=2, b=5, c=-12$	$\frac{-5}{2}$	$\frac{-12}{2}=-6$
$3x^2=23x-30$	$a=3, b=-23, c=30$	$\frac{23}{3}$	$\frac{30}{3}=10$
$(2x-3)(x+2)=0$	$a=2, b=1, c=-6$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-6}{2}=-3$
$2x^2+x-6=0$	$a=2, b=1, c=-6$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-6}{2}=-3$
$ax^2+bx+c=0\ ,\ a=1$	$a=1, b=b, c=c$	$-b$	c

$3x^2=23x-30$
$3x^2-23x+30=0$
$x+2)=2x^2+4x-3x-6=2x^2+x-6$

انتبه

يجب وضع المعادلة في الصورة العامة · استخرج قيم كل من a, b, c · التأكد من حفظ قانون مجموع جذري المعادلة وناتج ضربهما · دائمًا نرمز لجذري المعادلة بالرمز $\ell\ ,\ m$

تذكّر

مجموع جذري المعادلة التربيعية هو $\frac{-b}{a}$ · حاصل ضرب جذري المعادلة هو $\frac{c}{a}$

فكّر معي إذا علمت أن $\ell\ ,\ m$ هما جذرا المعادلة $ax^2+bx+c=0$ أوجد $\ell\cdot m\ ,\ \ell+m$ في الحالتين: **(a)** عندما $a=b$ **(b)** عندما $a=c$

الحل

$$\ell+m=\frac{-b}{a}=\frac{-a}{a}=-1 \textbf{ (a)}$$
$$\ell\cdot m=\frac{c}{a}$$
$$\ell+m=\frac{-b}{a} \textbf{ (b)}$$
$$\ell\cdot m=\frac{c}{a}=\frac{a}{a}=1$$

مثال (1) إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $2x^2-3x+c=0$ يساوي -1 ، أوجد قيمة c

الحل

$$a=2,\ b=-3,\ c=c$$
$$\ell\cdot m=\frac{c}{a}$$
$$-1=\frac{c}{2}$$
$$c=-1\times 2$$
$$c=-2$$

ملحوظة

تستخدم قانون حاصل ضرب الجذرين (مثال 1) وقانون مجموع الجذرين (مثال 2).

تحقق من فهمك (1) إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $3x^2+10x-c=0$ يساوي $\frac{-8}{3}$ ، أوجد قيمة c

الحل

$$a=3,\ b=10,\ c=-c$$
$$\ell \cdot m=\frac{c}{a}$$
$$\frac{-8}{3}=\frac{-c}{3}$$
$$-c=-8$$
$$c=8$$

مثال (2) إذا كان مجموع جذري المعادلة $2x^2+bx-5=0$ هو $\frac{3}{2}$ ، فأوجد قيمة b

الحل

$$a=2,\ b=b,\ c=-5$$
$$\ell +m=\frac{-b}{a}$$
$$\frac{3}{2}=\frac{-b}{2}$$
$$-b=3$$
$$b=-3$$

تحقق من فهمك (2) إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $ax^2-5x+2=0$ يساوي $\frac{3}{2}$ ، أوجد قيمة a ثم حل المعادلة.

الحل

$$\ell \cdot m=\frac{c}{a}$$
$$\frac{3}{2}=\frac{2}{a}$$
$$3a=4$$
$$a=\frac{4}{3}$$

المعادلة: $\frac{4}{3}x^2-5x+2=0$

بضرب الطرفين في 3 :

$$4x^2-15x+6=0$$
$$a=4,\ b=-15,\ c=6$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=(-15)^2-4(4)(6)$$
$$\Delta=129>0$$

← جذران حقيقيان مختلفان

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x=\frac{-(-15)\pm\sqrt{129}}{2(4)}$$

إما $x=\frac{15+\sqrt{129}}{8}$ | أو $x=\frac{15-\sqrt{129}}{8}$

$$S.S=\left\{\frac{15+\sqrt{129}}{8},\frac{15-\sqrt{129}}{8}\right\}$$

⚠ انتبه

عندما $c = a$ في المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ فإن $\ell \cdot m = 1$ والجذرين أحدهما نظير ضربي للآخر.

مثال (3) إذا كان ℓ , m هما جذري المعادلة $2x^2 - 8x + 5 = 0$ ، فأوجد القيم العددية لكل مما يلي: **(a)** $\ell^2 + m^2$ **(b)** $\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m}$ **(c)** $\ell - m$

الحل

$a = 2,\ b = -8,\ c = 5$

$\ell + m = \frac{-b}{a} = \frac{8}{2} = 4$

$\ell \cdot m = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$

(a) $\ell^2 + m^2 = (\ell + m)^2 - 2\ell m$

$= (4)^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right)$

$= 16 - 5 = 11$

(b) $\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} = \frac{m + \ell}{\ell \cdot m}$

$= \frac{4}{\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{8}{5}$

(c) $|\ell - m| = \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| = \left|\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}\right|$

$= \left|\frac{\sqrt{(-8)^2 - 4(2)(5)}}{2}\right|$

$= \left|\frac{\sqrt{24}}{2}\right| = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$

$\ell - m = \pm\sqrt{6}$

⚠ انتبه

① $(\ell + m)^2 = \ell^2 + m^2 + 2\ell m$ ② $(\ell + m)^2 - 2\ell m = \ell^2 + m^2$ ③ $|\ell - m| = \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|$

④ $(\ell - m)^2 = (\ell + m)^2 - 4\ell m$ ⑤ $\ell^3 + m^3 = (\ell + m)[(\ell + m)^2 - 3\ell m]$ ⑥

⑦ $xy + xz = x(y + z)$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

تحقق من فهمك (3) إذا علمت أن جذري المعادلة $x^2 - 7x + 9 = 0$ هما ℓ , m ، فأوجد قيمة كل من: **(a)** $\ell + m$ **(b)** $\ell \cdot m$ **(c)** $\ell^2 + m^2$

الحل

$a = 1,\ b = -7,\ c = 9$

(a) $\ell + m = \frac{-b}{a} = \frac{7}{1} = 7$

(b) $\ell \cdot m = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9$

(c) $\ell^2 + m^2 = (\ell + m)^2 - 2\ell m$

$= (7)^2 - 2(9)$

$= 49 - 18 = 31$

ثانيًا: إيجاد المعادلة التربيعية إذا عُلم جزاها

استكشف بفرض أن ℓ , m هما جزا المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0 \ , \ a\neq 0$

الحل

مجموع الجذرين = $\ell +m=\dfrac{-b}{a}$ ①

حاصل ضرب الجذرين = $\ell \cdot m=\dfrac{c}{a}$ ②

③ بقسمة طرفي المعادلة التربيعية على a :

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2-\left(\frac{-b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0 \ ④$$

بالمقارنة تكون المعادلة على الصورة:

$$x^2-(\ell +m)x+(\ell \cdot m)=0$$

☆ تعميم

إذا كان ℓ , m هما جزا المعادلة التربيعية فإن المعادلة التربيعية تكون على الصورة:

$x^2-(\ell +m)x+(\ell \cdot m)=0$ حيث $(\ell +m)$ ← مجموع الجذرين ، $(\ell \cdot m)$ ← حاصل ضرب الجذرين

مثال (4) كوّن معادلة تربيعية في متغير واحد والتي جزاها $-3, 4$ بطريقتين مختلفتين.

الحل

الطريقة الأولى:

$$x^2-(\ell +m)x+(\ell \cdot m)=0$$

المجموع = $(-3)+4=1$

الضرب = $(-3)\cdot(4)=-12$

$$x^2-(1)x+(-12)=0$$

$$x^2-x-12=0$$

الحل الآخر: عندما يكون ℓ , m هما جزا المعادلة فإن المعادلة تكون على الصورة:

$$(x-\ell)(x-m)=0$$

$$(x-(-3))(x-4)=0$$

$$(x+3)(x-4)=0$$

$$x^2-4x+3x-12=0$$

$$x^2-x-12=0$$

معلومة

المعادلة التربيعية على الصورة $(x-\ell)(x-m)=0$ جزاها ℓ , m ·

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

تحقق من فهمك (4) أوجد المعادلة التربيعية التي جزاها معلومان في الحالات التالية

(a) $3, 5$

الحل

$$x^2-(\ell +m)x+(\ell \cdot m)=0$$

المجموع = $3+5=8$

الضرب = $3\times 5=15$

$$x^2-8x+15=0$$

(b) $4, \dfrac{-1}{3}$

الحل

$$x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) = 0$$

المجموع = $4 + \left(\dfrac{-1}{3}\right) = \dfrac{11}{3}$

الضرب = $4 \times \left(\dfrac{-1}{3}\right) = \dfrac{-4}{3}$

$$x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{4}{3} = 0$$

بالضرب في 3 :

$$3x^2 - 11x - 4 = 0$$

(c) $2, -2$

الحل

$$x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) = 0$$

المجموع = $2 + (-2) = 0$

الضرب = $2 \times (-2) = -4$

$$x^2 - 0x - 4 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

فكّر معي هل المعادلة التربيعية التي جذراها $3, -3$ هي معادلة تربيعية وحيدة؟

الحل

ملحوظة هامة جدًّا (بصورة عامة): إذا كان جذرا المعادلة التربيعية هما ℓ , m فإنه يوجد عدد غير منتهٍ من المعادلات التي لها الجذران نفسهما ، ويمكن كتابتها على الصورة العامة:

$$k[x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m)] = 0 \ , \ k \in \mathbb{R}^*$$

فمثلًا: حل المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ هو نفس حل المعادلات: $2(x^2 - 5x + 6) = 0$ ، $3(x^2 - 5x + 6) = 0$ وهكذا.

ملحوظة

$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ · $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ أو $b = 0$ · المعادلة التربيعية في متغير واحد تسمى: معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد.

مثال (a-5) كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها: $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$

الحل

$$x^2-(\ell+m)x+(\ell\cdot m)=0$$

المجموع = $\frac{4}{3}+\frac{3}{4}=\frac{16+9}{12}=\frac{25}{12}$

الضرب = $\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=1$

$$x^2-\left(\frac{25}{12}\right)x+1=0$$

بالضرب في 12 :

$$12x^2-25x+12=0$$

مثال (b-5) كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها: $5\sqrt{3}\ ,\ -5\sqrt{3}$

الحل

$$x^2-(\ell+m)x+(\ell\cdot m)=0$$

المجموع = $5\sqrt{3}+(-5\sqrt{3})=0$

الضرب = $(5\sqrt{3})\cdot(-5\sqrt{3})=-75$

$$x^2-0x+(-75)=0$$

$$x^2-75=0$$

⚠ **انتبه**

إذا كانت $\ell+m=0$ فإن $\ell\ ,m$ نظير جمعي للآخر و $b=0$ · إذا كانت $\ell\cdot m=1$ فإن $\ell\ ,m$ نظير ضربي للآخر و $a=c$

تحقق من فهمك (5) كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها: $3\sqrt{2}\ ,\ -3\sqrt{2}$

الحل

$$x^2-(\ell+m)x+(\ell\cdot m)=0$$

المجموع = $3\sqrt{2}+(-3\sqrt{2})=0$

الضرب = $(3\sqrt{2})(-3\sqrt{2})=-18$

$$x^2-0x-18=0$$

$$x^2-18=0$$

ثالثًا: تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة أخرى

مثال (6) إذا كان $\ell\ ,m$ هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2-3x-1=0$ ، كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $2\ell\ ,2m$

الحل

من المعادلة المعلومة:

$$a=2,\ b=-3,\ c=-1$$

$$\ell+m=\frac{-b}{a}=\frac{-(-3)}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\ell\cdot m=\frac{c}{a}=\frac{-1}{2}$$

المعادلة المطلوبة:

$$x^2-(\text{المجموع})x+(\text{الضرب})=0$$

المجموع =

$$2\ell+2m=2(\ell+m)=2\left(\frac{3}{2}\right)=3$$

الضرب =

$$2\ell\cdot 2m=4(\ell\cdot m)=4\left(\frac{-1}{2}\right)=-2$$

$$x^2-3x-2=0$$

تحقق من فهمك (6) إذا كان $\ell\ ,\ m$ هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2+15x-8=0$ ، كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $2\ell\ ,\ 2m$

الحل

$a=2,\ b=15,\ c=-8$

$\ell+m=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-15}{2}$

$\ell\cdot m=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-8}{2}=-4$

$x^2-(\text{المجموع})x+(\text{الضرب})=0$

المجموع = $2\ell+2m=2\left(\dfrac{-15}{2}\right)=-15$

الضرب = $2\ell\cdot 2m=4(-4)=-16$

$x^2-(-15)x+(-16)=0$

$x^2+15x-16=0$

📌 ملحوظة هامة: في المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ إذا علمت أن $\ell\ ,\ m$ هما جذرا المعادلة

① عند $b=0$ فإن $\ell+m=0$ والجذرين أحدهما نظير جمعي للآخر

② عند $c=a$ فإن $\ell\cdot m=1$ والجذرين أحدهما نظير ضربي للآخر

💪 أتدرّب وأحل المسائل

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان ناتج ضرب جذري المعادلة التربيعية $x^2-3x+c=0$ يساوي 2 فإن c يساوي:

(a) -4 (b) -2 (c) 4 **(d) 2**

2 إذا كان مجموع جذري المعادلة $x^2-ax+6=0$ يساوي 5 فإن a يساوي:

(a) -6 (b) -5 **(c) 5** (d) 6

3 إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2-(m+2)x+3=0$ هو معكوس جمعي للآخر فإن m تساوي:

(a) 3 (b) 2 **(c) -2** (d) -3

4 عددان حقيقيان مجموعهما 2 وحاصل ضربهما -35 هما:

(a) $5, 7$ (b) $-5, -7$ (c) $-7, 5$ **(d) $7, -5$**

5 حاصل ضرب جذري المعادلة $x(2x-3)=7$ يساوي:

(a) $\dfrac{-3}{2}$ (b) $\dfrac{3}{2}$ **(c) $\dfrac{-7}{2}$** (d) $\dfrac{7}{2}$

تعليل الإجابات

(1) $\ell\, m = \frac{c}{1} = 2$ · (2) $\ell + m = \frac{a}{1} = 5$ · (3) مجموع الجذرين = $0 \Rightarrow m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$ ·

(4) $x^2 - 2x - 35 = 0 \Rightarrow (x-7)(x+5) = 0$ · (5) $2x^2 - 3x - 7 = 0 \Rightarrow \ell\, m = \frac{-7}{2}$

أسئلة المقال (1)

كوّن كلًّا من المعادلات التربيعية التالية والتي جذراها

(a) $2, 3$

الحل

$x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) = 0$

المجموع = $2 + 3 = 5$

الضرب = $2 \times 3 = 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

(b) $-5, -7$

الحل

$x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) = 0$

المجموع = $(-5) + (-7) = -12$

الضرب = $(-5)(-7) = 35$

$x^2 + 12x + 35 = 0$

(c) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$

الحل

$x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) = 0$

المجموع = $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8}$

الضرب = $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$

$x^2 - \frac{11}{8}x + \frac{15}{32} = 0$

بالضرب في 32 :

$32x^2 - 44x + 15 = 0$

(d) $2a, -\frac{1}{2}a$

الحل

$x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) = 0$

المجموع = $2a - \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$

الضرب = $2a \times \left(-\frac{1}{2}a\right) = -a^2$

$x^2 - \frac{3}{2}ax - a^2 = 0$

بالضرب في 2 :

$2x^2 - 3ax - 2a^2 = 0$

(2) كوّن معادلة الدرجة الثانية التي جذراها متساويان وكل منهما يساوي $-1\frac{1}{2}$

الحل

كل جذر = $-\frac{3}{2}$

$x^2-(\ell+m)x+(\ell\cdot m)=0$

المجموع = $-\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$

الضرب = $\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$

$x^2+3x+\frac{9}{4}=0$

بالضرب في 4 :

$4x^2+12x+9=0$

(3) إذا كان مجموع جذري المعادلة $x^2-5\ell x+m=0$ هو 10 وحاصل ضربهما يساوي 6 ، فما قيمة كل من ℓ , m ؟ ثم أوجد قيمة الجذرين.

الحل

مجموع الجذرين = $\frac{-b}{a}=5\ell$

$5\ell=10$

$\ell=2$

حاصل الضرب = $\frac{c}{a}=m$

$m=6$

المعادلة: $x^2-10x+6=0$

$a=1,\ b=-10,\ c=6$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-10)^2-4(1)(6)$

$\Delta=76>0$

← جذران حقيقيان مختلفان

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{76}}{2(1)}$

إما

$x=\frac{10+\sqrt{76}}{2}$

$x=\frac{10+2\sqrt{19}}{2}$

$x=5+\sqrt{19}$

أو

$x=\frac{10-\sqrt{76}}{2}$

$x=\frac{10-2\sqrt{19}}{2}$

$x=5-\sqrt{19}$

$S.S=\{5+\sqrt{19}\,,5-\sqrt{19}\}$

(4) إذا كان ℓ , m هما جذرا المعادلة $x^2-5x-4=0$ فأوجد المعادلة التي جذراها ℓ^2 , m^2

الحل

$\ell+m=\frac{-b}{a}=5$

$\ell\cdot m=\frac{c}{a}=-4$

$x^2-(\text{المجموع})x+(\text{الضرب})=0$

المجموع = $\ell^2+m^2=(\ell+m)^2-2\ell m$

$=(5)^2-2(-4)=25+8=33$

الضرب = $\ell^2m^2=(\ell m)^2=(-4)^2=16$

$x^2-33x+16=0$

(5) إذا كان ℓ , m هما جذري المعادلة $x^2-3x+1=0$ ، فأوجد المعادلة التي جذراها $\ell+m$, $\ell\cdot m$

الحل

$\ell+m=\frac{-b}{a}=3$

$\ell\cdot m=\frac{c}{a}=1$

الجذران الجديدان: 3, 1

$x^2-(\text{المجموع})x+(\text{الضرب})=0$

المجموع = $3+1=4$

الضرب = $3\times1=3$

$x^2-4x+3=0$

(6) إذا كان ℓ , m هما جذرا المعادلة $x^2-7x+5=0$ ، فأوجد المعادلة التي جذراها $\frac{1}{\ell}, \frac{1}{m}$

الحل

$$\ell+m=\frac{-b}{a}=7$$
$$\ell\cdot m=\frac{c}{a}=5$$
$$x^2-(\text{المجموع})x+(\text{الضرب})=0$$
المجموع = $\frac{1}{\ell}+\frac{1}{m}=\frac{\ell+m}{\ell m}=\frac{7}{5}$
الضرب = $\frac{1}{\ell}\times\frac{1}{m}=\frac{1}{\ell m}=\frac{1}{5}$
$$x^2-\frac{7}{5}x+\frac{1}{5}=0$$
بالضرب في 5 :
$$5x^2-7x+1=0$$

(7) إذا كان ℓ , m هما جذرا المعادلة $x^2-4x+1=0$ فما قيمة: (a) $\ell-m$ (b) $\frac{4}{\ell}+\frac{4}{m}$

الحل

$$\ell+m=\frac{-b}{a}=4$$
$$\ell\cdot m=\frac{c}{a}=1$$
$$\frac{4}{\ell}+\frac{4}{m}=\frac{4(\ell+m)}{\ell m}$$ (a)
$$=\frac{4(4)}{1}=16$$
$$|\ell-m|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|$$ (b)
$$=\left|\frac{\sqrt{(-4)^2-4(1)(1)}}{1}\right|$$
$$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$
$$\ell-m=\pm 2\sqrt{3}$$

(8) سؤال تحدٍّ 🏆 أوجد قيمة k التي تجعل مجموع جذري المعادلة $x^2-(k+2)x+2=0$ يساوي حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2-3kx+k^2=0$

الحل

مجموع جذري الأولى = $\frac{-b}{a}=k+2$
حاصل ضرب جذري الثانية = $\frac{c}{a}=k^2$
$$k+2=k^2$$
$$k^2-k-2=0$$
$$(k-2)(k+1)=0$$

إما
$$k-2=0$$
$$k=2$$

أو
$$k+1=0$$
$$k=-1$$

مهارات تفكير عليا

(1) إذا كان ℓ , m جذرا المعادلة $x^2+2x-3=0$ ، فأوجد معادلة من الرجة الثانية جذراها $\ell+\frac{1}{\ell}$, $m+\frac{1}{m}$

الحل

$$\ell+m=\frac{-b}{a}=-2$$
$$\ell\, m=\frac{c}{a}=-3$$
$$\ell^2+m^2=(\ell+m)^2-2\ell\, m=4+6=10$$
المجموع = $(\ell+m)+\frac{\ell+m}{\ell\, m}$
$$=-2+\frac{-2}{-3}=\frac{-4}{3}$$
الضرب =
$$\left(\ell+\frac{1}{\ell}\right)\left(m+\frac{1}{m}\right)=\ell\, m+\frac{\ell^2+m^2}{\ell\, m}+\frac{1}{\ell\, m}$$
$$=-3-\frac{10}{3}-\frac{1}{3}=\frac{-20}{3}$$
$$x^2+\frac{4}{3}x-\frac{20}{3}=0$$
بالضرب في 3 :
$$3x^2+4x-20=0$$

(2) لتكن ℓ , m جذراها المعادلة $-4x^2+5x+7=0$. أوجد
(a) $(2\ell-3)(2m-3)$
(b) كوّن معادلة تربيعية جذراها $\ell+1, m+1$
(c) كوّن معادلة تربيعية جذراها 2ℓ , $2m$

الحل

$$a=-4,\ b=5,\ c=7$$
$$\ell+m=\frac{-b}{a}=\frac{-5}{-4}=\frac{5}{4}$$
$$\ell\, m=\frac{c}{a}=\frac{7}{-4}=\frac{-7}{4}$$
(a)
$$(2\ell-3)(2m-3)=4\ell\, m-6(\ell+m)+9$$
$$=4\left(\frac{-7}{4}\right)-6\left(\frac{5}{4}\right)+9$$
$$=-7-\frac{15}{2}+9=\frac{-11}{2}$$
(b) المجموع = $(\ell+m)+2=\frac{5}{4}+2=\frac{13}{4}$
الضرب =
$$\ell\, m+(\ell+m)+1=\frac{-7}{4}+\frac{5}{4}+1=\frac{1}{2}$$
$$x^2-\frac{13}{4}x+\frac{1}{2}=0$$
$$4x^2-13x+2=0$$
(c) المجموع = $2(\ell+m)=\frac{5}{2}$
الضرب = $4\ell\, m=-7$
$$x^2-\frac{5}{2}x-7=0$$
$$2x^2-5x-14=0$$

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان أحد جذري المعادلة $2x^2+6x+c=0$ هو 3 فإن c تساوي:

(a) 18 (b) 36 (c) -6 (d) -36

التعليل علّل إجابتك عن البند السابق.

الحل

بالتعويض بـ $x = 3$:

$$2(3)^2 + 6(3) + c = 0$$
$$18 + 18 + c = 0$$
$$c = -36$$

📋 خلاصة البند (4-1)

مجموع الجذرين: $\ell + m = \dfrac{-b}{a}$ · **حاصل ضرب الجذرين:** $\ell \cdot m = \dfrac{c}{a}$ · **تكوين المعادلة:**

$$x^2 - (\ell + m)x + \ell m = 0$$

🌟 أحسنت! أصبحت تكوّن المعادلة من جذريها بثقة 👏

البند (1-5): حل متباينة من الدرجة الثانية — Solving Quadratic Inequalities

💡 فكرة الدرس

حل متباينة تربيعية في متغير واحد · دراسة إشارة الدالة التي ترتبط بهذه المتباينة · تحديد قيم المتغير التي تجعل الدالة التربيعية موجبة أو سالبة باستخدام التمثيل البياني والطرق الجبرية.

📚 تعلمنا فيما سبق

متباينة الدرجة الأولى في متغير واحد ، وعلمت أن حل المتباينة هي إيجاد جميع قيم المتغير التي تحقق هذه المتباينة ، وتكتب على صورة فترة.

📝 المصطلحات

متباينة من الدرجة الثانية (Quadratic Inequality) · الفترة (Interval) · أقل من ، أقل من أو يساوي (Less than, less than or equal to) · أكبر من ، أكبر من أو يساوي (Greater than, greater than or equal to)

🧠 تذكّر

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

📖 مسألة الدرس في مطار الكويت الدولي الجديد $T4$ ، تم تخصيص منطقة مستطيلة لوضع شاشة إلكترونية جديدة. إذا كان عرض المنطقة x متر ، وطولها يزيد عن عرضها بمقدار 6 متر ، ويريد مشرفو المطار أن تكون مساحة المنطقة لا تزيد عن 40 مترًا مربعًا.

الحل

عرض المنطقة x ، فإن الطول هو $x+6$

① عبارة تمثل مساحة المنطقة بدلالة x : $x(x+6)$

② «مساحة المنطقة لا تزيد عن 40 مترًا مربعًا» كمتباينة رياضية: $x(x+6) \le 40$

③ في الصورة العامة $ax^2+bx+c \le 0$: $x^2+6x-40 \le 0$

④ هل الحل سيكون قيمة واحدة أم مجموعة قيم؟ مجموعة قيم (فترة) ، لأنها متباينة وليست معادلة:

$(x+10)(x-4) \le 0$ ومع $x>0$ يكون $x \in (0,4]$

أولًا: حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام التحليل

⋆ خواص المتباينات في الأعداد الحقيقية

① عندما $a \cdot b \ge 0$ فإن: $(a \ge 0, b \ge 0)$ أو $(a \le 0, b \le 0)$

② عندما $a \cdot b \le 0$ فإن: $(a \le 0, b \ge 0)$ أو $(a \ge 0, b \le 0)$

⚠️ انتبه

إذا كان حاصل ضرب عددين حقيقيين أكبر من الصفر فإما العددان موجبان معًا أو العددان سالبان معًا.

✍ مثال (1)

حل كلًّا من المتباينات التالية جبريًّا ومثّل الحل على خط الأعداد

(a) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$

الحل

① نضع المتباينة على الصورة $ax^2 + bx + c \geq 0$

② نحلل:

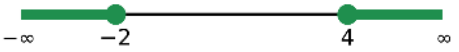
$$(x+2)(x-4) \geq 0$$

باستخدام خواص المتباينات:

إما	أو
$x+2 \geq 0\ ,\ x-4 \leq 0$	$x+2 \leq 0\ ,\ x-4 \geq 0$
$x \geq -2\ ,\ x \leq 4$	$x \leq -2\ ,\ x \geq 4$
$S_1 = [-2, 4]$	$S_2 = (-\infty, -2]$

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$S.S = (-\infty, -2] \cup [4, \infty)$$



(b) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

الحل

نحلل:

$$(x+2)(x-4) \leq 0$$

باستخدام خواص المتباينات:

إما	أو
$x+2 \geq 0\ ,\ x-4 \leq 0$	$x+2 \leq 0\ ,\ x-4 \geq 0$
$x \geq -2\ ,\ x \leq 4$	$x \leq -2\ ,\ x \geq 4$
$S_1 = [-2, 4]$	$S_2 = \emptyset$

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$S.S = [-2, 4]$$



🔍 **ملحوظة**

حل المتباينة $x^2 - 2x - 8 > 0$ هو $\mathbb{R} - [-2, 4]$ ، وحل المتباينة $x^2 - 2x - 8 < 0$ هو $(-2, 4)$

🎯 تحقق من فهمك (1)

حل كلًّا من المتباينات التالية جبريًّا ومثّل الحل على خط الأعداد

(a) $x^2 + x - 12 \leq 0$

الحل

نحلل:

$$(x+4)(x-3) \leq 0$$

باستخدام خواص المتباينات:

إما	أو
$x+4 \geq 0\ ,\ x-3 \leq 0$	$x+4 \leq 0\ ,\ x-3 \geq 0$
$x \geq -4\ ,\ x \leq 3$	$x \leq -4\ ,\ x \geq 3$
$S_1 = [-4, 3]$	$S_2 = \emptyset$

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$S.S = [-4, 3]$$



(b) $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

الحل

نحلل:

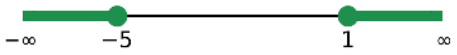
$$(x+5)(x-1) \geq 0$$

باستخدام خواص المتباينات:

إما	أو
$x+5 \geq 0\ ,\ x-1 \geq 0$	$x+5 \leq 0\ ,\ x-1 \leq 0$
$x \geq -5\ ,\ x \geq 1$	$x \leq -5\ ,\ x \leq 1$
$S_1 = [1, \infty)$	$S_2 = (-\infty, -5]$

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$S.S = (-\infty, -5] \cup [1, \infty)$$



(c) $x^2 - x - 6 < 0$

الحل

نحلل:

$(x-3)(x+2) < 0$

باستخدام خواص المتباينات:

إما	أو
$x-3>0\ ,\ x+2<0$	$x-3<0\ ,\ x+2>0$
$x>3\ ,\ x<-2$	$x<3\ ,\ x>-2$
$S_1=\emptyset$	$S_2=(-2,3)$

$S = S_1 \cup S_2$

$S.S = (-2, 3)$



(d) $(x-3)(2x+5) < 0$

الحل

$(x-3)(2x+5) < 0$

باستخدام خواص المتباينات:

إما	أو
$x-3>0\ ,\ 2x+5<0$	$x-3<0\ ,\ 2x+5>0$
$x>3\ ,\ x<-\frac{5}{2}$	$x<3\ ,\ x>-\frac{5}{2}$
$S_1=\emptyset$	$S_2=\left(-\frac{5}{2},3\right)$

$S = S_1 \cup S_2$

$S.S = \left(-\frac{5}{2}, 3\right)$



(e) $x^2 - 2x + 1 > 0$

الحل

$(x-1)^2 > 0$

مربع أي عدد حقيقي موجب ما عدا عندما $x-1=0$ أي $x=1$

$S.S = \mathbb{R} - \{1\}$



(f) $x^2 + 6x + 9 < 0$

الحل

$(x+3)^2 < 0$

لا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب

$S.S = \emptyset$

ثانيًا: حل المتباينة من الدرجة الثانية بدراسة الإشارة

هناك طرق عديدة لحل متباينة من الدرجة الثانية ، تعرضنا على طريقة توظيف خواص التباين ، والآن سنتعرف معًا على حل متباينة من الدرجة الثانية بالبحث عن إشارة المقدار الثلاثي ax^2+bx+c بإيجاد مجموعة جميع الأعداد الحقيقية x التي تجعل المقدار سالبًا أو موجبًا. لنتعرف أولًا على دراسة مقدار من الدرجة الأولى:

مثال (a-2) ادرس إشارة: $f(x)=2x-8$

الحل

① نضع $f(x)=0$
$2x-8=0$
$2x=8$
$x=4$

② نختبر $f(x)$ باختيار قيم مختلفة للمتغير x في كل فترة:

عندما $x<4$ (قيمة اختبارية 1):
$f(1)=2(1)-8=-6<0$

عندما $x>4$ (قيمة اختبارية 5):
$f(5)=2(5)-8=2>0$

x	$-\infty$		4		∞
$f(x)$		$-$	0	$+$	

يمين الصفر: إشارة معامل x ، يسار الصفر: عكس إشارة معامل x

مثال (b-2) ادرس إشارة: $g(x)=-3x+6$

الحل

① نضع $g(x)=0$
$-3x+6=0$
$-3x=-6$
$x=2$

② عندما $x<2$: $g(1)=-3(1)+6=3>0$
عندما $x>2$: $g(3)=-3(3)+6=-3<0$

x	$-\infty$		2		∞
$g(x)$		$+$	0	$-$	

يمين الصفر: إشارة معامل x (سالب) ، يسار الصفر: عكس إشارة معامل x (موجب)

📌 **قاعدة هامة: لدراسة إشارة $g(x)=ax+b\ ,\ a\neq 0$ نتبع التالي**

① نضع $g(x)=0\Rightarrow ax+b=0\Rightarrow x=-\frac{b}{a}$

② نحدد العدد $x=-\frac{b}{a}$ على خط الأعداد

③ تكون إشارة $g(x)$ مماثلة لإشارة a على يمين العدد $-\frac{b}{a}$ ومخالفة لإشارة a على يسار العدد $-\frac{b}{a}$

استكشف كيف يمكنك حل متباينة $x^2 - 4 < 0$ بيانيًّا؟

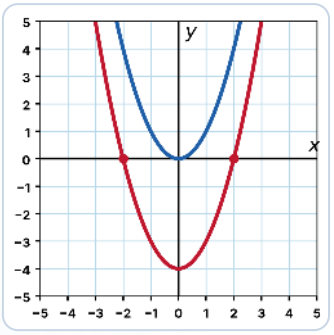
الحل

الخطوة (1): مثّل بيانيًّا $g(x) = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	4	1	0	1	4

الخطوة (2): مثّل بيانيًّا $f(x) = x^2 - 4$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	-3	-4	-3	0



بيان الدالة $f(x)$ هو إزاحة لبيان الدالة $g(x) = x^2$ بمقدار 4 وحدات لجهة الأسفل

الخطوة (3): قيم x الناتجة عن تقاطع المنحنى مع محور السينات: $x = 2$ ، $x = -2$

الخطوة (4): نلاحظ أن $f(x) < 0$ عندما x تنحصر بين العددين $-2, 2$ ومنحنى الدالة أسفل محور السينات ، و $f(x) > 0$ عندما $x > 2$ أو $x < -2$

x	$-\infty$		-2		2		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إشارة معامل x^2 خارج الجذرين ، عكس إشارة معامل x^2 بين الجذرين

ملحوظة

حل المتباينة: هي إيجاد قيم x التي يكون عندها منحنى الدالة أعلى أو أسفل محور السينات. الفترة: هي طريقة التعبير عن مجموعة من الأعداد الحقيقية ويمكن تمثيلها على خط الأعداد.

انتبه

بما أن $x^2 - 4 < 0$ فإن الطرفين $-2, 2$ لا ينتميان إلى مجموعة الحل.

تحقق من فهمك (2) من السؤال السابق أكمل الجدول التالي وحدد الفترات التي تعبر عن حل المتباينات:

الحل

المتباينة	الفترة
$x^2 - 4 \leq 0$	$[-2, 2]$
$x^2 - 4 > 0$	$(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
$x^2 - 4 \geq 0$	$(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

قاعدة هامة: لدراسة إشارة $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ نتبع التالي

① نوجد المعادلة المناظرة: $f(x) = 0$

② نوجد قيم x التي تجعل $f(x) = 0$ إما بالتحليل أو باستخدام المميز عندما يصعب التحليل

③ لدينا ثلاثة احتمالات:

- $\Delta > 0$: للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان $x_1 < x_2$ ← $f(x)$ تتبع إشارة a خارج الجذرين وتخالف إشارة a بينهما
- $\Delta = 0$: للمعادلة حلان متساويان $x_1 = x_2$ ← $f(x)$ تتبع إشارة a على طرفي الجذر
- $\Delta < 0$: ليس للمعادلة جذور حقيقية ← $f(x)$ تتبع إشارة a على طول خط الأعداد

✍ مثال (3)

حل كلًّا من المتباينات التالية

(a) $x^2 - 2x - 8 \le 0$

الحل

نضع $f(x) = x^2 - 2x - 8$

$f(x) = 0$

$(x-4)(x+2) = 0$

إما $x = 4$ | أو $x = -2$

$a = 1 > 0$

x	$-\infty$		-2		4		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S.S = [-2, 4]$



(b) $x^2 - x \le 5$

الحل

$x^2 - x - 5 \le 0$

نضع $f(x) = x^2 - x - 5$

$f(x) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-5) = 21 > 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

إما $x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ | أو $x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$

$a = 1 > 0$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S.S = \left[\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$



$x_1 \approx 2.8$

$x_2 \approx -1.8$

مستعينًا بالحل السابق وبدراسة الإشارة ، أكمل:

المتباينة	الحل
$x^2 - x < 5$	$\left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$
$x^2 - x \ge 5$	$\left[\dots, \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, \infty\right)$
$x^2 - x > 5$	$\left(\dots, \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, \infty\right)$

(c) $x^2 - 10x + 25 > 0$

الحل

نضع $f(x) = x^2 - 10x + 25$

$f(x) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-10)^2 - 4(1)(25) = 0$

$x = \dfrac{-b}{2a} = 5$

$a = 1 > 0$

x	$-\infty$		5		∞
$f(x)$		$+$	0	$+$	

$S.S = \mathbb{R} - \{5\}$



أي أن $x^2 - 10x + 25$ موجب دائمًا لكل قيم $x \in \mathbb{R}$ ما عدا $x = 5$

المتباينة	الحل
$x^2 - 10x + 25 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 - 10x + 25 < 0$	$\emptyset$
$x^2 - 10x + 25 \leq 0$	$\{5\}$

(d) $-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

الحل

نضع $f(x) = -3x^2 + 4x - 2$

$f(x) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (4)^2 - 4(-3)(-2) = -8 < 0$

المعادلة ليس لها جذور حقيقية

$a = -3 < 0$

إشارة $f(x)$ مثل إشارة a دائمًا (سالبة)

x	$-\infty$		∞
$f(x)$		$-$	

$S.S = \emptyset$

بما أن الدالة لا تقطع محور x فإن إشارتها ثابتة وتعتمد على إشارة a (سالبة دائمًا).

لحل المتباينة التربيعية بصورها المختلفة يجب ملاحظة إشارة Δ لإيجاد قيمة $f(x) = ax^2 + bx + c$

تحقق من فهمك (3)

حل كلًّا من المتباينات التالية جبريًّا ومثّل الحل على خط الأعداد

(a) $2x^2+3x-2<0$

الحل

نضع $f(x)=2x^2+3x-2$

$f(x)=0$

$(2x-1)(x+2)=0$

إما $x=\frac{1}{2}$ | أو $x=-2$

$a=2>0$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S.S=\left(-2,\frac{1}{2}\right)$



(b) $-x^2-x+6>0$

الحل

نضع $f(x)=-x^2-x+6$

$f(x)=0$

$-x^2-x+6=0$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

إما $x=2$ | أو $x=-3$

$a=-1<0$

x	$-\infty$		-3		2		∞
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S.S=(-3,2)$



(c) $x^2-6x+9\geq 0$

الحل

نضع $f(x)=x^2-6x+9$

$f(x)=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-6)^2-4(1)(9)=0$

$x=\frac{-b}{2a}=3$

$a=1>0$

x	$-\infty$		3		∞
$f(x)$		$+$	0	$+$	

$S.S=\mathbb{R}$



حالة خاصة: حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام القيمة المطلقة

★ خاصية

إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين فإن: $a\leq b \Leftrightarrow a^2\leq b^2$

يمكن استبدال الرمز $\leq$ بالرمز $<$ أو $\geq$ أو $>$. تستخدم هذه الخاصية لحل متباينات مثل $x^2>4$ ، $x^2<9$

فمثلًا لحل المتباينة $x^2<9$ نوجد الجذر التربيعي للطرفين: $\sqrt{x^2}<\sqrt{9} \Rightarrow |x|<3 \Rightarrow -3<x<3$ ،

مجموعة الحل = $(-3,3)$

🧠 **تذكّر:** بفرض أن a, b, c أعداد حقيقية

① إذا كان $a < b$ فإن $a + c < b + c$ ② إذا كان $a < b$ و $c > 0$ فإن $a \cdot c < b \cdot c$ ③ إذا كان $a < b$ و $c < 0$ فإن $a \cdot c > b \cdot c$ ④ إذا كان $a > 0$: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ ، $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ أو $x < -a$

🔍 **ملحوظة**

عند حل المتباينة $x^2 < 0$ نلاحظ أنه لا يوجد أي عدد حقيقي مربعه أصغر من الصفر ، فمجموعة حلها $\emptyset$ ، وبالمقابل $x^2 \geq 0$ صحيحة لأي عدد حقيقي فمجموعة حلها $\mathbb{R}$

- $\emptyset \leftarrow x^2 < 0$
- $\{0\} \leftarrow x^2 \leq 0$
- $\mathbb{R} \leftarrow x^2 \geq 0$
- $\mathbb{R} - \{0\} \leftarrow x^2 > 0$

⋆ **بصفة عامة:** إذا كان a, b, c أعدادًا حقيقية بحيث $c < 0$, $a \neq 0$ فإن

① مجموعة حل المتباينة $(ax + b)^2 < c$ هي $\emptyset$

② مجموعة حل المتباينة $(ax + b)^2 > c$ هي $\mathbb{R}$

③ مجموعة حل المتباينة $(ax + b)^2 < 0$ هي $\emptyset$ ، ومجموعة حل المتباينة $(ax + b)^2 > 0$ هي

$$\mathbb{R} - \left\{\frac{-b}{a}\right\}$$

✍ مثال (4)

أوجد مجموعة حل المتباينة ومثّل الحل على خط الأعداد

(a) $2x^2 + 5 \geq 23$

الحل

$2x^2 \geq 23 - 5$ ← بإضافة (-5) لطرفي المتباينة

$2x^2 \geq 18$

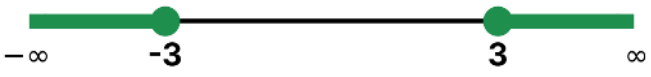
$x^2 \geq 9$ ← بضرب طرفي المتباينة بـ $\frac{1}{2}$

$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{9}$ ← بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$|x| \geq 3$ ← من خواص القيمة المطلقة

إما $x \geq 3$ | أو $x \leq -3$

$$S.S = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$$



$(5x+7)^2+3<2$ **(b)**

الحل

$$(5x+7)^2<2-3$$
$$(5x+7)^2<-1$$

مربع أي عدد حقيقي لا يكون سالبًا

$$S.S=\emptyset$$

تذكّر

① $\sqrt{x^2}=|x|$ ② $|x|\le a\ ,\ a>0\Rightarrow -a\le x\le a$ ③ $|x|\ge a\ ,\ a>0\Rightarrow x\ge a$ أو $x\le -a$ ·

مجموعة حل كل من المتباينتين $|x|<0$ ، $x^2<0$ **هي** $\emptyset$

تحقق من فهمك (4)

أوجد مجموعة حل المتباينة ومثّل الحل على خط الأعداد

$3x^2-4\le 8$ **(a)**

الحل

$$3x^2\le 8+4$$
$$3x^2\le 12$$
$$x^2\le 4$$
$$\sqrt{x^2}\le\sqrt{4}$$
$$|x|\le 2$$
$$-2\le x\le 2$$

$$S.S=[-2,2]$$



$(4x-3)^2+2>-3$ **(b)**

الحل

$$(4x-3)^2>-3-2$$
$$(4x-3)^2>-5$$

دائمًا $(4x-3)^2\ge 0>-5$

$$S.S=\mathbb{R}$$

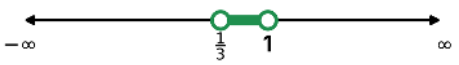


(c) $(2-3x)^2 < 1$

الحل

$$\sqrt{(2-3x)^2} < \sqrt{1}$$
$$|2-3x| < 1$$
$$-1 < 2-3x < 1$$
$$-1-2 < -3x < 1-2$$
$$-3 < -3x < -1$$
$$\frac{1}{3} < x < 1$$

$$S.S = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$



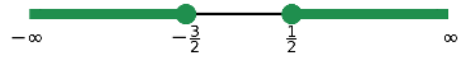
(d) $(2x+1)^2 - 3 \geq 1$

الحل

$$(2x+1)^2 \geq 1+3$$
$$(2x+1)^2 \geq 4$$
$$\sqrt{(2x+1)^2} \geq \sqrt{4}$$
$$|2x+1| \geq 2$$

إما	أو
$2x+1 \geq 2$	$2x+1 \leq -2$
$2x \geq 2-1$	$2x \leq -2-1$
$x \geq \frac{1}{2}$	$x \leq \frac{-3}{2}$

$$S.S = \left(-\infty, \frac{-3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$



استخدام النماذج

نموذج قام قسم الرياضيات في إحدى مدارس منطقة الفروانية التعليمية في دولة الكويت بتجهيز مسرح المدرسة لتقديم دورة للمعلمين الجدد ، حيث وزعت الكراسي على شكل مربع مكون من 20 صفًا أفقيًا وعموديًا. ترغب الإدارة في تقليل عدد الصفوف أفقيًا وعموديًا مع الحفاظ على الشكل المربع ، بحيث لا يزيد عدد الكراسي عن 225 كرسيًا. كم صفًا من الكراسي يجب على الإدارة إزالته؟

الحل

ليكن x عدد صفوف الكراسي المراد إزالتها حيث
$0 < x < 20$

عدد الصفوف المتبقية: $20-x$ ، عدد الكراسي = $(20-x)^2$

① المتباينة التي تمثل الموقف:
$(20-x)^2 \leq 225$

② المعادلة التربيعية المرتبطة:
$(20-x)^2 = 225$

← فرق بين مربعين $(x-20)^2 - (15)^2 = 0$
$(x-20-15)(x-20+15) = 0$

$(x-35)(x-5) = 0$
$x = 5$ أو $x = 35$

x	$-\infty$		5		35		∞
$f(x)$		+	0	−	0	+	

$(20-x)^2 \leq 225$ عندما $5 \leq x \leq 35$ ، ومع الشرط $0 < x < 20$ يكون $5 \leq x < 20$

③ عدد الصفوف الممكن إزالتها 5 صفوف على الأقل.

هل يمكن أن يكون عدد الصفوف المحذوفة عددًا كسريًا؟ لا ، لأن عدد الصفوف عدد صحيح ، لذا
$x \in \{5, 6, \ldots, 19\}$

🤔 فكّر معي

① ما الفرق بين حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد وحل متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد؟ حل المعادلة قيم محددة (جذور) بينما حل المتباينة فترة أو اتحاد فترات (مجموعة غير منتهية من القيم).

② ما علاقة بحث إشارة الدالة التربيعية بحل متباينات الدرجة الثانية؟ حل المتباينة $f(x) > 0$ (أو < 0) هو الفترات التي تكون فيها إشارة $f(x)$ موجبة (أو سالبة) حسب دراسة الإشارة.

💪 أتدرّب وأحل المسائل

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

1 مجموعة حل المتباينة $(x+2)(x-5) > 0$ هي:

(a) $(-2, 5)$ (b) $[-2, 5]$

(c) $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$ (d) $\mathbb{R}$

2 مجموعة حل المتباينة $x^2 - 2x < 0$ هي:

(a) $(0, 2)$ (b) $(-\infty, 0]$ (c) $(2, \infty)$ (d) $[0, 2]$

3 مجموعة حل المتباينة $x^2 + 6x + 9 \le 0$ هي:

(a) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ (b) $\{-3\}$

(c) $[-3, 3]$ (d) $\mathbb{R}$

4 أي مما يلي ليس حلًّا للمتباينة $4x^2 - 4x - 5 > 0$:

(a) 60 (b) -20 (c) 2 (d) 0

5 أي من المتباينات التالية حلها نفس حل المتباينة $-2x^2 + 5x - 3 > 0$:

(a) $x^2 - 5 > 2x^2$ (b) $-x^2 - x > x^2 - 4x$

(c) $2x^2 + 3 < 5x$ (d) $x^2 - 3x > 2x - x^2$

💬 تعليل الإجابات

(1) إشارة a موجبة خارج الجذرين · **(2)** $x(x-2) < 0$ بين الجذرين · **(3)** $(x+3)^2 \le 0$ عندما $x = -3$ فقط · **(4)** $f(0) = -5 < 0$ · **(5)** بضرب المتباينة في (-1) : $2x^2 - 5x + 3 < 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3 < 5x$

أسئلة المقال (1)

أوجد مجموعة حل كلٍّ من المتباينات التالية

(a) $x^2 - 25 > 0$

الحل

نضع $f(x) = x^2 - 25$

$f(x) = 0$

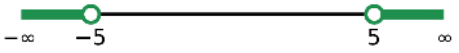
$(x-5)(x+5) = 0$

إما $x = 5$ | أو $x = -5$

$a = 1 > 0$

x	$-\infty$		-5		5		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S.S = (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$



(b) $x^2 - 5x + 6 < 0$

الحل

نضع $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$f(x) = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$

إما $x = 3$ | أو $x = 2$

$a = 1 > 0$

x	$-\infty$		2		3		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S.S = (2, 3)$



(c) $x^2 - 6x + 9 > 0$

الحل

نضع $f(x) = x^2 - 6x + 9$

$f(x) = 0$

$(x-3)^2 = 0$

(جذر مكرر) $x = 3$

$a = 1 > 0$

x	$-\infty$		3		∞
$f(x)$		$+$	0	$+$	

$S.S = \mathbb{R} - \{3\}$



(d) $3x^2 - 6x - 10 < -10$

الحل

$3x^2 - 6x - 10 + 10 < 0$

$3x^2 - 6x < 0$

نضع $f(x) = 3x^2 - 6x$

$f(x) = 0$

$3x(x-2) = 0$

إما $x = 2$ | أو $x = 0$

$a = 3 > 0$

x	$-\infty$		0		2		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S.S = (0, 2)$



(e) $(3x-7)(2x+9) \le 0$

الحل

نضع $f(x) = (3x-7)(2x+9)$

$$f(x) = 0$$
$$(3x-7)(2x+9) = 0$$

إما $x = \frac{7}{3}$ | أو $x = -\frac{9}{2}$

$$a = 6 > 0$$

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		$\frac{7}{3}$		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S.S = \left[-\frac{9}{2}, \frac{7}{3}\right]$$



(f) $2x^2 + 5x - 3 < -10$

الحل

$$2x^2 + 5x - 3 + 10 < 0$$
$$2x^2 + 5x + 7 < 0$$

نضع $f(x) = 2x^2 + 5x + 7$

$$f(x) = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (5)^2 - 4(2)(7) = -31 < 0$$

المعادلة ليس لها جذور حقيقية

$$a = 2 > 0$$

إشارة $f(x)$ مثل إشارة a دائمًا (موجبة)

x	$-\infty$		∞
$f(x)$		$+$	

$$S.S = \emptyset$$

(g) $-2x^2 + x + 21 < 0$

الحل

نضع $f(x) = -2x^2 + x + 21$

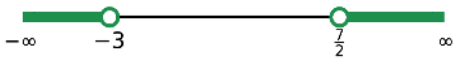
$$f(x) = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (1)^2 - 4(-2)(21) = 169 > 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-1 \pm 13}{-4}$$

إما $x = \frac{7}{2}$ | أو $x = -3$

$$a = -2 < 0$$

x	$-\infty$		-3		$\frac{7}{2}$		∞
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S.S = (-\infty, -3) \cup \left(\frac{7}{2}, \infty\right)$$



(h) $3x^2 + x + 7 < 0$

الحل

نضع $f(x) = 3x^2 + x + 7$

$$f(x) = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (1)^2 - 4(3)(7) = -83 < 0$$

المعادلة ليس لها جذور حقيقية

$$a = 3 > 0$$

إشارة $f(x)$ مثل إشارة a دائمًا (موجبة)

x	$-\infty$		∞
$f(x)$		$+$	

$$S.S = \emptyset$$

(k) $x^2 - 6x + 8 < 0$

الحل

نضع $f(x) = x^2 - 6x + 8$

$f(x) = 0$

$(x-2)(x-4) = 0$

إما $x = 4$ | أو $x = 2$

$a = 1 > 0$

∞		4		2		$-\infty$	x
	+	0	−	0	+		$f(x)$

$S.S = (2, 4)$



(l) $-2x^2 + 6x + 8 \geq 0$

الحل

نضع $f(x) = -2x^2 + 6x + 8$

$f(x) = 0$

$-2(x-4)(x+1) = 0$

إما $x = 4$ | أو $x = -1$

$a = -2 < 0$

∞		4		-1		$-\infty$	x
	−	0	+	0	−		$f(x)$

$S.S = [-1, 4]$



(m) $(x-4)(3-x) > 0$

الحل

نضع $f(x) = (x-4)(3-x)$

$f(x) = 0$

$(x-4)(3-x) = 0$

إما $x = 4$ | أو $x = 3$

$a = -1 < 0$

∞		4		3		$-\infty$	x
	−	0	+	0	−		$f(x)$

$S.S = (3, 4)$



(n) $x^2 + 2x - 8 \leq 0$

الحل

نضع $f(x) = x^2 + 2x - 8$

$f(x) = 0$

$(x+4)(x-2) = 0$

إما $x = 2$ | أو $x = -4$

$a = 1 > 0$

∞		2		-4		$-\infty$	x
	+	0	−	0	+		$f(x)$

$S.S = [-4, 2]$



(o) $9x^2+1\geq 0$

الحل

نضع $f(x)=9x^2+1$

$f(x)=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(0)^2-4(9)(1)=-36<0$

المعادلة ليس لها جذور حقيقية

$a=9>0$

إشارة $f(x)$ مثل إشارة a دائمًا (موجبة)

x	$-\infty$		∞
$f(x)$		$+$	

$S.S=\mathbb{R}$



(p) $-16x^2+24x-7>0$

الحل

نضع $f(x)=-16x^2+24x-7$

$f(x)=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(24)^2-4(-16)(-7)=128>0$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

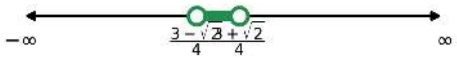
$x=\dfrac{-24\pm\sqrt{128}}{-32}$

إما $x=\dfrac{3+\sqrt{2}}{4}$ | أو $x=\dfrac{3-\sqrt{2}}{4}$

$a=-16<0$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{2}}{4}$		$\frac{3+\sqrt{2}}{4}$		∞
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S.S=\left(\dfrac{3-\sqrt{2}}{4},\dfrac{3+\sqrt{2}}{4}\right)$



(2) اكتشف الخطأ تقول نور: إن المتباينة $-x^2+2x-7<0$ لا حلول لها. بيّن الخطأ في حل نور ثم صحّحه.

الحل

نضع $f(x)=-x^2+2x-7$

$f(x)=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(2)^2-4(-1)(-7)=-24<0$

المعادلة ليس لها جذور حقيقية

$a=-1<0$

إشارة $f(x)$ مثل إشارة a دائمًا (سالبة)

x	$-\infty$		∞
$f(x)$		$-$	

$S.S=\mathbb{R}$



المتباينة صحيحة لكل الأعداد الحقيقية ، وخطأ نور أنها لم تنتبه إلى أن $f(x)<0$ دائمًا.

(3) اكتب متباينة تربيعية يكون حلها مجموعة الأعداد الحقيقية.

الحل

مثال: $x^2+1>0$ (أو $x^2\geq 0$)
لأن $\Delta=0-4=-4<0$ و $a=1>0$
فإشارة $f(x)$ موجبة دائمًا

مهارات تفكير عليا

(1) أوجد مجموعة حل المتباينة:
$(x+3)^2\leq 10-3(x+3)$

الحل

بفرض $u=x+3$:
$u^2\leq 10-3u$
$u^2+3u-10\leq 0$
$(u+5)(u-2)=0$
$u=2$ أو $u=-5$

x	$-\infty$		-5		2		∞
$f(u)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$-5\leq u\leq 2$
$-5\leq x+3\leq 2$
$-5-3\leq x\leq 2-3$
$-8\leq x\leq -1$
$S.S=[-8,-1]$

(2) إذا علمت أن $\Delta=0$ ، فما حل المتباينة $-2x^2+8x+c<0$ ؟

الحل

$\Delta=0$ ← جذر مكرر
$x=\dfrac{-b}{2a}$
$x=\dfrac{-8}{2(-2)}=2$
$a=-2<0$ ← الدالة سالبة دائمًا ما عدا عند الجذر المكرر

x	$-\infty$		2		∞
$f(x)$		$-$	0	$-$	

$S.S=\mathbb{R}-\{2\}$

(3) تقول هديل: إن المتباينة $2x^2+x-3<0$ و $\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+1}<0$ لهما الحل نفسه. هل توافقها الرأي؟ وضّح إجابتك.

الحل

نعم ، لأن $x^2+1>0$ دائمًا ، فإشارة الكسر هي إشارة البسط.

نضع $f(x)=2x^2+x-3$
$f(x)=0$
$(2x+3)(x-1)=0$

إما $x=1$ | أو $x=-\dfrac{3}{2}$

$a=2>0$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S.S=\left(-\dfrac{3}{2},1\right)$



📋 **خلاصة البند (1-5): دراسة إشارة ax^2+bx+c**

- $\Delta > 0$: إشارة a خارج الجذرين وعكسها بينهما
- $\Delta = 0$: إشارة a على طرفي الجذر المكرر
- $\Delta < 0$: إشارة a على طول خط الأعداد

النقطة المغلقة عند $\geq$, $\leq$ والنقطة المفتوحة عند $>$, $<$

🌟 أحسنت! أنهيت الوحدة الأولى بنجاح 👏