مذكرات سما

الرياضيات

الوحدة 2



الصف العاشر

المرحلة الثانوية



الفصل الدراسي الأول

2027 - 2026

www.samakw.com

samakw_net

60084568 /50855008/97442417

حولي مجمع بيروت الدور الأول

الصف العاشر · الفصل الدراسي الأول

المذكرة الشاملة — الوحدة الثانية

التشابه — نسخة الحل · 2026 / 2027

10
الصف

بنود الوحدة

البند (2-1) التناسب

البند (2-2) تشابه المضلعات

البند (2-3) تشابه المثلثات

البند (2-4) التشابه في المثلثات القائمة الزاوية

البند (2-5) التناسبات والمثلثات المتشابهة

طريقة الحل المعتمدة

📌 القانون قبل التعويض ، وكل خطوة في سطر

📐 اسم النظرية أو النتيجة في مسائل الهندسة والتشابه

✍️ خطوة النقل وتجميع الحدود المتشابهة

🎯 الرسومات دقيقة ، والحل تحت السؤال

البند (2-1): التناسب — Proportion

💡 فكرة الدرس

التعرف على خواص التناسب وكذلك التناسب المتسلسل (الهندسي) واستخدامه في حل التمارين الرياضية.

📚 تعلمنا فيما سبق

النسبة والتناسب – التقسيم التناسبي – تطبيقات حياتية (الزكاة ، الميراث ، مقياس الرسم).

📝 المصطلحات

النسبة (Ratio) · التناسب (Proportion) · خواص التناسب (Properties of Proportion) · تناسب متسلسل (Continued Proportion)

🧠 تذكّر

$\mathbb{R}^*$: هي مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.

📖 مسألة الدرس

لدى ديما وخلود دوائر متطابقة ، قامت ديما بتقسيم دائرتها إلى ثلاثة أجزاء متساوية ولونت جزئين ، بينما خلود جزأت دائرتها إلى ستة أجزاء متساوية ولونت أربعة أجزاء. هل $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ؟

الحل: نعم ، لأن $2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$ (الجزء الملون متساوٍ في الدائرتين).

تعلمت في دراستك السابقة

النسبة: هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه ولهما نفس وحدة القياس ، ويمكن التعبير عن النسبة بصورة a إلى b وتكتب $a:b$ أو $\frac{a}{b}$

التناسب: هو تساوي نسبتين أو أكثر ، فمثلًا ... $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{12}{20} = \ldots$ ويمكن أن يكتب

$$3:5 = 6:10 = 12:20 = \ldots$$

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكانت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن a, b, c, d تسمى أعدادًا متناسبة ، ويسمى a الأول المتناسب ، b الثاني المتناسب ، c الثالث المتناسب ، d الرابع المتناسب ، و a, d طرفي التناسب ، b, c وسطي التناسب ($a:b = c:d$).

خواص التناسب

استكشف إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ حيث $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

الحل

① بضرب التناسب في $(b \cdot d)$: $\frac{a}{b}(b \cdot d) = \frac{c}{d}(b \cdot d)$

② بالاختصار والتبسيط: $a \cdot d = c \cdot b$

هل نستطيع أن نضع قاعدة؟ نعم: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

⋆ خاصية (1): «الضرب التقاطعي»

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن $a \cdot d = c \cdot b$ ، أي إن حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين ، وتسمى هذه الخاصة «قاعدة الضرب التقاطعي».

مثال (1) إذا كانت $2, x, 4, 6$ أعدادًا متناسبة ، أوجد قيمة x

الحل

$$\frac{2}{x} = \frac{4}{6}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$4x = 2 \times 6$$
$$4x = 12$$
$$x = \frac{12}{4} = 3$$

تحقق من فهمك (1) إذا كانت $3, 5, 6, x$ أعدادًا متناسبة ، أوجد قيمة x

الحل

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{x}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$3x = 5 \times 6$$
$$3x = 30$$
$$x = \frac{30}{3} = 10$$

مثال (2) أوجد الرابع المتناسب للأعداد: $1, 3, 9, \ldots$

الحل

نفرض أن الرابع المتناسب هو x

$$\frac{1}{3} = \frac{9}{x}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$x = (3)(9)$$
$$x = 27$$

تحقق من فهمك (2) أوجد الثالث المتناسب للأعداد: $4, 7, \ldots, 35$

الحل

نفرض الثالث المتناسب x

$$\frac{4}{7} = \frac{x}{35}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$7x = 4 \times 35$$
$$7x = 140$$
$$x = \frac{140}{7} = 20$$

مثال (3) أوجد العدد الذي إذا طُرح من حدَّي النسبة $\frac{7}{9}$ أصبحت $\frac{4}{5}$

الحل

نفرض أن العدد x

$$\frac{7-x}{9-x}=\frac{4}{5}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$4(9-x)=5(7-x)$$
$$36-4x=35-5x$$
$$-4x+5x=35-36$$
$$x=-1$$

تحقق من فهمك (3) أوجد العدد الذي إذا طُرح من حدَّي النسبة $\frac{5}{6}$ أصبحت $\frac{9}{4}$

الحل

نفرض العدد x

$$\frac{5-x}{6-x}=\frac{9}{4}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$4(5-x)=9(6-x)$$
$$20-4x=54-9x$$
$$-4x+9x=54-20$$
$$5x=34$$
$$x=\frac{34}{5}$$

مثال (4) إذا كان $(5x-1):(x+4)=4:5$ أوجد قيمة x

الحل

$$\frac{5x-1}{x+4}=\frac{4}{5}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$5(5x-1)=4(x+4)$$
$$25x-5=4x+16$$
$$25x-4x=16+5$$
$$21x=21$$
$$x=1$$

تحقق من فهمك (4) أوجد قيمة x إذا كان: $(2x+3):(3x-5)=3:4$

الحل

$$\frac{2x+3}{3x-5}=\frac{3}{4}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$4(2x+3)=3(3x-5)$$
$$8x+12=9x-15$$
$$8x-9x=-15-12$$
$$-x=-27$$
$$x=27$$

استكشف هل عكس الخاصية (1) صحيح؟ إذا كان $a\cdot d=b\cdot c$ وكانت $a,b,c,d\in\mathbb{R}^*$

الحل

① نقسم طرفي المعادلة على $(b\cdot d)$:

$$\frac{a\cdot d}{b\cdot d}=\frac{b\cdot c}{b\cdot d}$$

② بالاختصار والتبسيط:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

نعم ، عكس الخاصية (1) صحيح.

⋆ خاصية (2): «عكس الخاصية 1»

إذا كان $a\cdot d=b\cdot c$ وكان $a,b,c,d\in\mathbb{R}^*$ فإن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

ملحوظة

إذا كانت $ax = by$ فيكون $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$ حيث $a, b, x, y \in \mathbb{R}^*$

مثال (5) إذا كان $5a = 4b$ فأوجد $\frac{a}{b}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}^*$

الحل

$$5a = 4b$$
$$\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$$

تحقق من فهمك (5) إذا كان $2a = 7b$ ، فأوجد $\frac{a}{b}$

الحل

$$2a = 7b$$
$$\frac{a}{b} = \frac{7}{2}$$

استخدام النماذج

استخدام التناسب في الرياضيات

نموذج يمارس إبراهيم رياضة كرة السلة لمدة 30 دقيقة ليفقد 300 سعرة حرارية ، فإذا أراد إبراهيم أن يفقد 450 سعرة حرارية ، فكم دقيقة يحتاج إبراهيم ليمارس لعبة كرة السلة؟

الحل

نفرض أن x يمثل عدد الدقائق

$$\frac{300}{450} = \frac{30}{x}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$300x = 30 \times 450$$

$x = \frac{13500}{300} = 45$ دقيقة

لماذا؟ لأن عدد السعرات المفقودة يتناسب طرديًّا مع زمن اللعب ، فنسبة السعرات إلى الدقائق ثابتة.

لنعمل معًا لنستكشف إذا كان لدينا التناسب $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ هل تستطيع التحقق مما يلي؟ (1)

$\frac{6}{3} = \frac{10}{5}$ (3) $\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$ (2) $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$

الحل

جميعها صحيحة ، لأن الضرب التقاطعي في كل منها = 30

نستنتج أن التناسب يبقى صحيحًا عند قلب النسبتين أو تبديل الوسطين أو تبديل الطرفين.

خاصية (3) ⋆

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ وكان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ فإن: (1) $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (3) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (2) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

هل يمكن برهان خاصية (3)؟ نعم: من الضرب التقاطعي $ad = bc$ ، ثم بالقسمة على ac نحصل على (1) ، وعلى cd نحصل على (2) ، وعلى ab نحصل على (3).

مثال (6) أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث $y \neq 0, x \neq 0$: **(a)** $3x = 4y$ **(b)** $\frac{2x+y}{5x-3y} = \frac{1}{2}$

الحل

(a)
$$3x = 4y$$
$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

(b) حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين:
$$2(2x+y) = 5x - 3y$$
$$4x + 2y = 5x - 3y$$

← فصل المتغيرات
$$4x - 5x = -3y - 2y$$
$$-x = -5y$$
$$x = 5y$$
$$\frac{x}{y} = \frac{5}{1}$$
$$x : y = 5 : 1$$

معلومة: فصل المتغيرات
بوضع الحدود الجبرية التي تحتوي على المتغير x في أحد الأطراف للمتساوية والحدود الجبرية التي تحتوي على المتغير y في الطرف الآخر للمتساوية.

تحقق من فهمك (6) أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث $y \neq 0, x \neq 0$: **(a)** $5x = 7y$ **(b)** $\frac{5x-2y}{5x+2y} = \frac{1}{4}$

الحل

(a)
$$5x = 7y$$
$$\frac{x}{y} = \frac{7}{5}$$

(b) حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين:
$$4(5x - 2y) = 5x + 2y$$
$$20x - 8y = 5x + 2y$$
$$20x - 5x = 2y + 8y$$
$$15x = 10y$$
$$\frac{x}{y} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

استكشف إذا كان $\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$ ، هل يمكن القول إن $x = 3, y = 7$ ؟

الحل

تذكر أن: $\frac{x}{y} = \frac{3}{7} = \frac{3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{3 \times 3}{7 \times 3} = \dots$

أي إن: إذا كان $\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$ فإن $x = 3k\ ,\ y = 7k$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$

لا يشترط $x = 3, y = 7$

خاصية (4) ⋆

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ حيث k عدد ثابت ، فإن: $k \in \mathbb{R}^*$ $a = bk\ ,\ c = dk$

مثال (7) إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ أوجد $\frac{2a+5b}{3b+2a}$

الحل

نفرض أن $a=3k\ ,\ b=4k\ ,\ k\neq 0$ ← باستخدام خاصية **4**

$$\frac{2a+5b}{3b+2a}=\frac{2(3k)+5(4k)}{3(4k)+2(3k)}$$

$$=\frac{6k+20k}{12k+6k}$$ ← تجميع الحدود المتشابهة

$$=\frac{26k}{18k}$$

$$=\frac{13}{9}$$

الحل الآخر: بقسمة كل من البسط والمقام على b :

$$\frac{\frac{2a}{b}+\frac{5b}{b}}{\frac{3b}{b}+\frac{2a}{b}}=\frac{2\left(\frac{3}{4}\right)+5}{3+2\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$=\frac{\frac{13}{2}}{\frac{9}{2}}=\frac{13}{9}$$

تحقق من فهمك (7) إذا كان $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار: $\frac{2x+3y}{5x+2y}$

الحل

نفرض $x=2k\ ,\ y=3k$

$$\frac{2x+3y}{5x+2y}=\frac{2(2k)+3(3k)}{5(2k)+2(3k)}$$

$$=\frac{4k+9k}{10k+6k}$$

$$=\frac{13k}{16k}$$

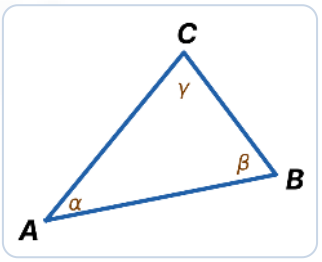
$$=\frac{13}{16}$$

استخدام النماذج

استخدام التناسب في الهندسة

نموذج إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث هي $4:5:6$ ، احسب قياس كل زاوية من زوايا المثلث.

الحل



نفرض أن قياسات زوايا المثلث تمثلها α, β, γ

وتكون $\alpha:\beta:\gamma=4:5:6$

$$\frac{\alpha}{4}=\frac{\beta}{5}=\frac{\gamma}{6}=k\ ,\ k\neq 0$$

$\alpha=4k\ ,\ \beta=5k\ ,\ \gamma=6k$ ← خاصية **(4)**

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية = 180°

$$4k+5k+6k=180^\circ$$

$$15k=180^\circ$$

$$k=12^\circ$$

$$m\left(\hat{A}\right)=4(12^\circ)=48^\circ$$

$$m\left(\hat{B}\right)=5(12^\circ)=60^\circ$$

$$m\left(\hat{C}\right)=6(12^\circ)=72^\circ$$

التحقق: ✔ $48^\circ+60^\circ+72^\circ=180^\circ$

معلومة

α, β, γ هي حروف لاتينية تستخدم للتعبير عن الزوايا: α تُقرأ ألفا ، β تُقرأ بيتا ، γ تُقرأ جاما.

لنعمل معًا لنستكشف

إذا كان $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}$

الحل

① مجموع مقدمات النسب الثلاث ÷ مجموع توالي النسب الثلاث: $\frac{3+6+9}{4+8+12}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$ = إحدى النسب

② مجموع المقدمات الأولى والثانية ÷ مجموع التوالي الأولى والثانية: $\frac{3+6}{4+8}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ = إحدى النسب

③ النسبتان الأولى والثالثة: $\frac{3+9}{4+12}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

نستنتج أن: مجموع أي مقدمات ÷ مجموع تواليها = إحدى النسب

④ $\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ ، $\frac{3\times(-2)}{4\times(-2)}=\frac{-6}{-8}=\frac{3}{4}$

← النسبة لا تتغير إذا تم ضرب حديها في عدد حقيقي لا يساوي الصفر

⋆ مما سبق نستنتج: خاصية (4)

إذا كان لدينا مجموعة من النسب المتساوية فإنه يمكننا الحصول على العديد من النسب الأخرى التي كل منها يساوي أي نسبة من النسب الأصلية ، وذلك عن طريق جمع المقدمات والتوالي لكل النسب أو بعضها سواء مباشرة أو بعد ضرب حدي كل نسبة في أي عدد حقيقي لا يساوي الصفر.

إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{\ell}{s}=\dots$ وكانت $k_1, k_2, k_3, \dots \in \mathbb{R}^*$ فإن: إحدى النسب = $\frac{ak_1+ck_2+\ell k_3+\dots}{bk_1+dk_2+sk_3+\dots}$

ℹ️ معلومة

النسبة $\frac{x}{y}$: يسمى x مقدم النسبة ، ويسمى y تالي النسبة.

مثال (8)

إذا كانت الأعداد a, b, c متناسبة مع $5, 6, 3$ ، أوجد قيمة المقدار: $\frac{a+2b+c}{3a+b+c}$

الحل

$\frac{a}{5}=\frac{b}{6}=\frac{c}{3}$

بضرب حدي النسبة الثانية في 2 وجمع المقدمات والتوالي للنسب الثلاث:

إحدى النسب = $\frac{a+2b+c}{5+12+3}=\frac{a+2b+c}{20}$ ← (1)

بضرب حدي النسبة الأولى في 3 وجمع المقدمات والتوالي للنسب الثلاث:

إحدى النسب = $\frac{3a+b+c}{15+6+3}=\frac{3a+b+c}{24}$ ← (2)

$\frac{a+2b+c}{20}=\frac{3a+b+c}{24}$

$\frac{a+2b+c}{3a+b+c}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$

الحل الآخر (باستخدام خاصية 4): نفرض

$\frac{a}{5}=\frac{b}{6}=\frac{c}{3}=k\ ,\ k\neq0$

$a=5k\ ,\ b=6k\ ,\ c=3k$

$\frac{a+2b+c}{3a+b+c}=\frac{5k+2(6k)+3k}{3(5k)+6k+3k}$

$=\frac{5k+12k+3k}{15k+6k+3k}$

$=\frac{20k}{24k}=\frac{5}{6}$

⚠️ انتبه

إذا كانت a, b, c متناسبة مع E, F, G فإن $\frac{a}{E} = \frac{b}{F} = \frac{c}{G} = k$ حيث $k \neq 0$ عدد ثابت.

تحقق من فهمك (8) إذا كان $\frac{a}{2} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5}$ ، أوجد $\frac{a+2b}{3b+c}$ (بطريقتين مختلفتين).

الحل

الطريقة الأولى: نفرض

$$a = 2k\ ,\ b = 7k\ ,\ c = 5k$$

$$\frac{a+2b}{3b+c} = \frac{2k+2(7k)}{3(7k)+5k}$$

$$= \frac{2k+14k}{21k+5k}$$

$$= \frac{16k}{26k} = \frac{8}{13}$$

الطريقة الثانية: إحدى النسب =

$$\frac{a+2b}{2+14} = \frac{a+2b}{16}$$

$$\frac{3b+c}{21+5} = \frac{3b+c}{26}$$ = إحدى النسب

$$\frac{a+2b}{16} = \frac{3b+c}{26}$$

$$\frac{a+2b}{3b+c} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$$

فكّر معي عرض المعلم السؤال التالي: إذا كان $2a = 3b = 5c$ أوجد $a: b: c$ ، وقام فهد وإبراهيم بحل السؤال بطريقتين مختلفتين. أي الطريقتين تؤيد؟

الحل

طريقة إبراهيم: $2a = 3b = 5c$ بالقسمة على 30 :

$$\frac{2a}{30} = \frac{3b}{30} = \frac{5c}{30}$$

$$\frac{a}{15} = \frac{b}{10} = \frac{c}{6}$$

$$a: b: c = 15: 10: 6$$

طريقة فهد: $a: b: c = 2: 3: 5$

طريقة إبراهيم صحيحة. تحقق:

تعطي $a = 15, b = 10, c = 6$

✔ $2a = 3b = 5c = 30$

أما طريقة فهد فخاطئة: تعطي $a = 2, b = 3$

✖ $2a = 4 \neq 3b = 9$

التناسب المتسلسل (الهندسي)

📌 تعريف

الكميات a, b, c في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ أو $b^2 = ac$ ، ويسمى a الأول المتناسب ، b الوسط المتناسب ، c الثالث المتناسب ، حيث: $b = \pm\sqrt{a \cdot c}$

ملحوظة: a, c إما أن يكونا موجبين معًا أو سالبين معًا. الأول المتناسب = مربع الوسط المتناسب ÷ الثالث المتناسب ، والثالث المتناسب = مربع الوسط المتناسب ÷ الأول المتناسب.

مثال (9) أوجد الوسط المتناسب بين العددين $9, 16$

الحل

نفرض أن b هو الوسط المتناسب

$$b = \pm\sqrt{a \cdot c}$$

$$b = \pm\sqrt{(9)(16)}$$

$$b = \pm\sqrt{144}$$

$$b = \pm 12$$

تحقق من فهمك (9) أوجد الوسط المتناسب بين العددين $-3, -27$

الحل

$$b = \pm\sqrt{a \cdot c}$$
$$b = \pm\sqrt{(-3)(-27)}$$
$$b = \pm\sqrt{81}$$
$$b = \pm 9$$

فكّر معي إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ في تناسب متسلسل ، فإن: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$ حيث k عدد ثابت

الحل

من التناسب: $c = d \cdot k$
$$b = c \cdot k = d \cdot k^2$$
$$a = b \cdot k = d \cdot k^3$$

نستطيع استنتاج التالي: إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

فإن $c = dk$ ، $b = dk^2$ ، $a = dk^3$

مثال (10) إذا كان a, b, c في تناسب متسلسل ، أثبت أن: $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a}{b}$

الحل

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ ← a, b, c في تناسب متسلسل

$$b = ck$$

(بالتعويض) $a = ck^2$

الطرف الأيمن = $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{2ck^2+3ck}{2ck+3c}$

$$= \frac{ck(2k+3)}{c(2k+3)} = k \quad \leftarrow (1)$$

الطرف الأيسر = $\frac{a}{b} = \frac{ck^2}{ck} = k \quad \leftarrow (2)$

من (1) ، (2) ينتج أن: $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a}{b}$

تحقق من فهمك (10) إذا كان a, b, c في تناسب متسلسل ، أثبت أن: $\frac{a+3b}{b+3c} = \frac{a-2b}{b-2c}$ حيث المقام $\neq$ صفر

الحل

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$$
$$b = ck$$
$$a = ck^2$$

الطرف الأيمن = $\frac{ck^2+3ck}{ck+3c}$

$$= \frac{ck(k+3)}{c(k+3)} = k \quad \leftarrow (1)$$

الطرف الأيسر = $\frac{ck^2-2ck}{ck-2c}$

$$= \frac{ck(k-2)}{c(k-2)} = k \quad \leftarrow (2)$$

من (1) ، (2): الطرفان متساويان ✔

مثال (11) إذا كان $\frac{2a+3b}{2b+3c}=\frac{a+2b}{b+2c}$ ، أثبت أن b وسط متناسب بين a, c

الحل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين:

$$(2a+3b)(b+2c)=(a+2b)(2b+3c)$$

$$2ab+4ac+3b^2+6bc=2ab+3ac+4b^2+6bc$$

$$4ac-3ac=4b^2-3b^2 \leftarrow \text{بالتبسيط وجمع الحدود المتشابهة}$$

$$ac=b^2$$

$\therefore b$ وسط متناسب بين a, c

تذكّر

إذا كان a, b, c في تناسب متسلسل فإن: **(1)** $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ **(2)** $b^2=ac$

تحقق من فهمك (11) إذا كان $\frac{a+b}{b+c}=\frac{a}{b}$ ، أثبت أن b وسط متناسب بين a, c

الحل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين:

$$b(a+b)=a(b+c)$$

$$ab+b^2=ab+ac$$

$$b^2=ab-ab+ac$$

$$b^2=ac$$

$\therefore b$ وسط متناسب بين a, c

فكّر معي إذا كانت الأعداد $6, x, 54, 162$ في تناسب متسلسل أوجد قيمة x ، وكان هناك إجابتان لفهد وإبراهيم. أي الطريقتين تؤيد؟

الحل

طريقة إبراهيم: $\frac{6}{x}=\frac{x}{54}$ ، $x^2=324$ ،

$$x=\pm\sqrt{324}=\pm 18$$

طريقة فهد: $\frac{6}{x}=\frac{54}{162}$ ، $(x)(54)=(6)(162)$ ،

$$x=\frac{972}{54}=18$$

طريقة فهد هي الصحيحة ، لأن النسبة الثابتة

$$\frac{54}{162}=\frac{1}{3}$$

فإذا كانت $x=-18$ يكون $\frac{6}{-18}=-\frac{1}{3}\neq\frac{1}{3}$

فتُرفض

إذن $x=18$

تعميم: الكميات $a, b, c, d, \ldots$ في تناسب متسلسل

إذا وفقط إذا كان: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\ldots$

أتدرّب وأحل المسائل

صح أو خطأ (درجة لكل بند)

ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة ، و (b) إذا كانت خاطئة:

1 إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ فإن $ab=3\times 4$ — (a) (b)

2 إذا كان $\frac{x}{3}=\frac{14}{23}$ فإن $x=\frac{23}{42}$ — (a) (b)

3 إذا كان $\frac{x-7}{7}=\frac{1}{8}$ فإن $x=\frac{63}{8}$ — (a) (b)

4 زوج النسب التالي: $\frac{9}{12}=\frac{4}{5}$ لا يكوّن تناسبًا — (a) (b)

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

5 إذا كانت $a,\ 3x,\ 2b,\ 4x$ في تناسب فإن $\frac{a}{b}$ تساوي:

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

6 إذا كان $\frac{x}{y}=7$ فإن $x+7y$ تساوي:

(a) $7x$ (b) $8x$ (c) $2x$ (d) $10x$

7 إذا كان $2x-5y=0$ فإن $\frac{x}{y}$ تساوي:

(a) $\frac{5}{2}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{2}{3}$

8 إذا كان $\frac{x}{2y}=\frac{3}{5}$ فإن $\frac{x+2y}{2x-y}$ تساوي:

(a) $\frac{15}{9}$ (b) $\frac{16}{7}$ (c) $\frac{7}{16}$ (d) $\frac{9}{15}$

9 إذا كان $20,\ x,\ 32$ في تناسب متسلسل فإن x تساوي:

(a) $\pm 2\sqrt{10}$ (b) $\pm 4\sqrt{10}$ (c) $\pm 8\sqrt{10}$ (d) $\pm\frac{1}{8\sqrt{10}}$

تعليل الإجابات

(1) الصحيح $4a = 3b$ **(2)** $\cdot\ 4a = 3b \Rightarrow x = \frac{42}{23}$ **(3)** $\cdot\ 23x = 42 \Rightarrow x = \frac{63}{8}$ **(4)** $\cdot\ 8x - 56 = 7$

(5) $\cdot\ 9 \times 5 = 45 \neq 12 \times 4 = 48$ **(6)** $\cdot\ \frac{a}{3x} = \frac{2b}{4x} \Rightarrow 4a = 6b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$

(7) $\cdot\ x = 7y \Rightarrow x + 7y = x + x = 2x$ **(8)** $\cdot\ 2x = 5y$ **(9)** $\cdot\ \frac{6k + 10k}{12k - 5k} = \frac{16}{7}$: $x = 6k, y = 5k$

$x^2 = 640 \Rightarrow x = \pm\sqrt{640} = \pm 8\sqrt{10}$

أسئلة المقال

(1) أوجد الرابع المتناسب للأعداد $5, 7, 10, \ldots$

الحل

$$\frac{5}{7} = \frac{10}{x}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$5x = 7 \times 10$$
$$5x = 70$$
$$x = 14$$

(2) أوجد الثالث المتناسب للأعداد $4, 6, \ldots, 9$

الحل

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{9}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$6x = 4 \times 9$$
$$6x = 36$$
$$x = 6$$

(3) أوجد قيمة x إذا كانت الأعداد $x, 5, 20, 25$ متناسبة.

الحل

$$\frac{x}{5} = \frac{20}{25}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$25x = 5 \times 20$$
$$25x = 100$$
$$x = 4$$

(4) أوجد العدد الحقيقي الذي إذا أضيف إلى حدي النسبة $\frac{4}{5}$ أصبحت $\frac{2}{3}$

الحل

نفرض العدد x

$$\frac{4 + x}{5 + x} = \frac{2}{3}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$3(4 + x) = 2(5 + x)$$
$$12 + 3x = 10 + 2x$$
$$3x - 2x = 10 - 12$$
$$x = -2$$

(5) أوجد العدد الذي إذا طرح من كل من الأعداد $16, 10, 11, 7$ بالترتيب نفسه أصبحت متناسبة.

الحل

نفرض العدد x

$$\frac{16-x}{10-x}=\frac{11-x}{7-x}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$(16-x)(7-x)=(11-x)(10-x)$$
$$112-23x+x^2=110-21x+x^2$$
$$-23x+21x=110-112$$
$$-2x=-2$$
$$x=1$$

تحقق: $\frac{15}{9}=\frac{10}{6}$ ✔

(6) إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}\ ,\ \frac{c}{d}=\frac{3}{4}$ ، أوجد $\frac{3ac+2bd}{bc-2ad}$

الحل

نفرض $a=k\ ,\ b=2k\ ,\ c=3m\ ,\ d=4m$

$$\frac{3ac+2bd}{bc-2ad}=\frac{3(k)(3m)+2(2k)(4m)}{(2k)(3m)-2(k)(4m)}$$
$$=\frac{9km+16km}{6km-8km}$$
$$=\frac{25km}{-2km}$$
$$=\frac{-25}{2}$$

(7) إذا كانت الأعداد $4, x-2, 1, \frac{1}{2}$ في تناسب متسلسل أوجد قيمة x

الحل

$$\frac{4}{x-2}=\frac{x-2}{1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}=2$$
$$x-2=2$$
$$x=2+2$$
$$x=4$$

تحقق: $\frac{4}{2}=2$ ✔

(8) إذا كانت الأعداد a, b, c تكوّن تناسبًا متسلسلًا ، أثبت أن $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$ حيث المقام $\neq$ صفر

الحل

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$$
$$b=ck\ ,\ a=ck^2$$

الطرف الأيمن = $\frac{c^2k^4+c^2k^2}{c^2k^2+c^2}$

$$=\frac{c^2k^2(k^2+1)}{c^2(k^2+1)}=k^2$$

الطرف الأيسر = $\frac{a}{c}=\frac{ck^2}{c}=k^2$

الطرفان متساويان ✔

(9) إذا كانت الأعداد a, b, c متناسبة مع $3, 5, 11$ ، أوجد القيمة العددية للمقدار: $\frac{a+3b}{5b+c}$

الحل

نفرض $a=3k\ ,\ b=5k\ ,\ c=11k$

$$\frac{a+3b}{5b+c}=\frac{3k+3(5k)}{5(5k)+11k}$$
$$=\frac{3k+15k}{25k+11k}$$
$$=\frac{18k}{36k}$$
$$=\frac{1}{2}$$

🚀 مهارات تفكير عليا

(1) إذا كان $4x^2 - 12xy + 9y^2 = 0$ ، أوجد $\frac{x}{y}$

الحل

$$(2x - 3y)^2 = 0$$
$$2x - 3y = 0$$
$$2x = 3y$$
$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

(2) إذا كان $9x^2 - 25y^2 = 0$ ، أوجد $\frac{x}{y}$

الحل

$$(3x - 5y)(3x + 5y) = 0$$

إما
$$3x - 5y = 0$$
$$3x = 5y$$
$$\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$$

أو
$$3x + 5y = 0$$
$$3x = -5y$$
$$\frac{x}{y} = \frac{-5}{3}$$

📋 خلاصة البند (2-1)

الضرب التقاطعي: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ · **خاصية الثابت k:** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk\ ,\ c = dk$ · **التناسب**

المتسلسل: $b^2 = ac\ ,\ b = \pm\sqrt{ac}$

🌟 أحسنت! بداية رائعة للوحدة الثانية 👏

البند (2-2): تشابه المضلعات — Similar Polygons

💡 فكرة الدرس
سوف نتعلم دراسة تشابه المضلعات.

📚 تعلمنا فيما سبق
التحويلات الهندسية: التكبير – الدوران – الانعكاس – الانسحاب.

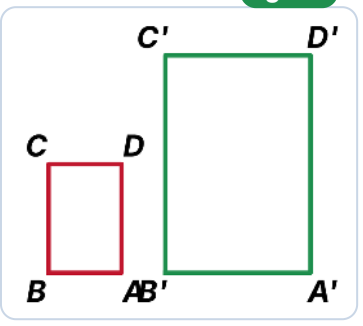
📝 المصطلحات
مضلعات متشابهة (Similar Polygons) · أضلاع متناظرة (Corresponding Sides) · زوايا متناظرة (Corresponding Angles) · نسبة التشابه (Similar Ratio)

🧠 تذكّر
التكبير تحويل هندسي يحافظ على قياسات الزوايا ولا يحافظ على الأطوال.

📖 مسألة الدرس
قام عبدالله بتكبير صورة شخصية له من 2×3 إلى 4×6 لإرفاقها في السيرة الذاتية للتقديم بوظيفة حكومية.
ما الذي اختلف في الصورتين؟ الأطوال (تضاعفت: كل بُعد أصبح مثليه).
ما الذي ظل ثابتًا؟ قياسات الزوايا (قوائم) والنسبة بين الأبعاد $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$

لنعمل معًا لنستكشف يوضح الشكل المضلع $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ بتحويل هندسي «تكبير».

الحل



① قارن بين قياسات الزوايا المتناظرة. ماذا تستنتج؟ قياسات الزوايا المتناظرة متساوية (كلها قوائم).
② أوجد النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة. ماذا تلاحظ؟ النسب متساوية (أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة) ونسبة التكبير ثابتة.

⋆ تعريف تشابه المضلعين – تعميم (1)
يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا: ① قياسات زواياهما المتناظرة متساوية ② أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة «والعكس صحيح». وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين نسبة التشابه ، ويستخدم الرمز (~) للتعبير عن تشابه المضلعين.

لنعمل معًا لنستكشف هل جميع المستطيلات متشابهة؟ هل جميع المعينات متشابهة؟ هل جميع المربعات متشابهة؟ هل جميع المثلثات القائمة الزاوية متشابهة؟ هل جميع المثلثات المتطابقة الأضلاع متشابهة؟

الحل

المستطيلات: لا (الزوايا متساوية لكن الأضلاع قد لا تتناسب)
المعينات: لا (الأضلاع متناسبة لكن الزوايا قد تختلف)
المربعات: نعم
المثلثات القائمة: لا
المثلثات المتطابقة الأضلاع: نعم

⋆ تعميم (2) المضلعان المتطابقان متشابهان: إذا كان المضلع $ABCD \cong$ المضلع $MNHK$ فإن:

الحل

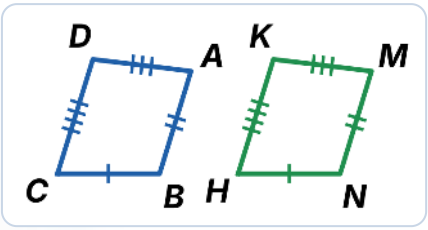
(1)

$$\hat{B}) = m(\hat{N}) \ , \ m(\hat{C}) = m(\hat{H}) \ , \ m(\hat{D}) = m(\hat{K})$$

(2)

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NH} = \frac{CD}{HK} = 1$$

ماذا تستنتج؟ المضلع $ABCD \sim$ المضلع $MNHK$



تذكّر
يستخدم الرمز $\cong$ للتعبير عن التطابق.

معلومة
المضلع المنتظم: هو شكل هندسي جميع زواياه متطابقة وجميع أضلاعه متطابقة. جميع الأشكال الهندسية المنتظمة والتي لها نفس العدد من الأضلاع متشابهة.

ملحوظة
يراعى ترتيب كتابة الرؤوس المتناظرة للأشكال الهندسية المتشابهة حتى يسهل كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة.

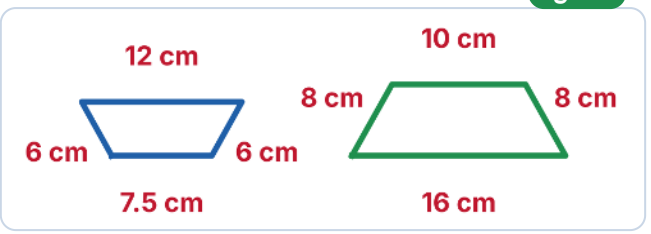
⋆ تعميم (3)
إذا كان المضلع A يشابه المضلع B ، وكان المضلع B يشابه المضلع C فإن المضلع A يشابه المضلع C ، أي أنه: إذا كان $B \sim C$, $A \sim B$ فإن $A \sim C$
من تعميم 1 ، 2 ، 3: نستطيع القول إن الشكلين الهندسيين متشابهان إذا كان أحدهما تكبيرًا أو تصغيرًا أو مطابقًا للآخر. المضلعات المتشابهة يكون لها نفس عدد الأضلاع وليس بالضرورة أن يكون لها نفس القياس بالأطوال.

نشاط: لنعمل معًا لنستكشف

في كل من الأشكال التالية ابحث تشابه المضلعين ، فإذا كان المضلعان متشابهين اكتب عبارة التشابه ونسبة التشابه

(1) ابحث تشابه المضلعين:

الحل



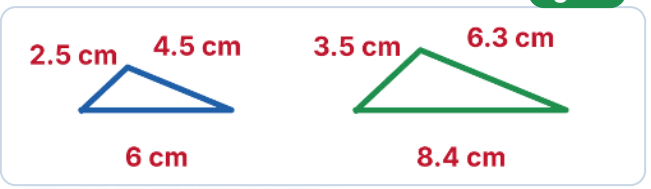
الزوايا المتناظرة متساوية (كما هو موضح بالعلامات)

$$\frac{12}{16}=\frac{6}{8}=\frac{7.5}{10}=\frac{3}{4}$$

المضلعان متشابهان ، ونسبة التشابه $\frac{3}{4}$ (الصغير : الكبير)

(2) ابحث تشابه المثلثين:

الحل



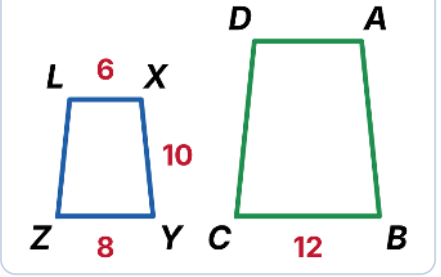
الزوايا المتناظرة متساوية

$$\frac{8.4}{6}=\frac{6.3}{4.5}=\frac{3.5}{2.5}=\frac{7}{5}=1.4$$

المثلثان متشابهان ، ونسبة التشابه $\frac{7}{5}$ (الكبير : الصغير)

مثال (1) في الشكل: إذا كان $XYZL \sim ABCD$ أوجد: $AB\ ,\ DA$

الحل



المضلع $XYZL \sim$ المضلع $ABCD$

باستخدام تعريف التشابه ← $\frac{XY}{AB}=\frac{YZ}{BC}=\frac{LX}{DA}$

$$\frac{10}{AB}=\frac{8}{12}=\frac{6}{DA}$$

$$\frac{10}{AB}=\frac{8}{12}$$

باستخدام الضرب التقاطعي ← $8\,AB=10\times12$

$$AB=\frac{120}{8}=15$$

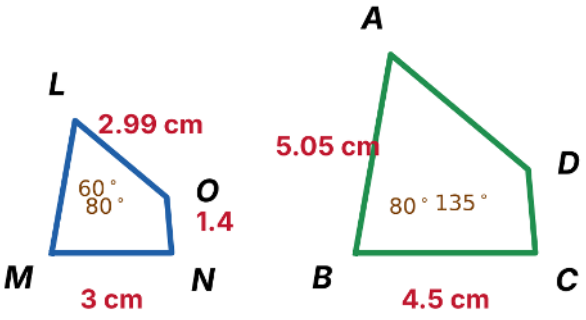
$$\frac{6}{DA}=\frac{8}{12}$$

$$8\,DA=6\times12$$

$$DA=\frac{72}{8}=9$$

تحقق من فهمك (1) في الشكل: المضلعان $ABCD$, $LMNO$ متشابهان. أوجد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال الأضلاع المجهولة في كلٍّ من المضلعين.

الحل



التناظر:

$$L \leftrightarrow A\ ,\ M \leftrightarrow B\ ,\ N \leftrightarrow C\ ,\ O \leftrightarrow D$$

$$m\left(\hat{A}\right) = m\left(\hat{L}\right) = 60^\circ$$

$$m\left(\hat{M}\right) = m\left(\hat{B}\right) = 80^\circ$$

$$m\left(\hat{O}\right) = m\left(\hat{D}\right) = 135^\circ$$

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = 360°

$$m\left(\hat{C}\right) = 360^\circ - (60^\circ + 80^\circ + 135^\circ) = 85^\circ$$

نسبة التشابه:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{3}{4.5} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{ON}{DC} = \frac{2}{3}$$

$$DC = \frac{3 \times 1.4}{2} = 2.1\,cm$$

$$\frac{LM}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$LM = \frac{2 \times 5.05}{3} \approx 3.37\,cm$$

$$\frac{LO}{AD} = \frac{2}{3}$$

$$AD = \frac{3 \times 2.99}{2} \approx 4.49\,cm$$

لنعمل معًا لنستكشف العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما: (1) على ورقة المربعات ارسم مستطيلًا أبعاده 3 وحدات ، 4 وحدات. (2) حدد وليكن 3 مستطيلات مشابهة للمستطيل الأصلي. (3) أكمل الجدولين. (4) ماذا تعني النسبة التي حصلت عليها مع نسبة التشابه؟

الحل

المستطيل	العرض	الطول	المحيط	المساحة
الأصلي	3	4	14	12
I	6	8	28	48
II	1.5	2	7	3

المستطيل	النسبة بين العرضين	النسبة بين الطولين	النسبة بين المحيطين	نسبة التشابه
I : الأصلي	2	2	2	2
II : الأصلي	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(مثال لمستطيلات مختارة) النسبة بين المحيطين = نسبة التشابه ، والنسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه.

⋆ نظرية: إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي $\frac{a}{b}$ فإن

① النسبة بين محيطي الشكلين = $\frac{a}{b}$ وهي نسبة التشابه

② النسبة بين مساحتي الشكلين = $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ وهي مربع نسبة التشابه

📌 ملاحظة: إذا كان المضلع A يشابه المضلع B (كانت k نسبة تشابه المضلع A : المضلع B)

(1) $k > 1$ فإن المضلع A هو تكبير للمضلع B وتسمى k معامل التكبير

(2) $0 < k < 1$ فإن المضلع A هو تصغير للمضلع B وتسمى k معامل التصغير

(3) $k = 1$ فإن المضلع A يطابق المضلع B

مثال (2) إذا كانت نسبة التشابه لمضلعين متشابهين تساوي $\frac{5}{6}$ ، وكان محيط المضلع الأصغر يساوي $14.5\,cm$ ، أوجد محيط المضلع الأكبر.

الحل

النسبة بين محيطي المضلعين = نسبة التشابه (نظرية)

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{6}$ (نظرية: نسبة المحيطين = نسبة التشابه)

$$\frac{14.5}{P} = \frac{5}{6}$$
$$5P = 6 \times 14.5$$
$$P = \frac{87}{5} = 17.4\,cm$$

تحقق من فهمك (2) لدينا شكلان رباعيان متشابهان ونسبة التشابه بينهما $\frac{5}{4}$ ، فإذا كانت مساحة الشكل الرباعي الأكبر هي $30\,cm^2$ فما مساحة الشكل الرباعي الأصغر؟

الحل

النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه (نظرية)

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

(نظرية: نسبة المساحتين = مربع نسبة التشابه)

$$\frac{30}{A} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$
$$25A = 30 \times 16$$
$$A = \frac{480}{25} = 19.2\,cm^2$$

💪 أتدرّب وأحل المسائل

صح أو خطأ (درجة لكل بند)

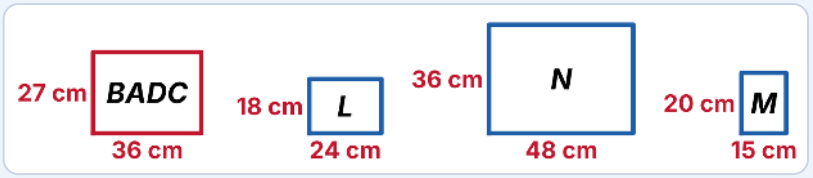
ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة ، و (b) إذا كانت خاطئة:

1	كل مضلعين متطابقين هما مضلعان متشابهان	b	a
2	كل مضلعين متشابهين هما مضلعان متطابقان	b	a
3	إذا تساوت الزوايا المتناظرة في مضلعين فإن المضلعين متشابهان	b	a

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

4 المستطيلات المشابهة للمستطيل $BADC$ هي:



(a) L فقط (b) N فقط (c) L, N, M (d) N, L فقط

5 المضلعان المتشابهان يكونان متطابقين إذا كانت نسبة التشابه x ، فإن x تساوي:

(a) $x = 1$ (b) $x > 1$ (c) $0 < x < 1$ (d) $x = \frac{1}{2}$

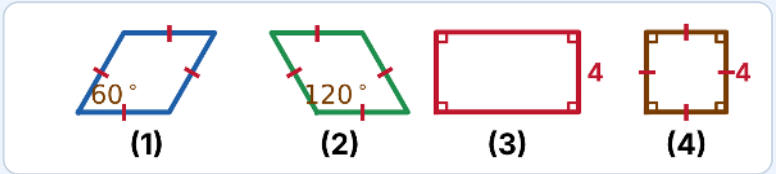
6 مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما $36:25$ ، فإن النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما تساوي:

(a) $6:5$ (b) $5:6$ (c) $36:25$ (d) $4:5$

7 إذا كانت النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين $16:25$ فإن النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما تساوي:

(a) $2:5$ (b) $4:5$ (c) $16:25$ (d) $16:41$

8 أي من المضلعات التالية متشابهة؟



(a) المضلعان (1) ، (2) (b) المضلعان (1) ، (3)
(c) المضلعان (3) ، (4) (d) المضلعان (2) ، (4)

9 إذا كان $MN = 8\,cm$ ، $LM = 6\,cm$ ، $AB = 3\,cm$ ، $\triangle ABC \sim \triangle LMN$ فإن BC تساوي:

(a) $4\,cm$ (b) $3\,cm$ (c) $2\,cm$ (d) $1.5\,cm$

تعليل الإجابات

(1) تعميم **(2)** · **(2)** قد يكون أحدهما تكبيرًا للآخر · **(3)** يجب أيضًا تناسب الأضلاع المتناظرة (مثل المستطيل والمربع) · **(4)** النسبة بين البعدين: $3:4 = 36:27$ ، $24:18 = 4:3$ ، $48:36 = 4:3$ ، $20:15 = 4:3$ · **(5)** التطابق يعني نسبة التشابه 1 · **(6)** نسبة المحيطين = نسبة التشابه · **(7)** $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ · **(8)** المضلعان **(1)** ، **(2)**

معينان زواياهما $60^\circ, 120^\circ$ · **(9)** $\frac{BC}{MN} = \frac{AB}{LM} = \frac{3}{6} \Rightarrow BC = 4$

أسئلة المقال

(1) إذا كانت نسبة التشابه بين مستطيلين هي $2:3$ ، وكان محيط المستطيل الأكبر يساوي 75 ، أوجد محيط المستطيل الأصغر.

الحل

النسبة بين المحيطين = نسبة التشابه (نظرية)

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{3}{2}$ (نظرية: نسبة المحيطين = نسبة التشابه)

$$\frac{75}{P} = \frac{3}{2}$$
$$3P = 75 \times 2$$
$$P = \frac{150}{3} = 50$$

(2) النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين هي $\frac{16}{9}$. ما محيط المضلع الأكبر إذا كان محيط المضلع الأصغر $24\,cm$ ؟

الحل

النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه (نظرية)

نسبة التشابه = $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

النسبة بين المحيطين = نسبة التشابه

$$\frac{P}{24} = \frac{4}{3}$$
$$3P = 4 \times 24$$
$$P = \frac{96}{3} = 32\,cm$$

(3) مستطيلان متشابهان. بُعدا الأول $8\,cm, 12\,cm$ ، ومحيط الثاني $200\,cm$. أوجد نسبة التشابه ، ثم أوجد مساحة المستطيل الثاني.

الحل

محيط الأول = $2(8+12) = 40\,cm$

نسبة التشابه (الأول : الثاني) = $\frac{40}{200} = \frac{1}{5}$

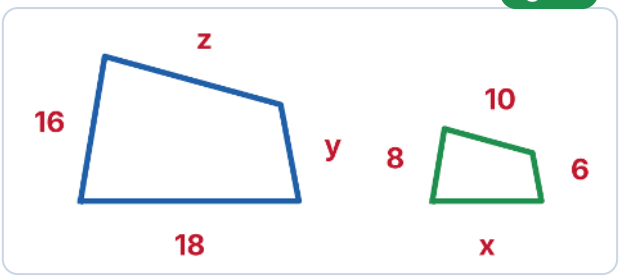
مساحة الأول = $8 \times 12 = 96\,cm^2$

النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه (نظرية)

$$\frac{96}{A} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$
$$A = 96 \times 25 = 2400\,cm^2$$

(a-4) احسب x, y, z علمًا بأن المضلعين متشابهان.

الحل

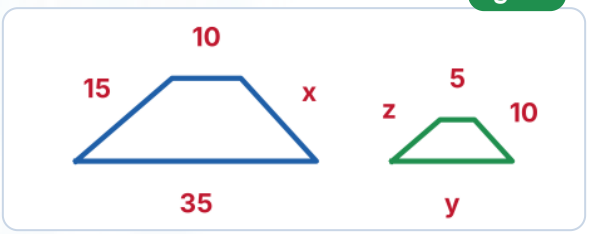


نسبة التشابه (الكبير : الصغير) = $\frac{16}{8} = 2$

$$\frac{z}{10} = 2$$
$$z = 2 \times 10 = 20$$
$$\frac{y}{6} = 2$$
$$y = 2 \times 6 = 12$$
$$\frac{18}{x} = 2$$
$$x = \frac{18}{2} = 9$$

(b-4) احسب x, y, z علمًا بأن المضلعين متشابهان.

الحل

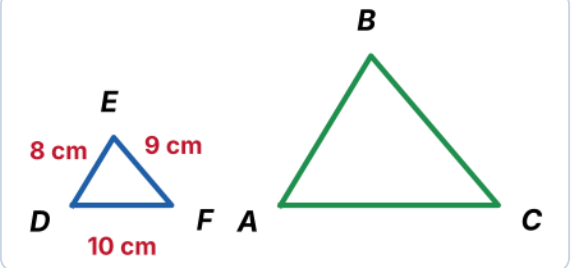


نسبة التشابه (الكبير : الصغير) = $\frac{10}{5} = 2$

$$\frac{x}{10} = 2$$
$$x = 2 \times 10 = 20$$
$$\frac{15}{z} = 2$$
$$z = \frac{15}{2} = 7.5$$
$$\frac{35}{y} = 2$$
$$y = \frac{35}{2} = 17.5$$

(5) في الشكل: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ ، إذا كان محيط $\triangle ABC = 81\,cm$ أوجد أطوال أضلاع $\triangle ABC$

الحل



محيط $\triangle DEF = 8 + 9 + 10 = 27\,cm$

النسبة بين المحيطين = نسبة التشابه (نظرية)

نسبة التشابه = $\frac{81}{27} = 3$

$$AB = 3 \times 8 = 24\,cm$$
$$BC = 3 \times 9 = 27\,cm$$
$$AC = 3 \times 10 = 30\,cm$$

🚀 مهارات تفكير عليا

(1) النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين هي $3:4$ ، إذا كان مجموع مساحتي سطحيهما تساوي $225\,cm^2$ ، فأوجد مساحة كل منهما.

الحل

النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه (نظرية)

النسبة بين المساحتين = $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

نفرض المساحتين $9k$, $16k$

$$9k + 16k = 225$$
$$25k = 225$$
$$k = 9$$

المساحتان: $9 \times 9 = 81\,cm^2$ ،
$16 \times 9 = 144\,cm^2$

📋 خلاصة البند (2-2)

شرطا التشابه: زوايا متناظرة متساوية + أضلاع متناظرة متناسبة · المحيطان: نسبتهما = نسبة التشابه k · المساحتان: نسبتهما = k^2

🌟 أحسنت! 👏

البند (2-3): تشابه المثلثات — Similar Triangles

💡 فكرة الدرس
سوف نتعلم في هذا البند حالات تشابه المثلثات.

📚 تعلمنا فيما سبق
التكبير – التصغير – التطابق.

📝 المصطلحات
رمز التشابه $\sim$

📖 مسألة الدرس
في الشكل: $\triangle ABC$ هو صورة $\triangle LMN$ تحت تأثير تكبير مركزه نقطة الأصل ومعامله 2. من خواص التكبير أنه يحافظ على قياسات الزوايا:

$m\left(\hat{A}\right)=m\left(\hat{L}\right)\ ,\ m\left(\hat{B}\right)=m\left(\hat{M}\right)\ ,\ m\left(\hat{C}\right)=m\left(\hat{N}\right)$ ← (1) قياسات الزوايا المتناظرة في المثلثين متساوية.

ومن خواص التكبير أنه يحافظ على تناسب أطوال الأضلاع: $\frac{AB}{LM}=\frac{AC}{LN}=\frac{BC}{MN}=\frac{2}{1}$ ← (معامل التكبير) (2) أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة.

(1) ، (2) هذان الشرطان أساسيان لتشابه أي مضلعين ، ونكتفي بشرط واحد لإثبات تشابه مثلثين حيث إن تشابه المثلثات يعتبر حالة خاصة من تشابه المضلعات.

هل كل مثلثين متطابقين متشابهان؟ نعم ، لأن زواياهما المتناظرة متساوية وأضلاعهما المتناظرة متناسبة بنسبة 1.

ℹ️ معلومة: الغرفة المظلمة
الفكرة التي بنيت عليها فكرة التصوير الفوتوغرافي: عند وضع جسم أمام صندوق يحتوي على ثقب صغير يقابله لوح شفاف تسقط الأشعة في خطوط مستقيمة وتتقاطع عنده فيظهر أسفل الجسم من الأعلى ويظهر رأس الجسم في الأسفل ، وكلما اقترب الجسم من الثقب تكبر الصورة والعكس صحيح ، وتعد هذه الظاهرة أساس عمل الغرفة المظلمة (Camera Obscura).

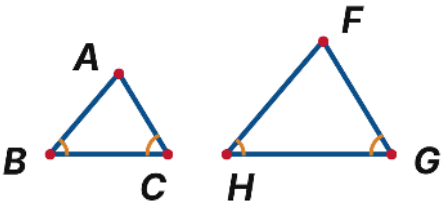
⭐ نظرية (1) يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.

الحل

$m\left(\hat{H}\right)=m\left(\hat{B}\right)\ ,\ m\left(\hat{G}\right)=m\left(\hat{C}\right)$

$\triangle FGH\sim\triangle ABC$

وينتج من التشابه أن: $\frac{FG}{AB}=\frac{GH}{BC}=\frac{FH}{AC}$

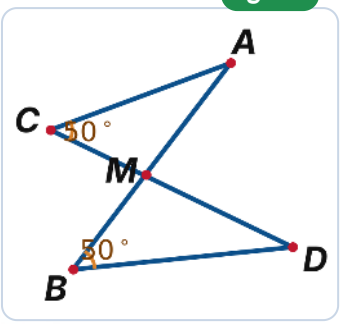


تذكّر

يتشابه المضلعان إذا وفقط إذا كان: (1) زواياهما المتناظرة متطابقة (2) أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة. · إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الآخر. · يراعى ترتيب رؤوس المثلثين عند كتابة عبارة التشابه.

مثال (1) في الشكل: $m\left(\hat{C}\right) = m\left(\hat{B}\right) = 50^\circ$ ، أثبت أن: $\triangle DBM \sim \triangle ACM$

الحل



في $\triangle DBM$ ، $\triangle ACM$:

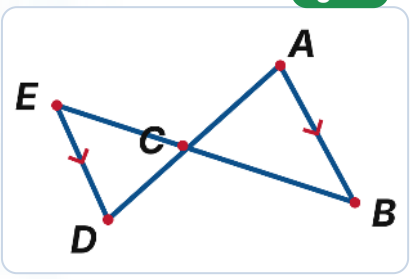
(1) ← (معطى) $m\left(\hat{C}\right) = m\left(\hat{B}\right) = 50^\circ$

(2) ← (بالتقابل بالرأس) $m\left(C\hat{M}A\right) = m\left(B\hat{M}D\right)$

من (1) ، (2): $\triangle DBM \sim \triangle ACM$ (نظرية التشابه AA)

تحقق من فهمك (1) في الشكل: $\bar{DE} \parallel \bar{BA}$ ، أثبت أن المثلثين ABC ، DEC متشابهان ثم اكتب عبارة التشابه.

الحل



في $\triangle DEC$ ، $\triangle ABC$:

(1) ← (بالتقابل بالرأس) $m\left(E\hat{C}D\right) = m\left(B\hat{C}A\right)$

(2) ← ($\bar{DE} \parallel \bar{BA}$ ، بالتبادل) $m\left(\hat{D}\right) = m\left(\hat{A}\right)$

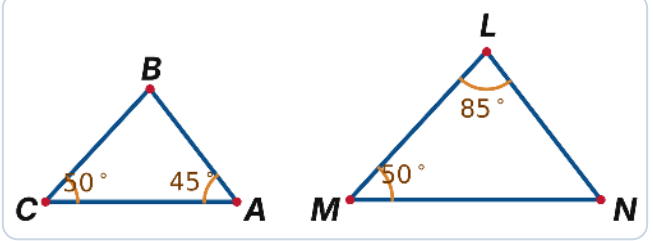
من (1) ، (2): $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ (نظرية التشابه AA)

مثال (2) في الشكل:

$m\left(\hat{A}\right) = 45^\circ$ ، $m\left(\hat{C}\right) = 50^\circ$ ، $m\left(\hat{L}\right) = 85^\circ$ ، $m\left(\hat{M}\right) = 50^\circ$

أثبت أن: $\triangle ABC \sim \triangle NLM$

الحل



في $\triangle ABC$ ، $\triangle NLM$:

(1) ← $m\left(\hat{M}\right) = m\left(\hat{C}\right) = 50^\circ$

مجموع قياسات زوايا المثلث = 180°

$m\left(\hat{B}\right) = 180^\circ - (50^\circ + 45^\circ) = 85^\circ$

(2) ← $m\left(\hat{L}\right) = m\left(\hat{B}\right) = 85^\circ$

من (1) ، (2): $\triangle ABC \sim \triangle NLM$ (نظرية التشابه AA)

تحقق من فهمك (2) المثلث ABC قائم الزاوية في A فيه $m\left(\hat{B}\right) = 55^\circ$ ، والمثلث NLM قائم الزاوية في L فيه $m\left(\hat{M}\right) = 35^\circ$. أثبت أن المثلثين متشابهان.

الحل

مجموع قياسات زوايا المثلث = 180°

$$m\left(\hat{C}\right) = 180^\circ - (90^\circ + 55^\circ) = 35^\circ$$

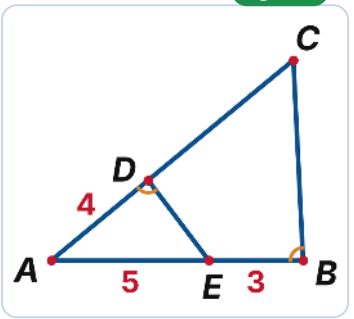
(1) ← $m\left(\hat{A}\right) = m\left(\hat{L}\right) = 90^\circ$

(2) ← $m\left(\hat{C}\right) = m\left(\hat{M}\right) = 35^\circ$

من (1) ، (2): $\triangle ABC \sim \triangle LNM$ (نظرية التشابه AA)

مثال (3) في الشكل: $m\left(A\hat{D}E\right) = m\left(\hat{B}\right)$ ، $EB = 3$ ، $AE = 5$ ، $AD = 4$. ① أثبت أن: $\triangle ACB \sim \triangle AED$ ② أوجد طول $\overline{DC}$

الحل



في $\triangle ACB$ ، $\triangle AED$:

(1) ← $\hat{A}$ زاوية مشتركة

(2) ← (معطى) $m\left(\hat{D}\right) = m\left(\hat{B}\right)$

(AA نظرية التشابه) $\triangle ACB \sim \triangle AED$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$$

$$\frac{AC}{5} = \frac{8}{4}$$

$$4\,AC = 8 \times 5$$

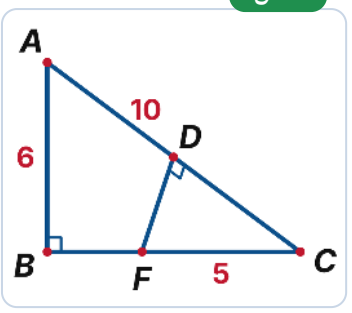
$$AC = \frac{40}{4} = 10$$

$$DC = AC - AD$$

$$DC = 10 - 4 = 6$$

تحقق من فهمك (3) في الشكل: $AC = 10$ ، $AB = 6$ ، $FC = 5$. **(1)** أثبت أن المثلثين ABC , FDC متشابهان **(2)** أوجد طول $\bar{FD}$

الحل



في $\triangle ABC$ ، $\triangle FDC$:

(1) ← زاوية مشتركة $\hat{C}$

(2) ← $m\left(\hat{B}\right) = m\left(F\hat{D}C\right) = 90^\circ$

من **(1)** ، **(2)**: $\triangle ABC \sim \triangle FDC$ **(نظرية التشابه AA)**

$$\frac{FD}{AB} = \frac{FC}{AC}$$
$$\frac{FD}{6} = \frac{5}{10}$$
$$10\,FD = 6 \times 5$$
$$FD = \frac{30}{10} = 3$$

🧩 **نشاط: لنعمل معًا لنستكشف (برهان نظرية 2)**

المعطيات: المثلثان ABC , EFG فيهما $\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$ · **المطلوب:** إثبات أن $\triangle ABC \sim \triangle EFG$

العمل: نأخذ النقطة $M \in \bar{EF}$ بحيث $EM = AB$ ، ونرسم $\bar{MN} \parallel \bar{FG}$

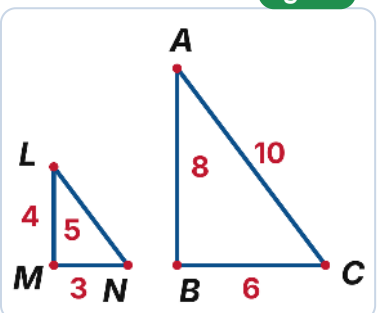
البرهان: $\triangle EMN \sim \triangle EFG$ ، فيمكن كتابة التناسب: $\frac{EM}{EF} = \frac{EN}{EG} = \frac{MN}{FG}$ ، وحيث إن $AB = EM$ ، وبمقارنة التناسب مع المعطيات نستنتج أن $MN = BC$, $EN = AC$ ، فيكون $\triangle ABC \cong \triangle EMN$ ، إذن $\triangle ABC \sim \triangle EMN$ (لأن المثلثين المتطابقين متشابهان) ، و $\triangle EMN \sim \triangle EFG$ ، ينتج أن $\triangle ABC \sim \triangle EFG$

⋆ نظرية (2)

يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة.

مثال (4) في الشكل: أثبت أن المثلثين ABC , LMN متشابهان.

الحل



في $\triangle ABC$ ، $\triangle LMN$:

(1) ← $\frac{LM}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(2) ← $\frac{LN}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

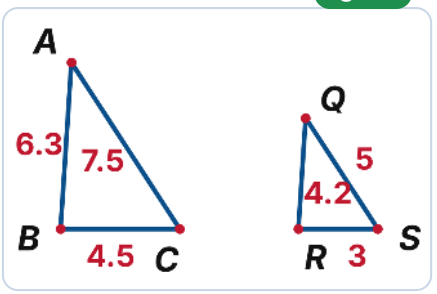
(3) ← $\frac{MN}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

من **(1)** ، **(2)** ، **(3)**: $\frac{LM}{AB} = \frac{LN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$

$\triangle ABC \sim \triangle LMN$ **(نظرية التشابه SSS)**

تحقق من فهمك (a-4) في الشكل: أثبت أن المثلثين QRS , ABC متشابهان.

الحل



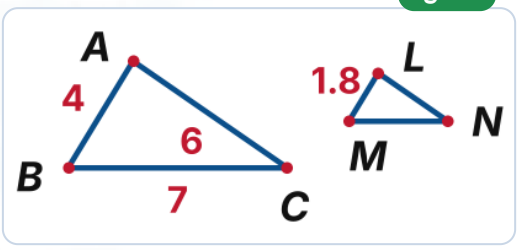
$$\frac{AC}{QS} = \frac{7.5}{5} = 1.5$$
$$\frac{BC}{RS} = \frac{4.5}{3} = 1.5$$
$$\frac{AB}{QR} = \frac{6.3}{4.2} = 1.5$$

النسب الثلاث متساوية

$\triangle ABC \sim \triangle QRS$ (نظرية التشابه SSS)

تحقق من فهمك (b-4) في الشكل: المثلثان LMN , ABC متشابهان. أوجد طول كل من $\bar{MN}$, $\bar{LN}$

الحل



نسبة التشابه = $\frac{LM}{AB} = \frac{1.8}{4} = 0.45$

$$\frac{MN}{BC} = 0.45$$
$$MN = 0.45 \times 7 = 3.15$$
$$\frac{LN}{AC} = 0.45$$
$$LN = 0.45 \times 6 = 2.7$$

معلومة

عندما نقول: (بالتوازي والتناظر) نعني وجود مستقيمين متوازيين وقاطع لهما وزاويتان في وضع تناظر.

نشاط: لنعمل معًا لنستكشف (برهان نظرية 3)

المعطيات: المثلثان EFG , ABC فيهما $m\left(\hat{A}\right) = m\left(\hat{E}\right)$, $\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{EF}$ · المطلوب: إثبات أن $\triangle ABC \sim \triangle EFG$

العمل: نأخذ النقطة $M \in \bar{EF}$ بحيث $EM = AB$ ، ونرسم $\bar{MN} \parallel \bar{FG}$

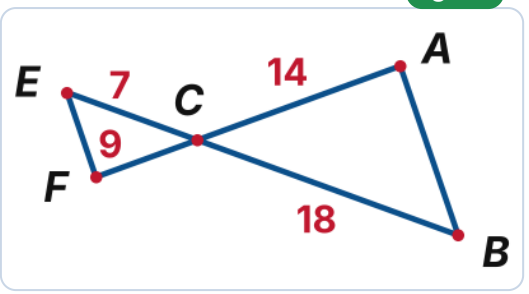
البرهان: $\triangle EMN \sim \triangle EFG$ ، فيكون $\frac{EM}{EF} = \frac{EN}{EG} = \frac{MN}{FG}$ ، وحيث $AB = EM$ فإن $\frac{AB}{EF} = \frac{EN}{EG}$ ، وبمقارنة التناسب نستنتج أن $EN = AC$ ، فيكون $\triangle ABC \cong \triangle EMN$ ، إذن $\triangle ABC \sim \triangle EMN$ ، و $\triangle EMN \sim \triangle EFG$ ، ينتج أن $\triangle ABC \sim \triangle EFG$

نظرية (3) ⋆

يتشابه المثلثان إذا طابقت زاوية في أحدهما زاوية في المثلث الآخر ، وتناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.

مثال (5) في الشكل: أثبت أن المثلثين ABC , FEC متشابهان ، ثم اكتب عبارة التشابه.

الحل



في $\triangle ABC$ ، $\triangle FEC$:

$m\left(E\hat{C}F\right) = m\left(B\hat{C}A\right)$ (بالتقابل بالرأس) ← (1)

$$\frac{FC}{AC} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

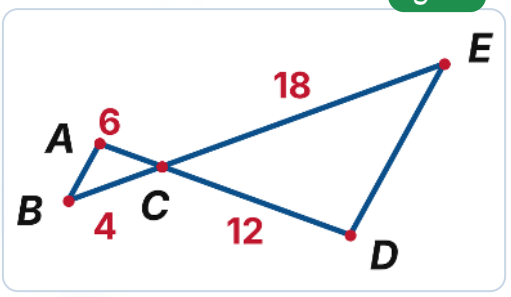
$$\frac{EC}{BC} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{FC}{AC} = \frac{EC}{BC} \leftarrow (2)$$

من (1) ، (2): $\triangle ABC \sim \triangle FEC$ (نظرية التشابه SAS)

تحقق من فهمك (5) في الشكل: $\bar{AD} \cap \bar{BE} = \{C\}$ ، أثبت أن المثلثين ABC , DEC متشابهان.

الحل



$m\left(A\hat{C}B\right) = m\left(D\hat{C}E\right)$ (بالتقابل بالرأس) ← (1)

$$\frac{AC}{DC} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

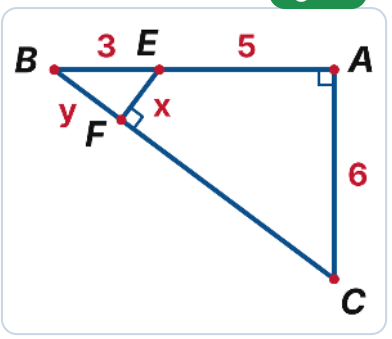
$$\frac{BC}{EC} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC} \leftarrow (2)$$

من (1) ، (2): $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (نظرية التشابه SAS)

مثال (6) في الشكل: أثبت أن المثلثين BFE , BAC متشابهان ، ثم أوجد كلًّا من x, y

الحل



في $\triangle BAC$ ، $\triangle BFE$:

$\hat{B}$ زاوية مشتركة ← (1)

$m\left(B\hat{F}E\right) = m\left(B\hat{A}C\right) = 90^\circ$ ← (2)

من (1) ، (2): $\triangle BFE \sim \triangle BAC$ (نظرية التشابه AA)

في $\triangle ABC$ القائم في A :

$(BC)^2 = (AC)^2 + (BA)^2$ (نظرية فيثاغورث)

$(BC)^2 = (6)^2 + (8)^2 = 100$

$BC = 10$

$$\frac{BF}{BA} = \frac{FE}{AC} = \frac{BE}{BC}$$

$$\frac{y}{8} = \frac{x}{6} = \frac{3}{10}$$

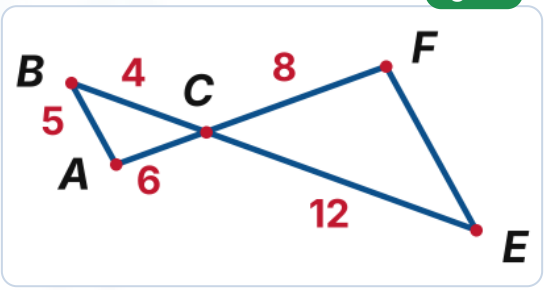
$$x = \frac{3 \times 6}{10} = 1.8\,cm$$

$$y = \frac{3 \times 8}{10} = 2.4\,cm$$

تحقق من فهمك (6) في الشكل: $CF = 8$, $CE = 12$, $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 4$.

(a) أثبت أن $\triangle FEC \sim \triangle ABC$ (b) أوجد EF

الحل



(a) $m\left(E\hat{C}F\right) = m\left(B\hat{C}A\right)$ (بالتقابل بالرأس) ← (1)

$$\frac{EC}{BC} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{FC}{AC} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{EC}{BC} = \frac{FC}{AC}$$ ← (2)

من (1) ، (2): $\triangle FEC \sim \triangle ABC$ (نظرية التشابه SAS)

$$\frac{EF}{BA} = 2$$ (b)

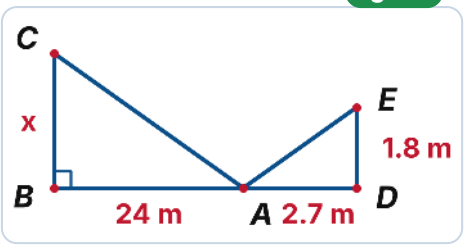
$EF = 2 \times 5 = 10$

استخدام النماذج

استخدام المرايا في حساب ارتفاع مبنى

نموذج أراد فهد قياس ارتفاع مبنى فوضع مرآة على الرصيف عند النقطة A على مسافة $24\,m$ ، ثم تراجع فهد مسافة $2.7\,m$ من المرآة عندما شاهد قمة المبنى في المرآة. هل يستطيع فهد حساب ارتفاع المبنى؟ علمًا بأن طول فهد $1.8\,m$

الحل



بفرض أن ارتفاع المبنى : $BC = x$

قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس

$$m\left(E\hat{A}D\right) = m\left(C\hat{A}B\right) \leftarrow \textbf{(1)}$$

$$m\left(\hat{D}\right) = m\left(\hat{B}\right) = 90^\circ \leftarrow \textbf{(2)}$$

$\triangle BCA \sim \triangle DEA$ **(نظرية التشابه AA)**

$$\frac{ED}{BC} = \frac{DA}{BA}$$

$$\frac{1.8}{x} = \frac{2.7}{24}$$

$$2.7x = 1.8 \times 24$$

$$x = \frac{43.2}{2.7} = 16\,m$$

تذكّر

قياس زاوية السقوط يساوي قياس زاوية الانعكاس.

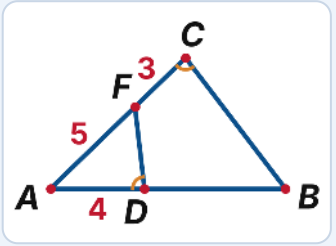
أتدرّب وأحل المسائل

صح أو خطأ (درجة لكل بند)

1 في الشكل: $m\left(A\hat{D}F\right) = m\left(\hat{C}\right)$ ، $AD = 4$ ، $AF = 5$ ، $FC = 3$ ،

فإن طول $\overline{BD}$ يساوي 6

a b

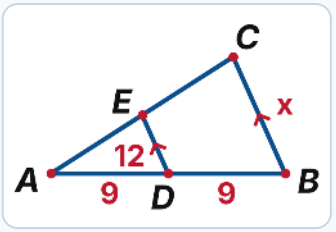


2 مثلثان متشابهان أطوال أضلاع الأول x, 2, 3 وأطوال الأضلاع المناظرة لها في الثاني 9, 6, 9 ، فإن $x = 2$

a b

3 في الشكل: $\bar{BC} \parallel \bar{DE}$ ، فإن $x = 24$

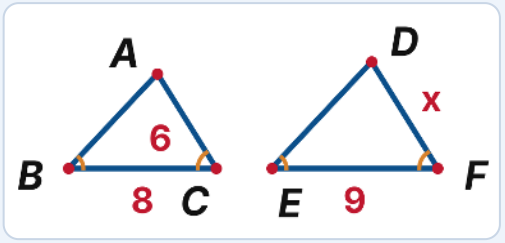
(a) (b)



اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

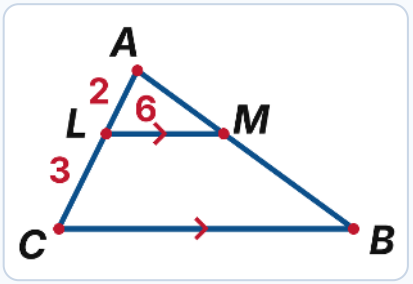
ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

1 في الشكل: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ، قيمة x بوحدات الطول تساوي:



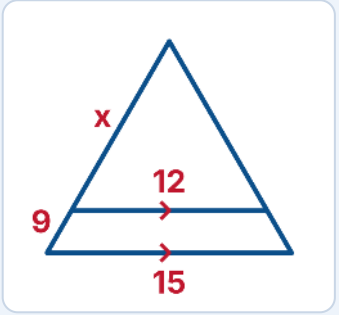
(a) 6 (b) $5\frac{1}{3}$ (c) 7 (d) 6.75

2 في الشكل: $LM = 6\,cm$ ، $LC = 3\,cm$ ، $AL = 2\,cm$ ، $\bar{LM} \parallel \bar{BC}$ فإن BC تساوي:



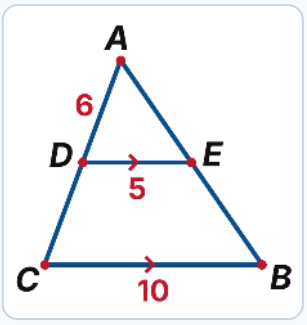
(a) $9\,cm$ (b) $12\,cm$ (c) $15\,cm$ (d) $10\,cm$

3 في الشكل: قيمة x تساوي:



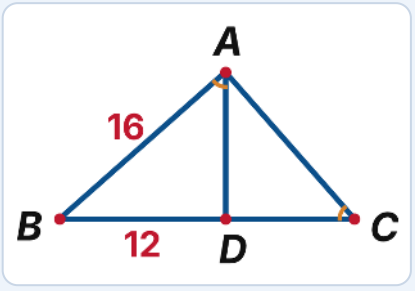
(a) 12 (b) 24 (c) 36 (d) 48

4 في الشكل: $\bar{BC} \parallel \bar{DE}$ ، طول $\bar{AC}$ يساوي:



(a) 6 (b) 9 (c) 12 (d) 15

5 في الشكل: $m\left(B\hat{A}D\right) = m\left(\hat{C}\right)$ ، $AB = 16$ ، $BD = 12$ ، طول $\bar{DC}$ يساوي:



(a) 16 (b) 12 (c) $9\frac{1}{3}$ (d) $23\frac{1}{3}$

تعليل الإجابات

(1) $\triangle ADF \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{5}{AB} \Rightarrow AB = 10 \Rightarrow BD = 6$ **(2)** نسبة التشابه $= 3$ **(3)** $\cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{9}{3} = 3$ **(4)** $\cdot \frac{9}{18} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 24$ **(5)** $\cdot \frac{x}{9} = \frac{6}{8} \Rightarrow x = 6.75$ **(6)** $\cdot \frac{LM}{CB} = \frac{AL}{AC} \Rightarrow \frac{6}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow BC = 15$ $\cdot \frac{x}{x+9} = \frac{12}{15} \Rightarrow 15x = 12x + 108 \Rightarrow x = 36$

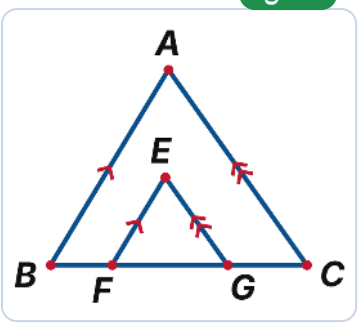
(7) نسبة التشابه $= 2 \times 6 = 12$ **(8)** $\cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 2 \times 6 = 12$

$\triangle ABD \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{12}{16} = \frac{16}{BC} \Rightarrow BC = \frac{64}{3}$ ، $DC = \frac{64}{3} - 12 = 9\frac{1}{3}$

أسئلة المقال

(1) في الشكل: $\bar{EF} \parallel \bar{AB}$ ، $\bar{EG} \parallel \bar{AC}$ ، أثبت أن المثلث ABC يشابه المثلث EFG

الحل



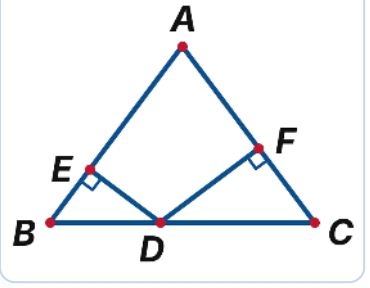
$m\left(E\hat{F}G\right) = m\left(A\hat{B}C\right)$ (بالتناظر ، $\bar{EF} \parallel \bar{AB}$) ← (1)

$m\left(E\hat{G}F\right) = m\left(A\hat{C}B\right)$ (بالتناظر ، $\bar{EG} \parallel \bar{AC}$) ← (2)

من (1) ، (2): $\triangle ABC \sim \triangle EFG$ (نظرية التشابه AA)

(2) في الشكل: المثلث ABC فيه $BC = 48\,cm$ ، $AB = AC$ ، $\bar{DE} \perp \bar{AB}$ ، $\bar{DF} \perp \bar{AC}$ ،
$\frac{ED}{DF} = \frac{5}{7}$ ، أوجد طول $\bar{DC}$

الحل



$AB = AC \Rightarrow m\left(\hat{B}\right) = m\left(\hat{C}\right)$ ← (1)

$m\left(B\hat{E}D\right) = m\left(C\hat{F}D\right) = 90^\circ$ ← (2)

$\triangle BED \sim \triangle CFD$ (نظرية التشابه AA)

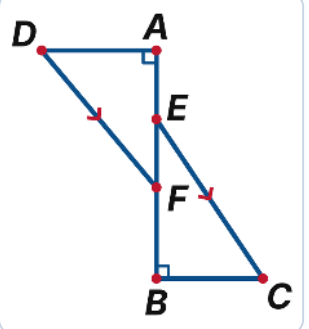
$$\frac{BD}{DC} = \frac{ED}{DF} = \frac{5}{7}$$

نفرض $BD = 5k$ ، $DC = 7k$

$$5k + 7k = 48$$
$$12k = 48$$
$$k = 4$$
$$DC = 7 \times 4 = 28\,cm$$

(3) في الشكل: $\bar{DF} \parallel \bar{EC}$ ، $m\left(\hat{A}\right) = m\left(\hat{B}\right) = 90^\circ$ ، أثبت أن $\triangle ADF \sim \triangle BCE$

الحل



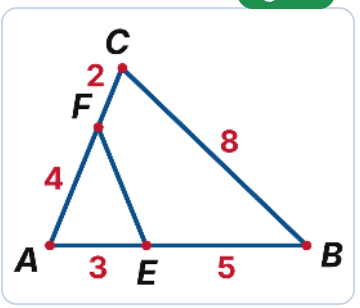
$m\left(\hat{A}\right) = m\left(\hat{B}\right) = 90^\circ$ ← (1)

$m\left(A\hat{F}D\right) = m\left(B\hat{E}C\right)$ (بالتبادل ، $\bar{DF} \parallel \bar{EC}$) ← (2)

من (1) ، (2): $\triangle ADF \sim \triangle BCE$ (نظرية التشابه AA)

(4) في الشكل: المثلث ABC فيه $BE = 5\,cm$, $BC = 8\,cm$, $EA = 3\,cm$, $AF = 4\,cm$, $FC = 2\,cm$
(a) أثبت أن $\triangle AEF \sim \triangle ACB$ **(b)** أوجد طول $\bar{EF}$

الحل



(a) $\hat{A}$ زاوية مشتركة ← (1)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AF}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} \leftarrow (2)$$

من (1) ، (2): $\triangle AEF \sim \triangle ACB$ (نظرية التشابه SAS)

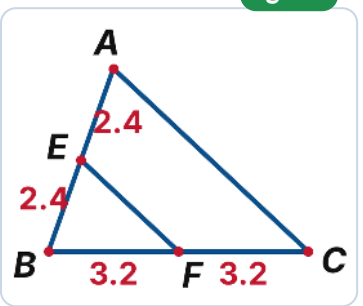
(b)

$$\frac{EF}{CB} = \frac{1}{2}$$

$$EF = \frac{8}{2} = 4\,cm$$

(5) في الشكل: $BC = 6.4$, $BF = 3.2$, $BA = 4.8$, $BE = 2.4$ ، أثبت أن $\triangle BCA \sim \triangle BFE$

الحل



$\hat{B}$ زاوية مشتركة ← (1)

$$\frac{BE}{BA} = \frac{2.4}{4.8} = \frac{1}{2}$$

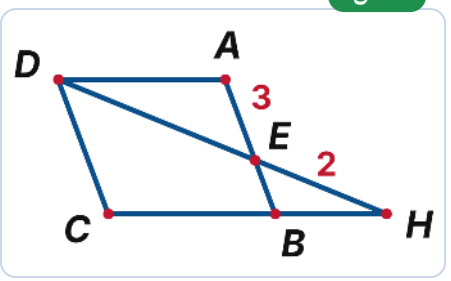
$$\frac{BF}{BC} = \frac{3.2}{6.4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC} \leftarrow (2)$$

من (1) ، (2): $\triangle BCA \sim \triangle BFE$ (نظرية التشابه SAS)

(6) في الشكل: $ABCD$ متوازي أضلاع ، $E \in \bar{AB}$ ، $\frac{AE}{EB} = \frac{3}{2}$ ، $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{DE} = \{H\}$. **(a)** أثبت أن $\triangle EAD \sim \triangle DCH$ **(b)** أوجد $\frac{\text{area } \triangle DCH}{\text{area } \triangle EAD}$

الحل



(a) $m\left(\hat{A}\right) = m\left(\hat{C}\right)$ (زاويتان متقابلتان في متوازي الأضلاع)

(1) ←

$m\left(A\hat{D}E\right) = m\left(C\hat{H}D\right)$ (بالتبادل ، $\bar{AD} \parallel \bar{CH}$) ← (2)

من (1) ، (2): $\triangle EAD \sim \triangle DCH$ (نظرية التشابه **AA**)

(b) نفرض $AE = 3k$ ، $EB = 2k$

$$DC = AB = AE + EB = 3k + 2k = 5k$$

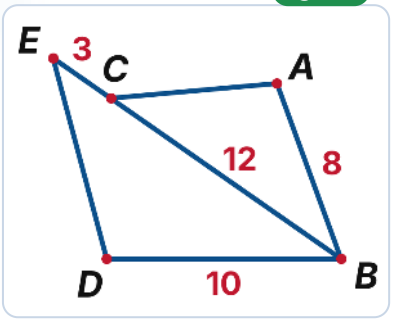
نسبة التشابه = $\frac{DC}{EA} = \frac{5k}{3k} = \frac{5}{3}$

النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه (نظرية)

$$\frac{\text{area } \triangle DCH}{\text{area } \triangle EAD} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

(7) في الشكل: $\overrightarrow{BE}$ منصف $A\hat{B}D$ ، $AB = 8$ ، $BC = 12$ ، $BD = 10$ ، $BE = 15$ ، $ABC = 48\,cm^2$ مساحة المثلث. أوجد مساحة $\triangle EBD$

الحل



(منصف) $m\left(A\hat{B}C\right) = m\left(D\hat{B}E\right)$ ← (1)

$$\frac{AB}{DB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{BC}{BE} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE}$$ ← (2)

$\triangle ABC \sim \triangle DBE$ (نظرية التشابه **SAS**) بنسبة $\frac{4}{5}$

النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه (نظرية)

$$\frac{48}{A} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$16A = 48 \times 25$$

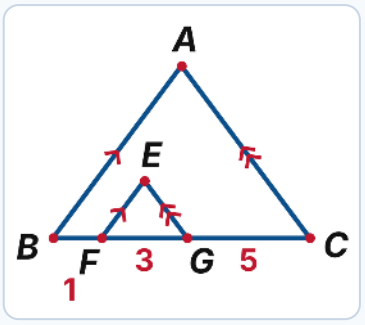
$$A = \frac{1200}{16} = 75\,cm^2$$

مهارات تفكير عليا

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

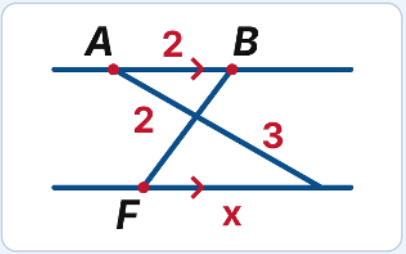
ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

1 في الشكل: $\bar{EF} \parallel \bar{AB}$, $\bar{EG} \parallel \bar{AC}$ ، إذا كانت مساحة المثلث EFG تساوي $6\,cm^2$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين المثلثين بالسنتيمتر المربع:



(a) 27 (b) 36 (c) 48 (d) 54

2 في الشكل: المستقيمان متوازيان ، قيمة x بوحدات الطول تساوي:



(a) 3 (b) 2 (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

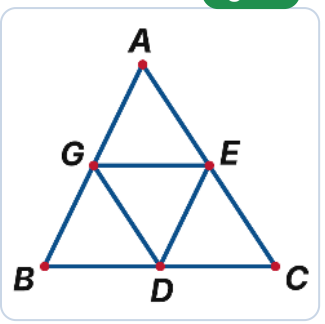
تعليل الإجابات

(1) $BC = 1 + 3 + 5 = 9$ ، **نسبة التشابه =** $\frac{9}{3} = 3$ ، **مساحة** $\triangle ABC = 9 \times 6 = 54$ ، **المنطقة المحصورة =** $54 - 6 = 48$ · **(2) المثلثان متشابهان (AA):** $\frac{x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 3$

(3) المثلث ABC إذا كانت E منتصف $\bar{AC}$ ، G منتصف $\bar{AB}$ ، D منتصف $\bar{BC}$. استخدم تشابه المثلثات في إثبات أن كلًّا من: **(a)** $\triangle GED$, $\triangle EDC$, $\triangle BGD$, $\triangle AGE$ **(b)** متطابقة

$$\triangle GED \sim \triangle CBA$$

الحل



القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طوله:

$$GE = \frac{1}{2}BC\ ,\ ED = \frac{1}{2}AB\ ,\ GD = \frac{1}{2}AC$$

(a) كل مثلث من الأربعة أطوال أضلاعه $\frac{1}{2}AB$, $\frac{1}{2}BC$, $\frac{1}{2}AC$

المثلثات الأربعة متطابقة (نظرية التشابه **SSS**)

(b)
$$\frac{GE}{CB} = \frac{ED}{BA} = \frac{GD}{CA} = \frac{1}{2}$$

$\triangle GED \sim \triangle CBA$ (نظرية التشابه **SSS**)

📋 خلاصة البند (2-3): حالات تشابه مثلثين

نظرية (1): تطابق زاويتين (AA) · نظرية (2): تناسب الأضلاع الثلاثة (SSS) · نظرية (3): تطابق زاوية وتناسب ضلعيها (SAS)

🌟 أحسنت! 👏

البند (2-4): التشابه في المثلثات القائمة الزاوية — Similarity in Right Triangles

💡 فكرة الدرس

استخدام التشابه في المثلثات القائمة «العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية».

📚 تعلمنا فيما سبق

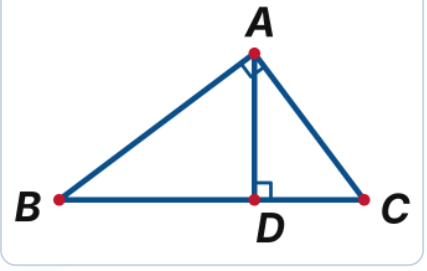
التشابه – خواص المستطيل – نظرية فيثاغورث.

📝 المصطلحات

تشابه المثلثات (Similarity of Triangles)

📖 مسألة الدرس اشترك مع أحد زملائك في الآتي: أحضر قطعة ورق مستطيلة الشكل ، ارسم قطرًا للمستطيل ، اقطع الورقة عند القطر (سوف تحصل على مثلثين قائمي الزاوية) ، اختر المثلث ABC وارسم $\bar{AD} \perp \bar{BC}$ ، ثم قص المثلث ABC إلى المثلثين DAC , DBA. كيف يمكن إثبات أن المثلثات الثلاثة متشابهة؟

الحل



$\triangle DBA \sim \triangle ABC$: $\hat{B}$ مشتركة و
$m\left(A\hat{D}B\right) = m\left(B\hat{A}C\right) = 90^\circ$

$\triangle DAC \sim \triangle ABC$: $\hat{C}$ مشتركة و
$m\left(C\hat{D}A\right) = m\left(B\hat{A}C\right) = 90^\circ$

$\triangle DBA \sim \triangle DAC$: لأن كلًّا منهما يشابه $\triangle ABC$ (تعميم 3)

⋆ نظرية

العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.

🧩 نشاط هل نستطيع إيجاد العلاقات بين BD , AD , DC ؟

الحل

من النشاط السابق استطعنا إثبات أن $\triangle ADC$, $\triangle BDA$ متشابهان ، نكتب التناسب:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD} = \frac{AC}{BA}$$

بالضرب التقاطعي:

$$(AD)^2 = DC \cdot DB$$

⋆ نتيجة (1): «نظرية إقليدس»

مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود. أي أن: في المثلث ABC القائم الزاوية في A إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فإن: $(AD)^2 = DC \cdot BD$

سأل عمر: هل يمكن القول بأن AD هو الوسط المتناسب لكل من DC , BD ؟ نعم ، لأن $(AD)^2 = BD \cdot DC$

ℹ️ معلومة: إقليدس (EUCLIDS)

هو عالم رياضيات لقب بأبي الهندسة ، اشتهر بكتابة (العناصر) عرض فيه مجموعة بديهيات وطرق للعديد من مجالات الرياضيات.

نشاط هل نستطيع إيجاد العلاقات بين DC , BC , AC ؟

الحل

$\triangle BAC \sim \triangle ADC$ ، نكتب التناسب:

$$\frac{BA}{AD} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$$

بالضرب التقاطعي:

$$(AC)^2 = CD \cdot CB$$

هل يمكن القول إن AC وسط متناسب بين DC , BC ؟ نعم

نشاط هل نستطيع إيجاد العلاقات بين BD , BC , AB ؟

الحل

$\triangle CBA \sim \triangle ABD$ ، نكتب التناسب:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BA} = \frac{AD}{CA}$$

بالضرب التقاطعي:

$$(AB)^2 = BD \cdot BC$$

هل يمكن القول إن AB وسط متناسب بين BC , BD ؟ نعم

⋆ نتيجة (2): «نظرية إقليدس»

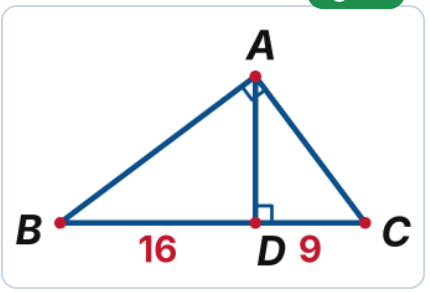
في المثلث ABC القائم إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فإن: ① $(AB)^2 = BD \cdot BC$ ② $(AC)^2 = CD \cdot CB$ ③

$$(AB) \cdot (AC) = (AD) \cdot (BC)$$

حاول إثبات أن $(AB) \cdot (AC) = (AD) \cdot (BC)$: مساحة $\triangle ABC = \frac{1}{2}(AB)(AC)$ (القائم في A) = $\frac{1}{2}(BC)(AD)$ (القاعدة BC والارتفاع AD) ، إذن $(AB)(AC) = (AD)(BC)$

مثال (1) في الشكل: ABC مثلث قائم الزاوية في A ، إذا كان $\bar{AD} \perp \bar{BC}$ ، أوجد طول كل من:
$\bar{AD}$, $\bar{AC}$

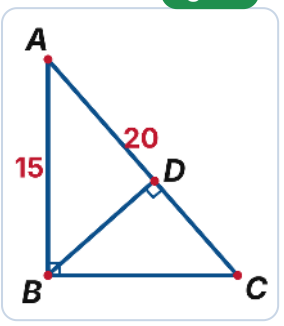
الحل



(نتيجة (1) من نظرية إقليدس) $(AD)^2 = DC \cdot DB$
$(AD)^2 = (9)(16)$
$(AD)^2 = 144$
$AD = \sqrt{144} = 12$
$CB = 9 + 16 = 25$
(نتيجة (2) من نظرية إقليدس) $(AC)^2 = CD \cdot CB$
$(AC)^2 = (9)(25)$
$(AC)^2 = 225$
$AC = \sqrt{225} = 15$

تحقق من فهمك (1) في الشكل: المثلث ABC قائم في B ، $\bar{BD} \perp \bar{AC}$ ،
$AB = 15$, $AC = 20$. **(a)** أوجد طول $\bar{BC}$ **(b)** أوجد طول $\bar{CD}$

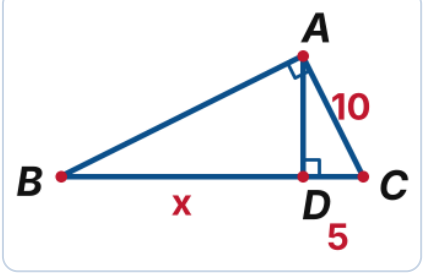
الحل



(a) (نظرية فيثاغورث) $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$
$(BC)^2 = (20)^2 - (15)^2$
$(BC)^2 = 400 - 225 = 175$
$BC = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$
(b) (نتيجة (2) من نظرية إقليدس) $(BC)^2 = CD \cdot CA$
$175 = CD \times 20$
$CD = \frac{175}{20} = 8.75$

مثال (2) في الشكل: أوجد قيمة x

الحل

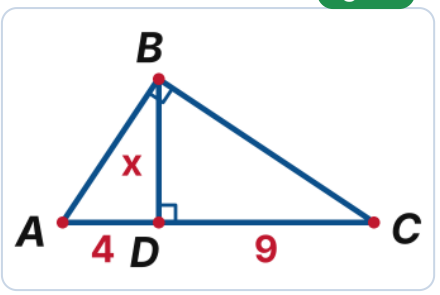


$\bar{AD} \perp \bar{BC}$
(نتيجة (1) من نظرية إقليدس) $(AD)^2 = (DC)(DB)$
$(10)^2 = 5 \times (DB)$
بقسمة الطرفين على 5 ← $DB = \frac{100}{5}$
$DB = x = 20$

تحقق من فهمك (2)

في الشكل: المثلث ABC قائم في B ، $\bar{BD} \perp \bar{AC}$ ، أوجد قيمة x

الحل



$(BD)^2 = AD \cdot DC$ (نتيجة (1) من نظرية إقليدس)

$x^2 = 4 \times 9$

$x^2 = 36$

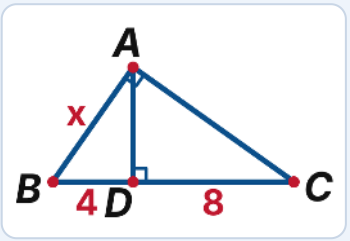
$x = \sqrt{36} = 6$

أتدرّب وأحل المسائل

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

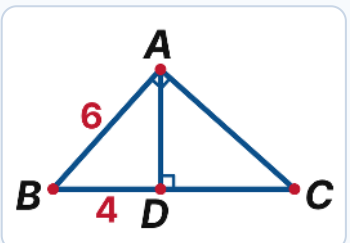
ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

1 في الشكل: $\triangle ABC$ قائم في A ، $\bar{AD} \perp \bar{BC}$ ، قيمة x تساوي:



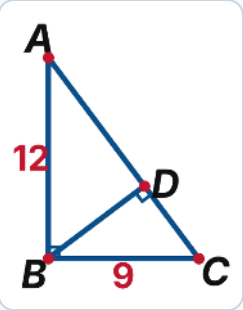
a) $4\sqrt{3}$ ✓ b) $3\sqrt{4}$ c) 48 d) 16

2 في الشكل: $\triangle ABC$ قائم في A ، $\bar{AD} \perp \bar{BC}$ ، $BC = 2x + 1$ ، قيمة x تساوي:



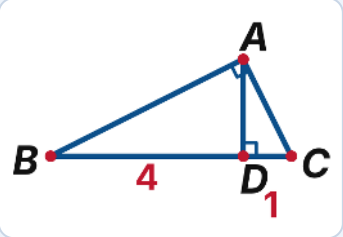
a) 6 b) 4.8 c) 8 d) 4 ✓

3 في الشكل: $\triangle ABC$ قائم في B ، $\bar{BD} \perp \bar{AC}$ ، طول $\bar{BD}$ تساوي:



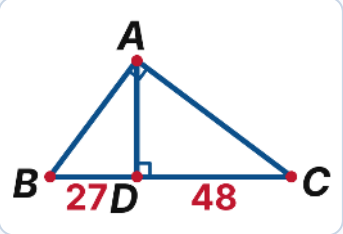
(a) 9.5 (b) 7.2 (c) 7.5 (d) 8

4 في الشكل: $\triangle ABC$ قائم في A ، $\bar{AD} \perp \bar{BC}$ ، طول $\bar{AD}$ تساوي:



(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 16

5 في الشكل: $\triangle ABC$ قائم في A ، $\bar{AD} \perp \bar{BC}$ ، طول $\bar{AD}$ تساوي:



(a) 24 (b) 12 (c) 36 (d) 75

💬 تعليل الإجابات

(1) · $x^2 = BD \cdot BC = 4 \times 12 = 48 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$ **(2)** · $(AB)^2 = BD \cdot BC \Rightarrow 6^2 = 4(2x+1) \Rightarrow 2x+1 = 9 \Rightarrow x = 4$

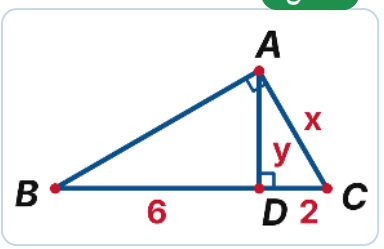
(3) · $BD = \dfrac{AB \cdot BC}{AC} = \dfrac{12 \times 9}{15} = 7.2$ ، $AC = \sqrt{144+81} = 15$ **(4)** · $(AD)^2 = 4 \times 1 = 4 \Rightarrow AD = 2$ **(5)** · $(AD)^2 = 27 \times 48 = 1296 \Rightarrow AD = 36$

أسئلة المقال (1)

أوجد قيمة x, y في كل من الأشكال التالية

(a) $\triangle ABC$ قائم في A ، $\bar{AD} \perp \bar{BC}$

الحل



(نتيجة (2) من نظرية إقليدس) $(AC)^2 = CD \cdot CB$

$x^2 = 2 \times 8 = 16$

$x = 4$

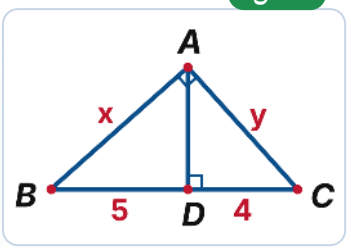
(نتيجة (1) من نظرية إقليدس) $(AD)^2 = BD \cdot DC$

$y^2 = 6 \times 2 = 12$

$y = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

(b) $\triangle ABC$ قائم في A ، $\bar{AD} \perp \bar{BC}$

الحل



(نتيجة (2) من نظرية إقليدس) $(AC)^2 = CD \cdot CB$

$y^2 = 4 \times 9 = 36$

$y = 6$

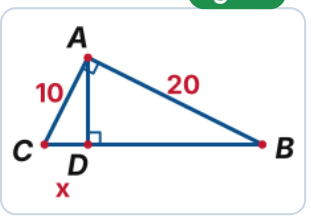
(نتيجة (2) من نظرية إقليدس) $(AB)^2 = BD \cdot BC$

$x^2 = 5 \times 9 = 45$

$x = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

(c) $\triangle ABC$ قائم في A ، $\bar{AD} \perp \bar{BC}$ ، $AB = 20$ ، $AC = 10$ ، $CD = x$

الحل



(نظرية فيثاغورث) $(CB)^2 = (AC)^2 + (AB)^2$

$(CB)^2 = (10)^2 + (20)^2 = 500$

$CB = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$

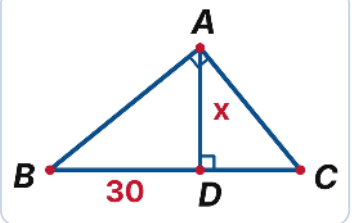
(نتيجة (2) من نظرية إقليدس) $(AC)^2 = CD \cdot CB$

$100 = x \cdot 10\sqrt{5}$

$x = \dfrac{100}{10\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

(d) $\triangle ABC$ قائم في A ، $\bar{AD} \perp \bar{BC}$ ، $BC = 50$ ، $BD = 30$ ، $AD = x$

الحل



$DC = BC - BD = 50 - 30 = 20$

(نتيجة (1) من نظرية إقليدس) $(AD)^2 = BD \cdot DC$

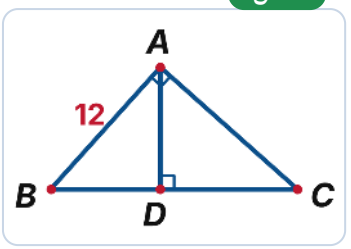
$x^2 = 30 \times 20 = 600$

$x = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}$

أسئلة المقال (تابع)

(2) في الشكل: $\triangle ABC$ قائم في A ، $\bar{AD} \perp \bar{BC}$ ، $BC = 18$ ، $AB = 12$ ، أوجد طول $\bar{DC}$

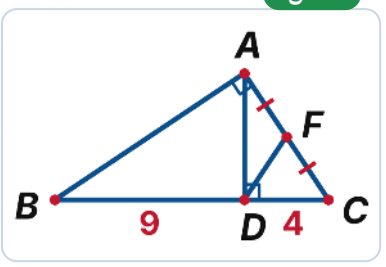
الحل



$$(AB)^2 = BD \cdot BC \quad \text{(نتيجة (2) من نظرية إقليدس)}$$
$$144 = BD \times 18$$
$$BD = \frac{144}{18} = 8$$
$$DC = BC - BD$$
$$DC = 18 - 8 = 10$$

(3) في الشكل: $\triangle ABC$ قائم في A ، $\bar{AD} \perp \bar{BC}$ ، F منتصف $\bar{AC}$ ، أوجد قيمة DF

الحل



$$BC = BD + DC = 9 + 4 = 13$$
$$(AC)^2 = CD \cdot CB \quad \text{(نتيجة (2) من نظرية إقليدس)}$$
$$(AC)^2 = 4 \times 13 = 52$$
$$AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

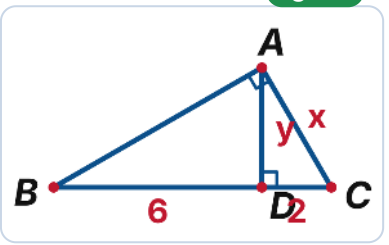
في $\triangle ADC$ القائم في D : F منتصف الوتر $\bar{AC}$

$\therefore$ $\bar{DF}$ قطعة متوسطة خارجة من رأس الزاوية القائمة

$$DF = \frac{1}{2} AC \quad \text{(القطعة المتوسطة من رأس القائمة = نصف الوتر)}$$
$$DF = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{13}$$
$$DF = \sqrt{13} \approx 3.61$$

(4) في الشكل: $\triangle ABC$ قائم في A ، $\bar{AD} \perp \bar{BC}$ ، أوجد قيمة x, y

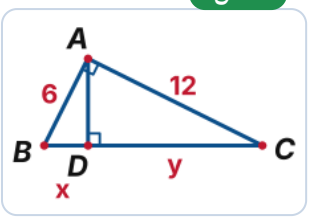
الحل



$$(AD)^2 = BD \cdot DC \quad \text{(نتيجة (1) من نظرية إقليدس)}$$
$$y^2 = 6 \times 2 = 12$$
$$y = 2\sqrt{3}$$
$$(AC)^2 = CD \cdot CB \quad \text{(نتيجة (2) من نظرية إقليدس)}$$
$$x^2 = 2 \times 8 = 16$$
$$x = 4$$

(5) في الشكل: $\triangle ABC$ قائم الزاوية في A ، $\bar{AD} \perp \bar{BC}$ ، $AB = 6\,cm$ ، $AC = 12\,cm$ ، أوجد $\frac{x}{y}$

الحل



(نظرية فيثاغورث) $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

$BC = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

(نتيجة (2) من نظرية إقليدس) $(AB)^2 = BD \cdot BC$

$$x = \frac{(AB)^2}{BC} = \frac{36}{6\sqrt{5}}$$

(نتيجة (2) من نظرية إقليدس) $(AC)^2 = CD \cdot CB$

$$y = \frac{(AC)^2}{BC} = \frac{144}{6\sqrt{5}}$$

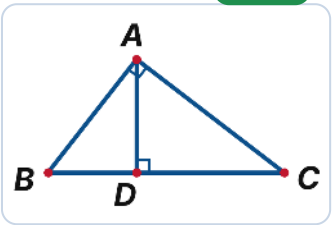
$$\frac{x}{y} = \frac{36}{144} = \frac{1}{4}$$

مهارات تفكير عليا

(1) في الشكل: $\triangle ABC$ قائم في A ، $\bar{AD} \perp \bar{BC}$ ، استخدم نظرية إقليدس لإثبات أن:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$

الحل



(نتيجة (2) من نظرية إقليدس) $(AB)^2 = BD \cdot BC$

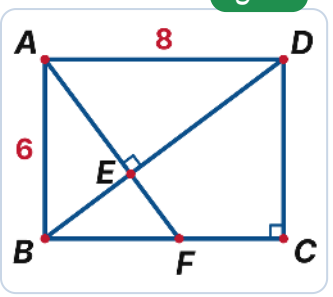
(نتيجة (2) من نظرية إقليدس) $(AC)^2 = CD \cdot CB$

بالجمع:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = BD \cdot BC + CD \cdot BC$$
$$= BC(BD + DC)$$
$$= BC \cdot BC$$
$$\checkmark = (BC)^2$$

(2) في الشكل: $ABCD$ مستطيل، $AB=6$ ، $AD=8$ ، $\bar{AF}\perp\bar{BD}$ في E ، $F\in\bar{BC}$. أوجد طول $\bar{EF}$

الحل



في $\triangle ABD$ القائم في A :

$(BD)^2=(AB)^2+(AD)^2$ (نظرية فيثاغورث)

$BD=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$(AB)^2=BE\cdot BD$ (نتيجة (2) من نظرية إقليدس)

$BE=\frac{36}{10}=3.6$

$AE\cdot BD=AB\cdot AD$ (نتيجة (2) من نظرية إقليدس)

$AE=\frac{6\times 8}{10}=4.8$

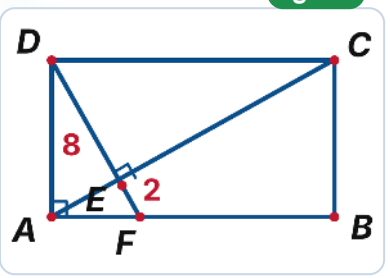
في $\triangle ABF$ القائم في B ، $\bar{BE}\perp\bar{AF}$:

$(BE)^2=AE\cdot EF$ (نتيجة (1) من نظرية إقليدس)

$EF=\frac{(3.6)^2}{4.8}=2.7$

(3) في الشكل: $ABCD$ مستطيل، $F\in\bar{AB}$ ، رسم $\bar{DF}\perp\bar{AC}$ في E ، فإذا كان $DE=8\,cm$ ، $EF=2\,cm$ أوجد طول $\bar{DA}$

الحل



$DF=DE+EF=8+2=10$

في $\triangle DAF$ القائم في A ، $\bar{AE}\perp\bar{DF}$:

$(DA)^2=DE\cdot DF$ (نتيجة (2) من نظرية إقليدس)

$(DA)^2=8\times 10=80$

$DA=\sqrt{80}=4\sqrt{5}\ cm$

📋 خلاصة البند (2-4): نظرية إقليدس في $\triangle ABC$ القائم في A ، $\bar{AD}\perp\bar{BC}$

① $(AD)^2=BD\cdot DC$ ② $(AB)^2=BD\cdot BC$ ③ $(AC)^2=CD\cdot CB$ ④

$AB\cdot AC=AD\cdot BC$

🌟 أحسنت! 👏

البند (2-5): التناسبات والمثلثات المتشابهة — Proportions and Similar Triangles

💡 فكرة الدرس

ستتعلم: (1) نظرية المستقيم الموازي لأحد أضلاع مثلث (2) نظرية طاليس (3) نظرية منصف الزاوية الداخلي لمثلث.

📚 تعلمنا فيما سبق

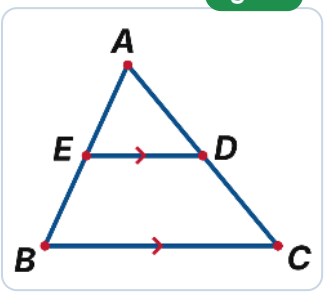
تشابه المثلثات – التناسب.

📖 مسألة الدرس – لنعمل معًا لنستكشف

في الشكل: $\bar{ED} \parallel \bar{BC}$ ، المطلوب إثبات أن:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$$

الحل



$\bar{ED} \parallel \bar{BC} \leftarrow \triangle ABC \sim \triangle AED$ ، لأن $\hat{A}$ مشتركة و

بالتناظر $m\left(A\hat{E}D\right) = m\left(A\hat{B}C\right)$

من التشابه: $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$ ← (1)

ومن هندسة الشكل: $AC = AD + DC$ ، $AB = AE + EB$

بالتعويض في (1):

$$\frac{AD + DC}{AD} = \frac{AE + EB}{AE}$$

$$\frac{AD}{AD} + \frac{DC}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EB}{AE}$$

$$1 + \frac{DC}{AD} = 1 + \frac{EB}{AE}$$

$$\frac{DC}{AD} = \frac{EB}{AE}$$

ℹ️ معلومة رياضية

إذا كان $\bar{ED} \parallel \bar{BC}$ فإن $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ والعكس صحيح.

⋆ نظرية (1): «نظرية المستقيم الموازي» Parallel Line Theory

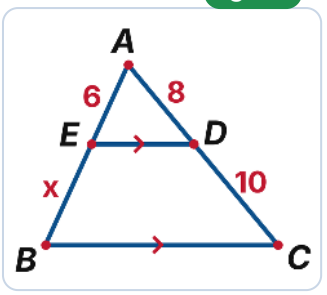
إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين ، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.

أي أن في المثلث ABC : $\bar{ED} \parallel \bar{BC}$ فإن $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$

عكس النظرية صحيح: أي أنه إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ فإن $\bar{ED} \parallel \bar{BC}$

مثال (1) في الشكل: $\bar{BC} \parallel \bar{ED}$ ، أوجد قيمة x

الحل



$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$$ (نظرية المستقيم الموازي)

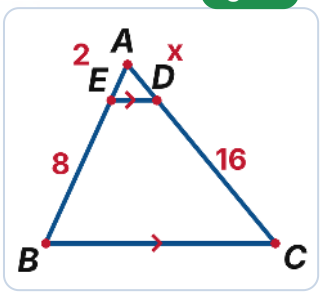
الأجزاء المتناسبة ← $\frac{6}{x} = \frac{8}{10}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$8x = 6 \times 10$$
$$8x = 60$$
$$x = \frac{60}{8} = 7.5$$

تحقق من فهمك (a-1) في الشكل: $\bar{BC} \parallel \bar{ED}$ ، أوجد قيمة x

الحل



$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$$ (نظرية المستقيم الموازي)

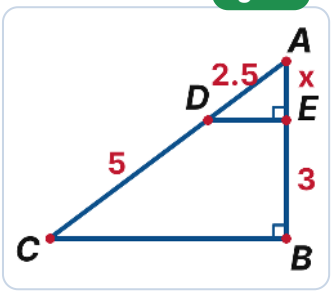
$$\frac{2}{8} = \frac{x}{16}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$8x = 2 \times 16$$
$$8x = 32$$
$$x = 4$$

تحقق من فهمك (b-1) في الشكل: $\bar{DE} \perp \bar{AB}$ ، $\bar{CB} \perp \bar{AB}$ ، أوجد قيمة x

الحل



$\bar{DE} \parallel \bar{CB}$ (كلاهما عمودي على $\bar{AB}$)

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EB}$$ (نظرية المستقيم الموازي)

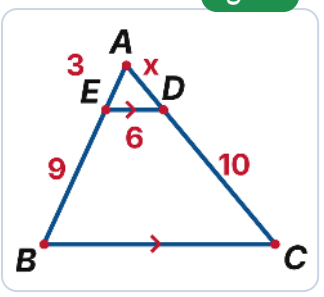
$$\frac{2.5}{5} = \frac{x}{3}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$5x = 2.5 \times 3$$
$$5x = 7.5$$
$$x = 1.5$$

فكّر معي في الشكل: ABC مثلث فيه $\bar{ED} \parallel \bar{BC}$. المطلوب: ① طول $\bar{AD}$ ② طول $\bar{BC}$. من خلال متابعة المعلم لطلابه وجد أن هناك طريقتين في التفكير للمتعلمين فهد وإبراهيم. أي الرأيين تؤيد؟

الحل



طريقة فهد: من تشابه المثلثين ABC , AED :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$$
$$\frac{3}{12} = \frac{AD}{AD+10} = \frac{6}{BC}$$
$$3\,AD + 30 = 12\,AD$$
$$9\,AD = 30$$
$$AD = \frac{10}{3}$$
$$3\,BC = 72$$
$$BC = 24$$

طريقة إبراهيم: $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} = \frac{ED}{BC}$ ، فحصل على $AD = \frac{10}{3}$ و $BC = 18$

أؤيد فهد: $BC = 24$. إبراهيم أخطأ في كتابة $\frac{AE}{EB} = \frac{ED}{BC}$ ؛ فنظرية المستقيم الموازي تعطي تناسب أجزاء الضلعين فقط ($\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$) ، أما ED فيتناسب مع BC من تشابه المثلثين: $\frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AB}$ (قيمة AD صحيحة في الطريقتين).

نظرية (2): «نظرية طاليس» Thales Theory

نشاط: لنعمل معًا لنستكشف

① ارسم المستقيمات $L \parallel N \parallel H$ ② ارسم المستقيم k يقطع L, N, H في النقاط E, D, F على الترتيب ③ ارسم المستقيم Q يقطع L, N, H في النقاط A, B, C على الترتيب ④ ارسم $R \parallel Q$ يقطع L, N, H في النقاط E, M, G على الترتيب.

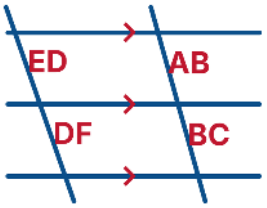
من هندسة الشكل: $ABME$ متوازي أضلاع ، إذن $EM = AB$ ، وأيضًا $BCGM$ متوازي أضلاع ، إذن $MG = BC$. في المثلث EFG : $\bar{DM} \parallel \bar{FG}$ (من نظرية المستقيم الموازي): $\frac{ED}{DF} = \frac{EM}{MG}$ ، إذن

$$\frac{ED}{DF} = \frac{AB}{BC}$$

⋆ نظرية (2): «نظرية طاليس» إذا قطع مستقيمان ثلاث مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

الحل

إذا كان $L \parallel M \parallel N$ ويقطعها القاطعان R, Q فإن: $\dfrac{ED}{DF} = \dfrac{AB}{BC}$



مثال (2) في الشكل: المستقيمات الثلاثة متوازية ، أوجد قيمة x

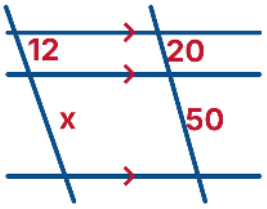
الحل

(نظرية طاليس) $\dfrac{12}{x} = \dfrac{20}{50}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$20x = (12)(50)$$

$$x = \frac{600}{20} = 30$$



تحقق من فهمك (2) في الشكل: المستقيمات الثلاثة متوازية ، أوجد قيمة x

الحل

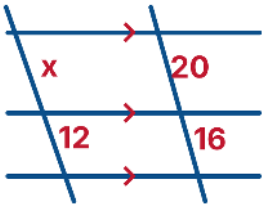
(نظرية طاليس) $\dfrac{x}{12} = \dfrac{20}{16}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$16x = 12 \times 20$$

$$16x = 240$$

$$x = 15$$



مثال (3) في الشكل: المستقيمات الثلاثة متوازية ، أوجد قيمة x

الحل

(نظرية طاليس) $\dfrac{3x-4}{x} = \dfrac{33}{12}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

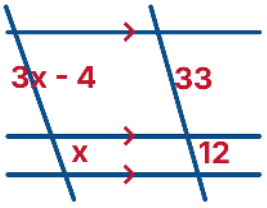
$$12(3x-4) = 33x$$

$$36x - 48 = 33x$$

$$36x - 33x = 48$$

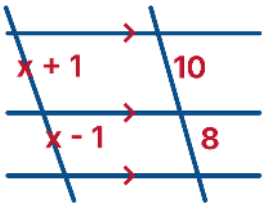
$$3x = 48$$

$$x = 16$$



تحقق من فهمك (3) في الشكل: المستقيمات الثلاثة متوازية ، أوجد قيمة x

الحل



$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{10}{8}$$ (نظرية طاليس)

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$8(x+1)=10(x-1)$$
$$8x+8=10x-10$$
$$8x-10x=-10-8$$
$$-2x=-18$$
$$x=9$$

📌 ملحوظة

إذا كانت $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ و $\frac{ED}{DF}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ أي أن $\frac{AB}{BC}=\frac{ED}{DF}$ فليس بالضرورة أن تكون المستقيمات L, M, N متوازية. إذا كانت أطوال القطع المستقيمة الناتجة من أحد القاطعين متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر فليس بالضرورة أن تكون المستقيمات متوازية. عكس نظرية طاليس ليس بالضرورة صحيحًا.

نظرية (3): «نظرية منصف الزاوية في مثلث» Angle Bisector Theorem

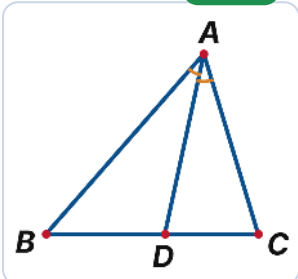
🧩 نشاط: لنعمل معًا لنستكشف

① ارسم المثلث ABC ، نصّف الزاوية A بالمنصف $\overrightarrow{AD}$ ② ارسم شعاعًا من C وهو $\overrightarrow{CM}$ يوازي $\overrightarrow{AD}$ ويقطع $\overrightarrow{BA}$ في M.

من هندسة الشكل: $m(\hat{1})=m(\hat{4})$ بالتناظر والتوازي ، $m(\hat{2})=m(\hat{3})$ بالتبادل والتوازي ، $m(\hat{1})=m(\hat{2})$ من تنصيف $\hat{A}$ ، إذن $m(\hat{3})=m(\hat{4})$ ومنه $AM=AC$ ← (1). من نظرية المستقيم الموازي: $\frac{AB}{AM}=\frac{BD}{DC}$ ← (2). من (1) ، (2) ينتج أن: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

★ نظرية (3): «نظرية منصف الزاوية في مثلث» إذا نُصّفت زاوية رأس مثلث الداخلة أو الزاوية الخارجة عند هذا الرأس ، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

الحل



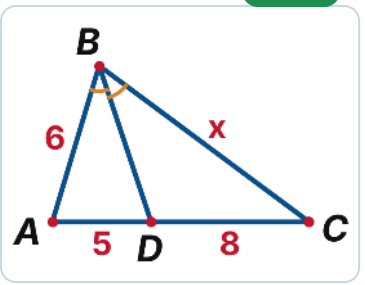
إذا كان $\overrightarrow{AD}$ منصف $\hat{A}$ فإن: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$ أو $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}$

(نظرية منصف الزاوية في مثلث)

ملحوظة: سنكتفي بدراسة حالة المنصف الداخلي للزاوية في المثلث.

مثال (4) أوجد قيمة x في الشكل حيث $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $A\hat{B}C$

الحل



في المثلث ABC : $\overrightarrow{BD}$ منصف $A\hat{B}C$

(نظرية منصف الزاوية في مثلث) $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

$$\frac{6}{x} = \frac{5}{8}$$

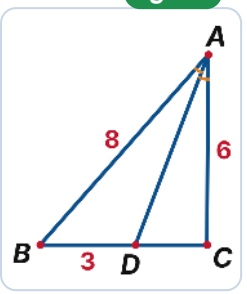
حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$5x = (6)(8)$$

$$x = \frac{48}{5} = 9.6$$

تحقق من فهمك (4) المثلث ABC فيه $AC = 6$ ، $AB = 8$ ، $\overrightarrow{AD}$ ينصّف $B\hat{A}C$ ويقطع $\bar{BC}$ في D. إذا كان $BD = 3$ أوجد CD

الحل



(نظرية منصف الزاوية في مثلث) $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

$$\frac{8}{6} = \frac{3}{CD}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

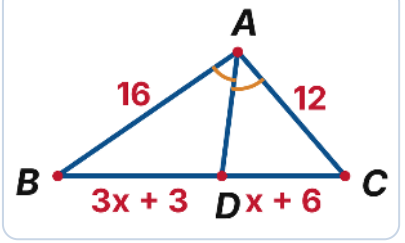
$$8\,CD = 6 \times 3$$

$$8\,CD = 18$$

$$CD = \frac{18}{8} = 2.25$$

مثال (5) أوجد قيمة x في الشكل المبين حيث $\overrightarrow{AD}$ ينصّف $C\hat{A}B$

الحل



في المثلث CAB : $\overrightarrow{AD}$ منصف $C\hat{A}B$

(نظرية منصف الزاوية في مثلث) $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

$$\frac{16}{12} = \frac{3x+3}{x+6}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$12(3x+3) = 16(x+6)$$

$$36x + 36 = 16x + 96$$

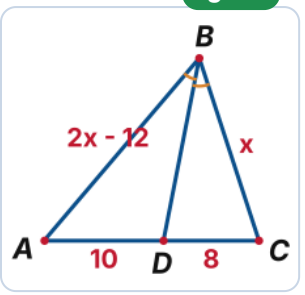
$$36x - 16x = 96 - 36$$

$$20x = 60$$

$$x = 3$$

تحقق من فهمك (5) المثلث ABC فيه $DC = 8$ ، $AD = 10$ ، $\overrightarrow{BD}$ ينصّف الزاوية $A\hat{B}C$ ويقطع $\bar{AC}$ في D ، $BC = x$ ، $AB = 2x - 12$ ، أوجد x

الحل



(نظرية منصف الزاوية في مثلث) $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

$$\frac{2x - 12}{x} = \frac{10}{8}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

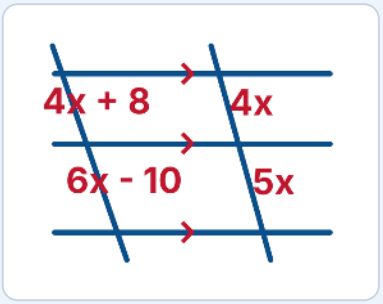
$$8(2x - 12) = 10x$$
$$16x - 96 = 10x$$
$$16x - 10x = 96$$
$$6x = 96$$
$$x = 16$$

أتدرّب وأحل المسائل

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

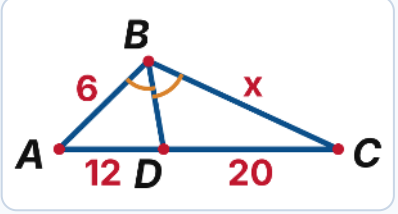
ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

1 في الشكل: المستقيمات الثلاثة متوازية ، قيمة x تساوي:



(a) 10 (b) 20 (c) 8 (d) 5

2 في الشكل: $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\hat{B}$ ، قيمة x تساوي:



(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 20

تعليل الإجابات

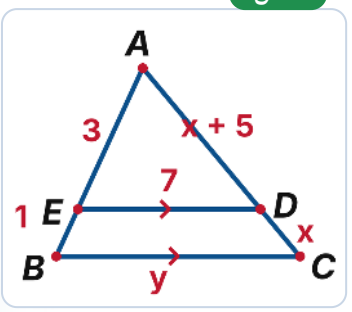
(1) طاليس: $\dfrac{4x+8}{6x-10}=\dfrac{4x}{5x}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow 20x+40=24x-40\Rightarrow x=20$

(2) منصف الزاوية B : $\dfrac{6}{x}=\dfrac{12}{20}\Rightarrow x=10$

أسئلة المقال

(1) في الشكل: $\bar{ED}\parallel\bar{BC}$ ، أوجد قيمة كل من x, y

الحل



(نظرية المستقيم الموازي) $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AD}{DC}$

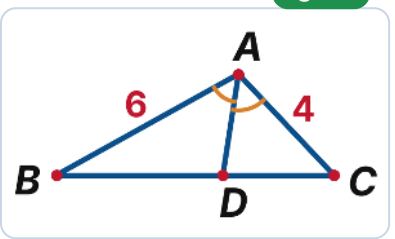
$$\frac{3}{1}=\frac{x+5}{x}$$
$$3x=x+5$$
$$3x-x=5$$
$$2x=5$$
$$x=2.5$$

من التشابه: $\triangle AED\sim\triangle ABC$: $\dfrac{ED}{BC}=\dfrac{AE}{AB}$

$$\frac{7}{y}=\frac{3}{3+1}$$
$$3y=28$$
$$y=\frac{28}{3}$$

(2) في المثلث ABC ، $\overrightarrow{AD}$ نصّف $\hat{A}$ ، إذا كان $BC=8$, $AC=4$, $AB=6$ فأوجد DB , DC

الحل



(نظرية منصف الزاوية في مثلث) $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{6}{4}$

نفرض $DB=6k$, $DC=4k$

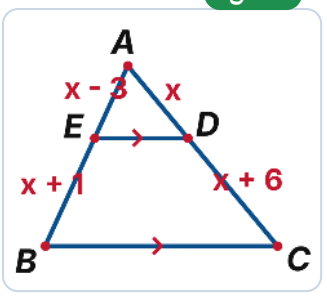
$$6k+4k=8$$
$$10k=8$$
$$k=0.8$$
$$DB=6\times 0.8=4.8$$
$$DC=8-4.8=3.2$$

أسئلة المقال (3)

في البنود التالية أوجد قيمة x

(a) $\bar{ED} \parallel \bar{BC}$

الحل



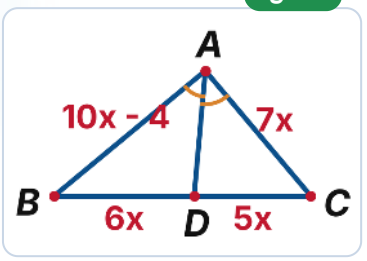
(نظرية المستقيم الموازي) $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x}{x+6}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$(x-3)(x+6) = x(x+1)$$
$$x^2 + 3x - 18 = x^2 + x$$
$$3x - x = 18$$
$$2x = 18$$
$$x = 9$$

(b) $\overrightarrow{AD}$ ينصّف $\hat{A}$

الحل



(نظرية منصف الزاوية في مثلث) $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

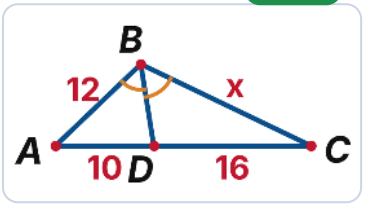
$$\frac{10x-4}{7x} = \frac{6x}{5x} = \frac{6}{5}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$5(10x-4) = 6(7x)$$
$$50x - 20 = 42x$$
$$50x - 42x = 20$$
$$8x = 20$$
$$x = 2.5$$

(c) $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\hat{B}$

الحل



(نظرية منصف الزاوية في مثلث) $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

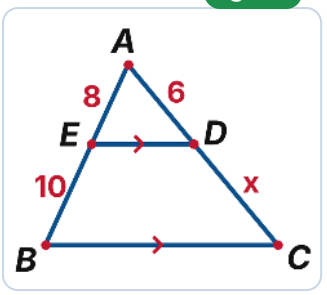
$$\frac{12}{x} = \frac{10}{16}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$10x = 12 \times 16$$
$$10x = 192$$
$$x = 19.2$$

(d) $\bar{ED} \parallel \bar{BC}$

الحل



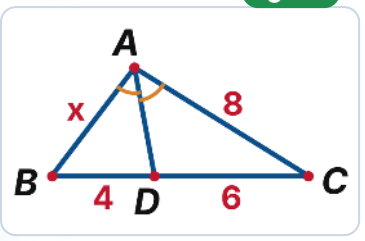
(نظرية المستقيم الموازي) $\frac{8}{10} = \frac{6}{x}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$8x = 10 \times 6$$
$$8x = 60$$
$$x = 7.5$$

(e) $\overrightarrow{AD}$ ينصّف $\hat{A}$

الحل



(نظرية منصف الزاوية في مثلث) $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

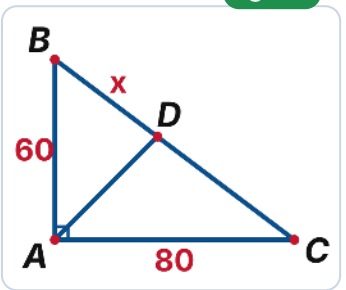
$$\frac{x}{8} = \frac{4}{6}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$6x = 8 \times 4$$
$$6x = 32$$
$$x = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

(f) $\triangle ABC$ قائم في A ، $\overrightarrow{AD}$ ينصّف الزاوية القائمة

الحل



(نظرية فيثاغورث) $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

$$BC = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$$

(نظرية منصف الزاوية في مثلث) $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

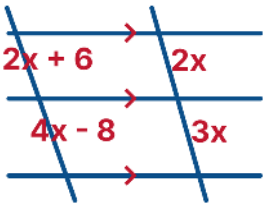
$$\frac{x}{100 - x} = \frac{60}{80}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$80x = 60(100 - x)$$
$$80x = 6000 - 60x$$
$$80x + 60x = 6000$$
$$140x = 6000$$
$$x = \frac{300}{7} \approx 42.86$$

(g) المستقيمات الثلاثة متوازية

الحل



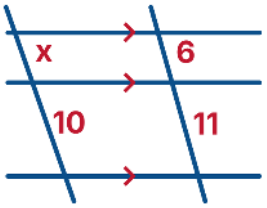
(نظرية طاليس) $\frac{2x+6}{4x-8}=\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$3(2x+6)=2(4x-8)$$
$$6x+18=8x-16$$
$$6x-8x=-16-18$$
$$-2x=-34$$
$$x=17$$

(h) المستقيمات الثلاثة متوازية

الحل



(نظرية طاليس) $\frac{x}{10}=\frac{6}{11}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$11x=10\times 6$$
$$11x=60$$
$$x=\frac{60}{11}$$

📋 خلاصة البند (2-5)

المستقيم الموازي: $\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}$ (وعكسها صحيح) · طاليس: $\frac{ED}{DF}=\frac{AB}{BC}$ (عكسها ليس بالضرورة صحيحًا) ·

منصف الزاوية: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

🌟 أحسنت! أنهيت الوحدة الثانية 🏆