مذكرات سما

الرياضيات

الوحدة 3



الصف العاشر

المرحلة الثانوية



الفصل الدراسي الأول

2027 - 2026

www.samakw.com
samakw_net
60084568 /50855008/97442417
حولي مجمع بيروت الدور الأول

الصف العاشر · الفصل الدراسي الأول

المذكرة الشاملة — الوحدة الثالثة

حساب المثلثات — نسخة الحل · 2026 / 2027

10
الصف

بنود الوحدة

البند (3-1) النسب المثلثية الأساسية ومقلوباتها

البند (3-2) حل المثلث القائم

البند (3-3) زاوية الارتفاع – زاوية الانخفاض

البند (3-4) الدوال المثلثية (الدوال الدائرية)

البند (3-5) العلاقات بين الدوال المثلثية

البند (3-6) حل المعادلات المثلثية

طريقة الحل المعتمدة

📌 القانون قبل التعويض ، وكل خطوة في سطر

📐 اسم النظرية أو النتيجة في مسائل الهندسة والتشابه

✍️ خطوة النقل وتجميع الحدود المتشابهة

🎯 الرسومات دقيقة ، والحل تحت السؤال

إعداد: الأستاذ وليد حسين — مادة الرياضيات · منصة سما التعليمية

البند (3-1): النسب المثلثية الأساسية ومقلوباتها

💡 فكرة الدرس
استكشاف النسب المثلثية للمثلث القائم.

📚 تعلمنا فيما سبق
نظرية فيثاغورث – تشابه المثلثات – النسبة والتناسب.

📝 المصطلحات
جيب الزاوية $\sin\theta$ · جيب تمام الزاوية $\cos\theta$ · ظل الزاوية $\tan\theta$ · قاطع الزاوية $\sec\theta$ · قاطع تمام الزاوية $\csc\theta$ · ظل تمام الزاوية $\cot\theta$

📖 مسألة الدرس
نعلم بأن نظرية فيثاغورث تتعامل مع أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية ، ومسلمة إقليدس في الهندسة والتي تنص على أن «مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية تساوي 180°» تتعامل مع زوايا المثلث الداخلية ، والآن سوف نتعلم كيفية الربط بين أطوال أضلاع المثلث وقياس الزوايا ، وهذا العلم يسمى «علم حساب المثلثات» ، وسوف نقوم بدراسة حساب المثلثات من خلال مسارين: المسار الأول: يعتمد على خصائص المثلث القائم الزاوية.
المسار الثاني: يعتمد على مفهوم دائرة الوحدة.

📜 نظرة تاريخية
فيثاغورث (572 – 492 ق.م): أسس مدرسته الشهيرة التي قدمت برهانًا للنظرية المعروفة باسمه (نظرية فيثاغورث) التي ما زالت تُدرس في مدارسنا حتى اليوم ، حيث تربط بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية. · إقليدس: يعتبر الأب المؤسس للهندسة ، وكانت لأعماله أهمية كبيرة في تاريخ الرياضيات ، وأهم مؤلفاته كتاب «أصول الهندسة» ، ووضع نظام البديهيات (المسلمات) في الهندسة سميت باسمه (الهندسة الإقليدية).

لنعمل معًا لنستكشف في الرسم البياني مثلثات AFG , AED , ABC قائمة ، أضلاعها القائمة $(3, 4)$ ، $(6, 8)$ ، $(9, 12)$ وأوترها $5, 10, 15$ والزاوية θ عند A مشتركة.

الحل

① كل من المثلثات قائمة لأن $\bar{FG}$, $\bar{ED}$, $\bar{BC}$ عمودية على محور السينات

② المثلثات متشابهة لأن الزاوية θ مشتركة والزاوية القائمة (تطابق زاويتين)

③ $\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$ ، $\frac{ED}{AE}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ ، $\frac{FG}{AF}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

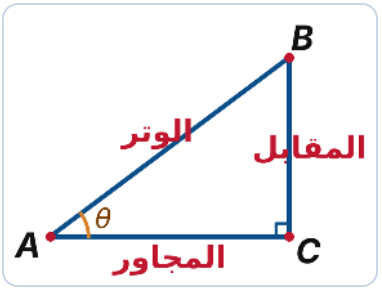
④ $\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$ ، $\frac{AD}{AE}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ ، $\frac{AG}{AF}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

⑤ $\frac{BC}{AC}=\frac{4}{3}$ ، $\frac{ED}{AD}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ ، $\frac{FG}{AG}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$

نلاحظ أن النسب الثلاث متساوية في المثلثات الثلاثة في كل حالة.

⋆ ملخص ما سبق في أي مثلث قائم يكون:

الحل



① $\sin\theta$ ← طول الضلع المقابل للزاوية θ ÷ طول الوتر:

$$\sin\theta = \frac{BC}{AB}$$

② $\cos\theta$ ← طول الضلع المجاور للزاوية θ ÷ طول الوتر:

$$\cos\theta = \frac{AC}{AB}$$

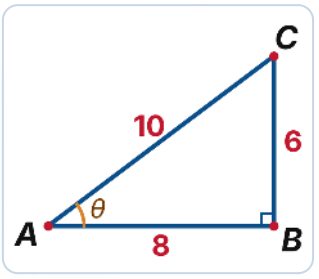
③ $\tan\theta$ ← طول الضلع المقابل ÷ طول الضلع المجاور:

$$\tan\theta = \frac{BC}{AC}$$

هذه العلاقات الثلاث تسمى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ ، وهي تربط بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية وقياس الزاويتين الحادتين فيه.

مثال (1) في الشكل: ABC مثلث قائم الزاوية في B ، أوجد: $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$

الحل



$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin\theta = \frac{CB}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

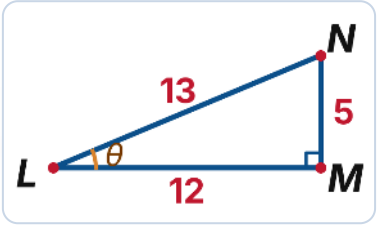
$$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{CB}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

تحقق من فهمك (1) في الشكل: LMN مثلث قائم الزاوية في M ، أوجد: $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$

الحل



$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin\theta = \frac{MN}{LN} = \frac{5}{13}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

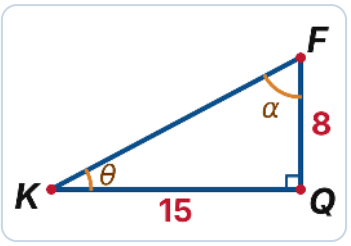
$$\cos\theta = \frac{LM}{LN} = \frac{12}{13}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{MN}{LM} = \frac{5}{12}$$

مثال (2) في الشكل: المثلث FQK قائم الزاوية في Q ، أوجد كلًّا من: ① KF ② $\cos\theta$ ③ $\sin\alpha$ ④ $\sin\theta$ ⑤ $\cos\alpha$ ⑥ ماذا تلاحظ بالنسبة إلى النسب المثلثية للزاويتين α , θ ؟

الحل



① $(KF)^2 = (KQ)^2 + (QF)^2$

(نظرية فيثاغورث)

$KF = \sqrt{(15)^2 + (8)^2} = \sqrt{289} = 17$

② $\cos\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \dfrac{15}{17}$

③ $\sin\alpha = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dfrac{15}{17}$

④ $\sin\theta = \dfrac{8}{17}$

⑤ $\cos\alpha = \dfrac{8}{17}$

⑥ نلاحظ أن:

$\sin\theta = \cos\alpha \Rightarrow \sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$

$\cos\theta = \sin\alpha$

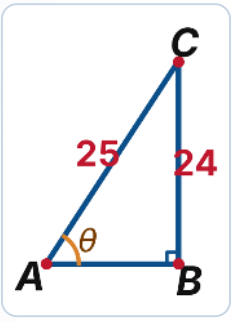
$\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$

تذكّر

الزاويتان المتتامتان هما زاويتان مجموع قياسهما يساوي 90° · α, β, γ حروف لاتينية تستخدم للتعبير عن الزوايا.

تحقق من فهمك (2) في الشكل: $\triangle ABC$ قائم في B ، $BC = 24$, $AC = 25$ ، أوجد: $\tan\theta$, $\cos\theta$, $\sin\theta$ ، وطول $\bar{AB}$

الحل



(نظرية فيثاغورث) $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$AB = \sqrt{(25)^2 - (24)^2} = \sqrt{49} = 7$

$\sin\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\sin\theta = \dfrac{24}{25}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\cos\theta = \dfrac{7}{25}$

$\tan\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\tan\theta = \dfrac{24}{7}$

مقلوبات النسب المثلثية الأساسية

⋆ مقلوبات النسب المثلثية

① مقلوب $\sin\theta$ هو $\frac{1}{\sin\theta}$ ويسمى (θ **cosecant**) ويرمز له بالرمز $\csc\theta$: $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ، $\sin\theta \neq 0$

$\csc\theta$ ← = الوتر ÷ المقابل

② مقلوب $\cos\theta$ هو $\frac{1}{\cos\theta}$ ويسمى (θ **secant**) ويرمز له بالرمز $\sec\theta$: $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ، $\cos\theta \neq 0$

$\sec\theta$ ← = الوتر ÷ المجاور

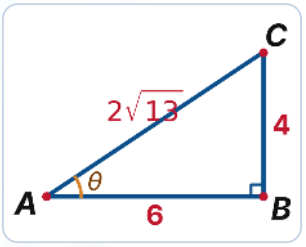
③ مقلوب $\tan\theta$ هو $\frac{1}{\tan\theta}$ ويسمى (θ **cotangent**) ويرمز له بالرمز $\cot\theta$:

$\cot\theta$ ← $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ ، $\tan\theta \neq 0$ = المجاور ÷ المقابل

لاحظ أن: حاصل ضرب النسبة المثلثية الأساسية في مقلوبها يساوي 1 : $(\sin\theta)(\csc\theta) = 1$ ، $(\cos\theta)(\sec\theta) = 1$ ، $(\tan\theta)(\cot\theta) = 1$

مثال (3) في الشكل: ① أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية في B ② أوجد: $\cot\theta$ ، $\sec\theta$ ، $\csc\theta$

الحل



① $(AB)^2 + (CB)^2 = (6)^2 + (4)^2 = 52$

$(AC)^2 = (2\sqrt{13})^2 = 52$

$(AC)^2 = (AB)^2 + (CB)^2$ (نظرية فيثاغورث)

المثلث قائم في B (عكس نظرية فيثاغورث)

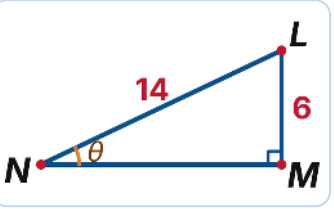
② $\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{2\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

$\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{2\sqrt{13}}{6} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

$\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

تحقق من فهمك (3) في الشكل: $\triangle LMN$ قائم في M ، $LM = 6$ ، $LN = 14$ ، أوجد: ① طول $\bar{MN}$ ② $\tan\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\sin\theta$ ③ $\cot\theta$ ، $\csc\theta$ ، $\sec\theta$

الحل



① $(LN)^2 = (LM)^2 + (MN)^2$ (نظرية فيثاغورث)

$MN = \sqrt{(14)^2 - (6)^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

② $\sin\theta = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

$\cos\theta = \frac{4\sqrt{10}}{14} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$

$\tan\theta = \frac{6}{4\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}$

③ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{7}{2\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{20}$

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{7}{3}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4\sqrt{10}}{6} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية الأساسية ومقلوباتها

تدرّب استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد كل مما يلي:

الحل

المطلوب	خطوات الآلة الحاسبة	الناتج
(1) $\sin(53^\circ)$	sin (5 3) =	0.79863551
(2) $\cos(58^\circ)$	cos (5 8) =	0.5299192642
(3) $\tan(68^\circ)$	tan (6 8) =	2.475086853
(4) $\sec(30^\circ)$	cos ( ) x^{-1} = (3 0)	1.154700538
(5) $\cot(75^\circ)$	tan ( ) x^{-1} = (7 5)	0.2679491924
(6) $\csc(42^\circ)$	sin ( ) x^{-1} = (4 2)	1.49447655

(7) للتعبير عن الزاوية 37.45° بالدرجة والدقيقة والثانية نتبع التالي: $37.45 =$ ثم زر $(^\circ\ '\ '')$ ← $37^\circ 27' 0''$

تذكر: $\csc 42^\circ = \dfrac{1}{\sin 42^\circ}$ ، $\sec 30^\circ = \dfrac{1}{\cos 30^\circ}$ ، $\cot 75^\circ = \dfrac{1}{\tan 75^\circ}$

إيجاد قياس زاوية باستخدام النسب المثلثية

مثال (4) أوجد قياس الزاوية θ في كل مما يلي: ① مثلث قائم فيه الضلع المقابل للزاوية θ يساوي 5 والوتر 14 ② مثلث قائم فيه الضلع المجاور للزاوية θ يساوي 9 والوتر 15 ③ مثلث قائم فيه المقابل 6 والمجاور 3

الحل

لإيجاد قياس الزاوية θ نبحث عن العلاقة بين طولي الضلعين المعلومين من خلال النسب المثلثية الأساسية:

① $\sin\theta = \dfrac{5}{14}$

$\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{5}{14}\right) = 20.92483243^\circ = 20^\circ 55' 29.4''$

② $\cos\theta = \dfrac{9}{15}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{9}{15}\right) = 53.13010235^\circ = 53^\circ 7' 48.37''$

③ $\tan\theta = \dfrac{6}{3}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{6}{3}\right) = 63.43494882^\circ = 63^\circ 26' 5.82''$

تذكر: $\sin^{-1}$ ، $\cos^{-1}$ ، $\tan^{-1}$ لا تمثل معكوس $\sin$ ، $\cos$ ، $\tan$

تحقق من فهمك (4) أوجد قياس الزاوية θ في كل مما يلي: ① مثلث قائم فيه المجاور للزاوية θ يساوي 10 والوتر 18 ② مثلث قائم فيه المقابل 8 والمجاور 16 ③ مثلث قائم فيه المقابل 3 والوتر $3\sqrt{2}$

الحل

① $\cos\theta = \dfrac{10}{18}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{5}{9}\right) \approx 56.2510114^\circ = 56^\circ 15' 3.64''$

② $\tan\theta = \dfrac{8}{16}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx 26.56505118^\circ = 26^\circ 33' 54.18''$

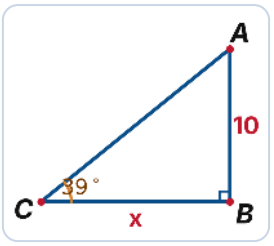
③ $\sin\theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = 45^\circ$

إيجاد طول ضلع في مثلث قائم باستخدام النسب المثلثية

مثال (5-1) في الشكل: أوجد قيمة x

الحل



$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

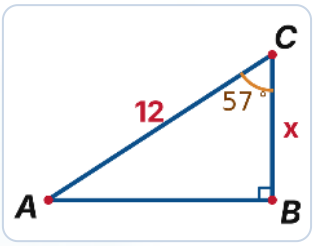
$\tan(39^\circ) = \frac{10}{x}$ ← اختيار النسبة المثلثية المناسبة

$x = \frac{10}{\tan(39^\circ)}$ ← استخدام خواص التناسب

$x \approx 12.35$ ← استخدام الآلة الحاسبة

مثال (5-2) في الشكل: أوجد قيمة x

الحل



$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

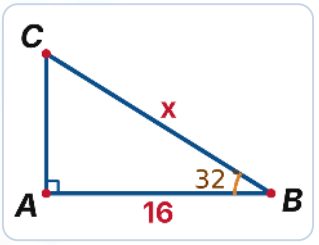
$\cos(57^\circ) = \frac{x}{12}$ ← اختيار النسبة المثلثية المناسبة

$x = (12)\cos(57^\circ)$ ← استخدام خواص التناسب

$x \approx 6.54$ ← استخدام الآلة الحاسبة

تحقق من فهمك (5-1) استخدم النسب المثلثية في إيجاد قيمة x

الحل



$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

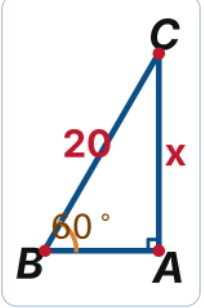
$$\cos(32^\circ) = \frac{16}{x}$$

$$x = \frac{16}{\cos(32^\circ)}$$

$$x \approx 18.87$$

تحقق من فهمك (5-2) استخدم النسب المثلثية في إيجاد قيمة x

الحل



$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

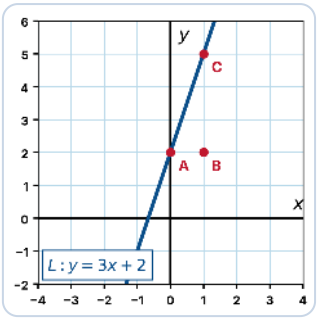
$$\sin(60^\circ) = \frac{x}{20}$$

$$x = 20\sin(60^\circ)$$

$$x = 10\sqrt{3} \approx 17.32$$

لنعمل معًا لنستكشف ميل المستقيم وظل الزاوية: التمثيل البياني للمستقيم $L: y = 3x + 2$ حيث θ_1 هي الزاوية التي يصنعها المستقيم L مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، والنقطة A هي نقطة تقاطع المستقيم L مع محور الصادات.

الحل



نرسم $\bar{AB} \parallel$ محور السينات ، فتكون $\theta = \theta_1$ (بالتناظر)

في المثلث ABC القائم الزاوية في B :

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{1}$$

$$\tan\theta = 3$$

وحيث إن معادلة المستقيم $L: y = mx + 2$ هي

$$y = 3x + 2$$

مما سبق نستطيع استنتاج أن: $m = \tan\theta$

أي أن ميل المستقيم يساوي ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

معلومة

زاوية حادة (ميل موجب): إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المستقيم يكون موجبًا. · زاوية منفرجة (ميل سالب): إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المستقيم يكون سالبًا.

مثال (6) احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم $L: y = \frac{1}{4}x + 6$ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني.

الحل

$$m = \tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{1}{4}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14.03624347^\circ = 14^\circ 2' 10.48''$$

تحقق من فهمك (6) احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم $L: y = x + 3$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الحل

$$m = \tan\theta$$

$$m = 1$$

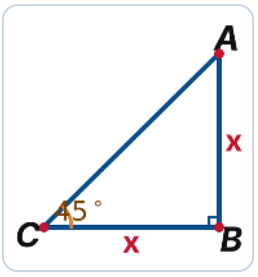
$$\tan\theta = 1$$

$$\theta = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

⋆ النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

استكشف: الزاوية 45° إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية في B حيث $AB = BC = x$

الحل



من متطابقة فيثاغورث:

$$AC = \sqrt{(x)^2 + (x)^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\ x$$

$$\sin(45^\circ) = \frac{x}{\sqrt{2}\ x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{x}{\sqrt{2}\ x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(45^\circ) = \frac{x}{x} = 1$$

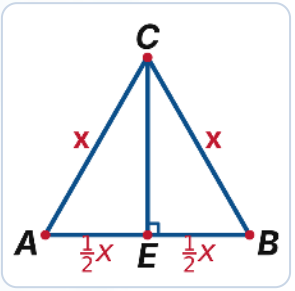
مما سبق: $\csc 45^\circ = \sqrt{2}$ ، $\sec 45^\circ = \sqrt{2}$ ،

$$\cot 45^\circ = 1$$

استكشف: الزاويتان 60° و 30° إذا كان المثلث ABC متطابق الأضلاع ورسم $\bar{CE} \perp \bar{AB}$ فإذا كان

$$AE = EB = \frac{1}{2}x \text{ ، } AC = CB = AB = x$$

الحل



من متطابقة فيثاغورث في المثلث AEC القائم في E:

$$CE = \sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

ومن هندسة الشكل: $m(\hat{A}) = 60^\circ$

$$\sin 60^\circ = \frac{CE}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{CE}{AE} = \sqrt{3}$$

مما سبق للزاوية 60°: $\csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ،

$$\sec 60^\circ = 2 \text{ ، } \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

وللزاوية 30° (عند رأس C):

$$\sin(30^\circ) = \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2} \text{ ،}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ،}$$

$$\tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مما سبق للزاوية 30°: $\csc 30^\circ = 2$ ،

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3} \text{ ، } \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

هل تعلم؟

وضعت جداول للنسب المثلثية منذ أكثر من 1500 عام وكانت هذه الجداول تستخدم في الفلك ، وأول من استخدم حساب المثلثات في علم الفلك هو مينلاوس عام 100 ميلادية ، وبعد ذلك اخترعت الآلة الحاسبة التي أنهت استخدام هذه الجداول.

أتدرّب وأحل المسائل

صح أو خطأ (درجة لكل بند)

1 في المثلث ABC القائم الزاوية في B يكون $\cos\left(\hat{A}\right)\sec\left(\hat{A}\right)=1$ حيث $\cos\left(\hat{A}\right)\neq 0$ — a b

2 في المثلث القائم الذي أطوال أضلاعه $5, 12, 13$ (الزاوية θ بين الوتر 13 والضلع 5): $\sin(90^\circ-\theta)$ يساوي $\frac{5}{13}$ — a b

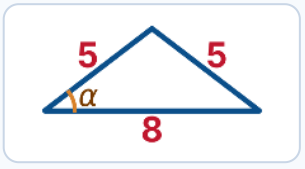
3 في المثلث ABC القائم الزاوية في B يكون $\sin\left(\hat{C}\right)\cdot\cot\left(\hat{C}\right)=\cos\left(\hat{C}\right)$ حيث $\sin\left(\hat{C}\right)\neq 0$ — a b

4 في المثلث ABC القائم الزاوية في B يكون $AC=(AB)\cos\left(\hat{C}\right)$ — a b

5 إذا كان ABC مثلثًا قائم الزاوية في B فإن $\cos\left(\hat{C}\right)\cdot\tan\left(\hat{C}\right)=\sin\left(\hat{C}\right)$ حيث $\cos\left(\hat{C}\right)\neq 0$ — a b

6 قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم $y-x=6$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي 45° — a b

7 في الشكل (مثلث متطابق الضلعين أضلاعه $5, 5, 8$): $\sin(\alpha)=\frac{5}{8}$ — a b

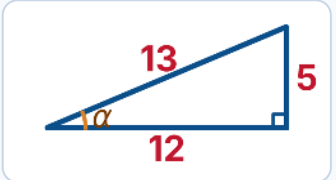


8 في مثلث قائم زاويتاه الحادتان α, γ : $\sin(\gamma)=\cos(\alpha)$ — a b

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

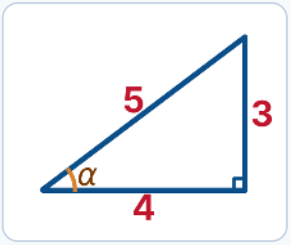
ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

1 في الشكل: $\sin(\alpha)$ تساوي:



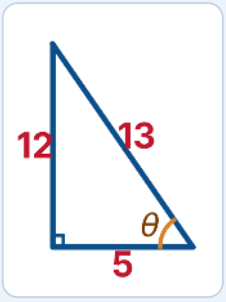
a $\frac{5}{12}$ — b $\frac{5}{13}$ — c $\frac{12}{13}$ — d $\frac{12}{5}$

2 في الشكل: قيمة $\dfrac{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)-\cos(\alpha)}$ تساوي:



a) 7 **b)** -7 c) 2 d) -1

3 في المثلث المرسوم: $\cos^2\theta+\sin^2\theta$ يساوي:



a) -1 b) 0 **c)** 1 d) $\dfrac{17}{13}$

4 قيمة $\sin(30^\circ)\cos(60^\circ)+\cos(30^\circ)\sin(60^\circ)$ تساوي:

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\dfrac{1}{2}$

5 قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم $L: y=5+\sqrt{3}\,x$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي:

a) 30° **b)** 60° c) 45° d) 135°

6 إذا كان ABC مثلثًا قائم الزاوية في B فإن قيمة $\cos(90^\circ-A)$ هي:

a) $\dfrac{BC}{AC}$ b) $\dfrac{BC}{AB}$ c) $\dfrac{AB}{BC}$ d) $\dfrac{AB}{AC}$

تعليل الإجابات

صح أو خطأ: **(1)** مقلوبان · **(2)** $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta=\frac{5}{13}$ **(3)** · $\sin C\cdot\frac{\cos C}{\sin C}=\cos C$ **(4)** ·

الصحيح $BC=(AC)\cos\left(\hat{C}\right)$ ، $AB=(AC)\sin\left(\hat{C}\right)$ · **(6)** $m=1$ · **(7)** الارتفاع يقسم القاعدة

إلى 4, 4 ، الارتفاع = 3 ، $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ · **(8)** الزاويتان α,γ متتامتان · الاختيار من متعدد: **(2)**

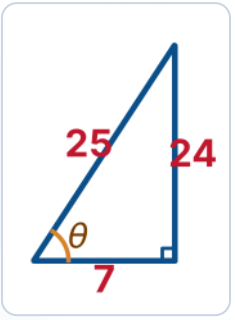
(3) · $\frac{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}}=\frac{\frac{7}{5}}{\frac{-1}{5}}=-7$ **(4)** · $\frac{25}{169}+\frac{144}{169}=1$ **(5)** · $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ **(6)** · $\tan\theta=\sqrt{3}$

$$\cos(90^\circ-A)=\sin A=\frac{BC}{AC}$$

أسئلة المقال

(1) في الشكل: أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ

الحل



$$\sin\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin\theta=\frac{24}{25}$$

$$\cos\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

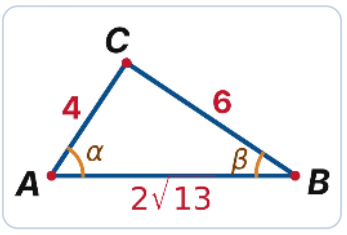
$$\cos\theta=\frac{7}{25}$$

$$\tan\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta=\frac{24}{7}$$

(2) في الشكل: ① أثبت أن المثلث ACB قائم الزاوية في C ② أوجد: $\sin(\beta)$ ، $\cos(\alpha)$ ③ ماذا تلاحظ؟

الحل



① $(AC)^2+(CB)^2=(4)^2+(6)^2=52$

$$(AB)^2=(2\sqrt{13})^2=52$$

المثلث قائم في C (عكس نظرية فيثاغورث)

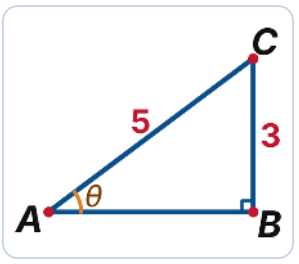
② $\cos\alpha=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}=\frac{4}{2\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\sin\beta=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}=\frac{4}{2\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$

③ $\cos\alpha=\sin\beta$ لأن α,β متتامتان

(3) في الشكل: أوجد: ① طول $\bar{AB}$ ② $\sec\theta$ ③ $\csc\theta$

الحل



① $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ (نظرية فيثاغورث)

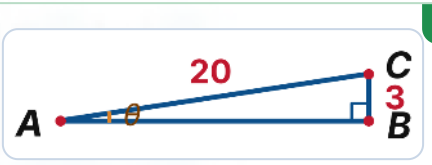
$AB = \sqrt{25-9} = 4$

② $\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{5}{4}$

③ $\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{5}{3}$

(4) في الشكل: أوجد: ① $m(\theta)$ ② AB

الحل



① $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\sin\theta = \frac{3}{20}$

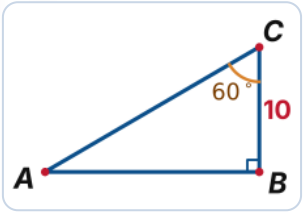
$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{20}\right) \approx 8.63^\circ = 8^\circ 37' 36.94''$

② $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ (نظرية فيثاغورث)

$AB = \sqrt{(20)^2 - (3)^2} = \sqrt{391} \approx 19.77$

(5) في الشكل: $\triangle ABC$ قائم في B ، أوجد: ① $m\left(\hat{A}\right)$ ② طول $\bar{AC}$ ③ طول $\bar{AB}$

الحل



① $m\left(\hat{A}\right) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

② $\cos 60^\circ = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{10}{AC}$

$AC = \frac{10}{\cos 60^\circ} = 20$

③ $\tan 60^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{10}$

$AB = 10\tan 60^\circ = 10\sqrt{3}$

(6) منحدر التزلج المائي يشكل زاوية مع سطح الماء قياسها 15° وأعلى نقطة على المنحدر على ارتفاع يساوي $1.524\,m$ ، ما طول منحدر التزلج المائي؟

الحل

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$
$$\sin 15^\circ = \frac{1.524}{L}$$
$$L = \frac{1.524}{\sin 15^\circ}$$
$$L \approx 5.89\,m$$

(7) أوجد قيمة:
$\cos(45^\circ)\cos(45^\circ) - \sin(45^\circ)\sin(45^\circ)$

الحل

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$
$$= 0$$

(8) أوجد قيمة: $\sec^2(45^\circ) + \tan(45^\circ) + \sin(30^\circ)$

الحل

$$= (\sqrt{2})^2 + 1 + \frac{1}{2}$$
$$= 2 + 1 + \frac{1}{2}$$
$$= 3.5$$

(9) سلم كهربائي متحرك موجود في إحدى محطات مترو الأنفاق ، إذا كان ارتفاع قمة السلم عن قاعدته $6.3\,m$ وكان يميل على الأفق بزاوية قياسها 26° ، أوجد طول السلم الكهربائي.

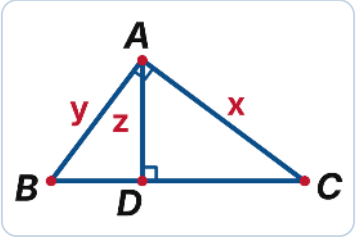
الحل

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$
$$\sin 26^\circ = \frac{6.3}{L}$$
$$L = \frac{6.3}{\sin 26^\circ}$$
$$L \approx 14.37\,m$$

مهارات تفكير عليا

(1) في الشكل: مثلث قائم ضلعا القائمة x, y والارتفاع على الوتر z ، استخدم النسب المثلثية لإثبات أن: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}$

الحل



لتكن θ الزاوية المحصورة بين y والوتر:

$$\sin\theta=\frac{z}{y}$$

والزاوية الحادة الأخرى: $90^\circ-\theta$: $\cos\theta=\frac{z}{x}$

$$\frac{1}{y^2}=\frac{\sin^2\theta}{z^2}$$
$$\frac{1}{x^2}=\frac{\cos^2\theta}{z^2}$$
$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{z^2}$$
$$\checkmark\ =\frac{1}{z^2}$$

(2) إذا كان ACB مثلثًا قائم الزاوية أطوال أضلاعه a , $a+7$, $a+8$ حيث $a\geq 5$ ، أوجد قياس أكبر زواياه الحادة.

الحل

(نظرية فيثاغورث) $a^2+(a+7)^2=(a+8)^2$

$$a^2+a^2+14a+49=a^2+16a+64$$
$$a^2-2a-15=0$$
$$(a-5)(a+3)=0$$

$a=5$ (لأن $a\geq 5$)

الأضلاع: $5, 12, 13$

أكبر زاوية حادة تقابل الضلع 12 :

$$\sin\theta=\frac{12}{13}$$
$$\theta\approx 67.38^\circ=67^\circ 22'48.49''$$

(3) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد: $\tan(15^\circ)$

الحل

نرسم مثلثًا قائمًا ABC فيه $m(\hat{B})=90^\circ$ و $m(\hat{A})=30^\circ$ ،

$$BC=1\ ,\ AB=\sqrt{3}\ ,\ AC=2$$

نمد $\overrightarrow{BA}$ إلى D بحيث $AD=AC=2$

المثلث ACD متطابق الضلعين ←

$$m(\hat{D})=\frac{30^\circ}{2}=15^\circ$$

في المثلث DBC : $\tan 15^\circ=\frac{BC}{DB}$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$
$$=2-\sqrt{3}$$

خلاصة البند (1-3) النسب المثلثية للزوايا الخاصة:

الحل

الزاوية	sin	cos	tan	csc	sec	cot
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

🌟 أحسنت! 👏

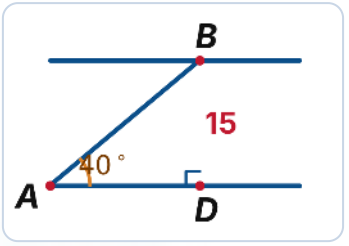
البند (2-3): حل المثلث القائم — Solving Right Triangle

فكرة الدرس
حل المثلث بإيجاد: • قياسات زوايا المثلث القائم • أطوال أضلاع المثلث القائم

تعلمنا فيما سبق · المصطلحات
النسب المثلثية الأساسية ومقلوباتها · حل المثلث **Solving Triangles**

مسألة الدرس حاول أحد السباحين في منطقة الخيران الانتقال من النقطة A إلى النقطة B كما في الشكل ، حيث جرفه التيار (عرض المجرى $15\,m$ والزاوية 40°). ما المسافة التي قطعها السباح؟

الحل



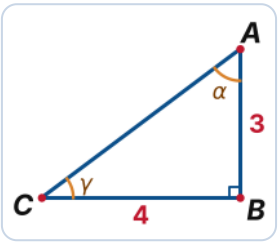
$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$
$$\sin(40^\circ) = \frac{15}{AB}$$
$$AB = \frac{15}{\sin(40^\circ)}$$
$$AB \approx 23.336$$
قطع حوالي 23 مترًا

حل المثلث القائم الزاوية

حل المثلث ⋆
نعلم أن للمثلث ستة عناصر وهي ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا ، والمقصود بحل المثلث هو إيجاد العناصر المجهولة من الزوايا والأضلاع. في المثلث ABC قائم الزاوية في B : الأضلاع: AC , BC , AB ، الزوايا: γ , β , α
ملحوظة: غالبًا ما نعطى ثلاثة عناصر في المثلث أحدها على الأقل طول أحد الأضلاع.

مثال (1) حل المثلث ABC القائم الزاوية في B إذا علم أن: $AB = 3\,cm$, $BC = 4\,cm$

الحل



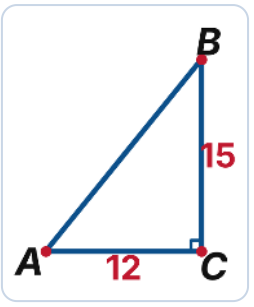
سوف نقوم بإيجاد جميع العناصر المجهولة وهي:
AC , α , γ
$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ (نظرية فيثاغورث)

$$AC = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$
$$AC = 5\,cm$$
$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$
$$\tan\gamma = \frac{3}{4}$$
$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36.87^\circ$$
(الزاويتان) $\alpha = 90^\circ - 36.87^\circ = 53.13^\circ$
الحادتان في المثلث القائم متتامتان)

تحقق من فهمك (1) حل المثلث ABC القائم الزاوية في C حيث:

$$BC = 15\,cm\ ,\ AC = 12\,cm$$

الحل

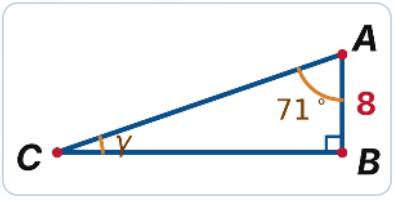


(نظرية فيثاغورث) $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

$$AB = \sqrt{(12)^2 + (15)^2} = \sqrt{369}$$
$$AB = 3\sqrt{41} \approx 19.21\,cm$$
$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$
$$\tan\left(\hat{A}\right) = \frac{BC}{AC} = \frac{15}{12}$$
$$m\left(\hat{A}\right) \approx 51.34^\circ$$
$$m\left(\hat{B}\right) = 90^\circ - 51.34^\circ = 38.66^\circ$$

مثال (2) حل المثلث ABC القائم الزاوية في B إذا علم أن: $\alpha = 71^\circ\ ,\ AB = 8\,cm$

الحل



العناصر المجهولة هي: $CA\ ,\ CB\ ,\ \gamma$

$$\gamma = 90^\circ - 71^\circ = 19^\circ$$
$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$
$$\tan(71^\circ) = \frac{CB}{AB} = \frac{CB}{8}$$
$$CB = 8\tan(71^\circ) \approx 23.23\,cm$$
$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$
$$\cos(71^\circ) = \frac{AB}{CA} = \frac{8}{CA}$$
$$CA = \frac{8}{\cos(71^\circ)} \approx 24.57\,cm$$

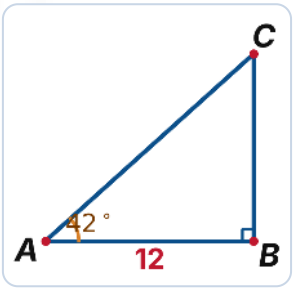
هل يمكن إيجاد طول $\bar{CA}$ بطريقة أخرى؟ نعم ، بنظرية فيثاغورث:

$$CA = \sqrt{(8)^2 + (23.23)^2} \approx 24.57\,cm$$

تحقق من فهمك (2) حل المثلث ABC القائم الزاوية في B حيث:

$$AB = 12\,cm\ ,\ m\left(\hat{A}\right) = 42^\circ$$

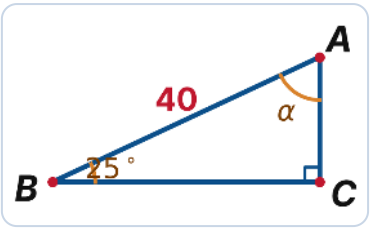
الحل



$$m\left(\hat{C}\right) = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$$
$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$
$$\tan(42^\circ) = \frac{BC}{12}$$
$$BC = 12\tan(42^\circ) \approx 10.80\,cm$$
$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$
$$\cos(42^\circ) = \frac{12}{AC}$$
$$AC = \frac{12}{\cos(42^\circ)} \approx 16.15\,cm$$

مثال (3) حل المثلث ABC القائم الزاوية في C إذا علم أن: $BA = 40\,cm\ ,\ m\left(\hat{B}\right) = 25^\circ$

الحل



العناصر المجهولة هي: $AC\ ,\ BC\ ,\ \alpha$

$$\alpha = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos(25^\circ) = \frac{BC}{40}$$

$$BC = 40\cos(25^\circ) \approx 36.25\,cm$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

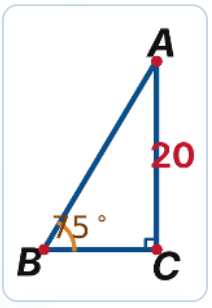
$$\sin(25^\circ) = \frac{AC}{40}$$

$$AC = 40\sin(25^\circ) \approx 16.90\,cm$$

تحقق من فهمك (3) حل المثلث ABC القائم الزاوية في C إذا عُلم أن:

$$AC = 20\,cm\ ,\ m\left(\hat{B}\right) = 75^\circ$$

الحل



$$m\left(\hat{A}\right) = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin(75^\circ) = \frac{20}{AB}$$

$$AB = \frac{20}{\sin(75^\circ)} \approx 20.71\,cm$$

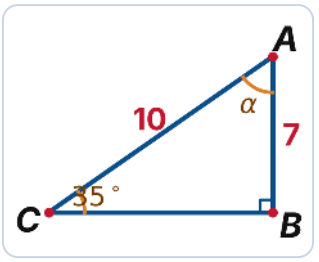
$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan(75^\circ) = \frac{20}{BC}$$

$$BC = \frac{20}{\tan(75^\circ)} \approx 5.36\,cm$$

فكّر معي في الشكل المقابل حل المثلث ABC . قام فهد وإبراهيم بالتفكير بحل السؤال. هل تؤيد تفكير فهد أم تفكير إبراهيم؟ دلل على إجابتك.

الحل



طريقة (فهد):

$$\alpha = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

$$\tan(35^\circ) = \frac{7}{BC}$$

$$BC = \frac{7}{\tan(35^\circ)} \approx 10$$

طريقة (إبراهيم): في حال وجود طولي ضلعين في المثلث القائم وزاوية يجب أولًا التأكد من صحة قياس الزاوية بمعلومية الضلعين:

$$\sin(35^\circ) = 0.5735764364$$

$$\frac{7}{10} = 0.7$$

$\therefore$ لا يمكن حل السؤال $\sin(35^\circ) \neq \frac{7}{10}$

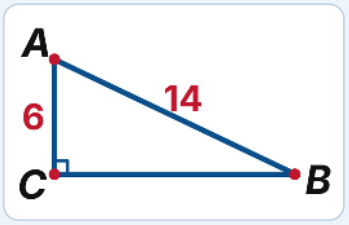
✓ أؤيد إبراهيم: لأن معطيات الشكل متناقضة ، إذا كان الوتر 10 والضلع المقابل للزاوية 35° يساوي 7 فيجب أن يكون $\sin 35^\circ = 0.7$ وهذا غير صحيح (كما أن ناتج فهد $BC \approx 10$ يساوي الوتر وهذا مستحيل) ، فالمثلث بهذه القياسات غير موجود.

أتدرّب وأحل المسائل

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

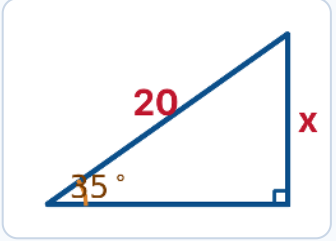
ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

1 في الشكل المرسوم ($\triangle ABC$ قائم في C): $m\left(\hat{B}\right)$ تساوي تقريبًا:



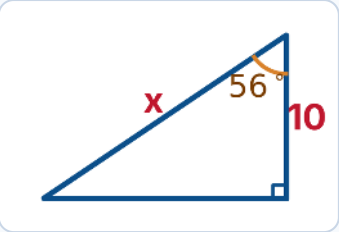
(a) 31° (b) 20° (c) 27° (d) 25°

2 في الشكل المقابل قيمة x تساوي تقريبًا:



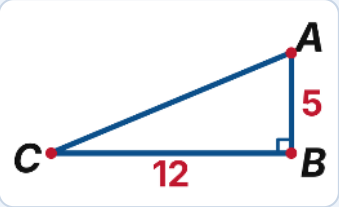
(a) 13 (b) 11.5 (c) 14 (d) 15

3 في الشكل المقابل قيمة x تساوي تقريبًا:



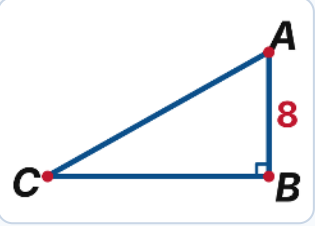
(a) 15 (b) 16 (c) 18 (d) 14

4 في الشكل المقابل ($\triangle ABC$ قائم في B): $m\left(\hat{C}\right)$ تساوي:



(a) 22.6° (b) 25° (c) 32° (d) 26.4°

5 في الشكل المقابل: ABC مثلث قائم الزاوية في B ، إذا كان $\sin\left(\hat{C}\right) = 0.4$, $AB = 8\,cm$ فإن AC يساوي:



(a) $9\,cm$ (b) $10\,cm$ (c) $12\,cm$ (d) $20\,cm$

تعليل الإجابات

(3) · $x = 20 \sin 35^\circ \approx 11.47$ **(2)** · $\sin B = \frac{6}{14} \Rightarrow B \approx 25.38^\circ$ **(1)**

$0.4 = \frac{8}{AC} \Rightarrow AC = 20$ **(5)** · $\tan C = \frac{5}{12} \Rightarrow C \approx 22.62^\circ$ **(4)** · $\cos 56^\circ = \frac{10}{x} \Rightarrow x \approx 17.88$

أسئلة المقال

(1) حل المثلث ABC القائم الزاوية في B ، إذا كان: $m\left(\hat{C}\right) = 60^\circ \ , \ AC = 15\,cm$

الحل

$$m\left(\hat{A}\right) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{AB}{15}$$

$$AB = 15\sin 60^\circ = 7.5\sqrt{3} \approx 12.99\,cm$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BC}{15}$$

$$BC = 15\cos 60^\circ = 7.5\,cm$$

(2) حل المثلث ABC القائم الزاوية في A ، إذا كان: $m\left(\hat{B}\right) = 32^\circ \ , \ CB = 12\,cm$

الحل

$$m\left(\hat{C}\right) = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin 32^\circ = \frac{AC}{12}$$

$$AC = 12\sin 32^\circ \approx 6.36\,cm$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos 32^\circ = \frac{AB}{12}$$

$$AB = 12\cos 32^\circ \approx 10.18\,cm$$

(3) حل المثلث RQP القائم الزاوية في Q ، إذا كان: $PQ = 5\,cm \ , \ QR = 12\,cm$

الحل

$$(RP)^2 = (QR)^2 + (PQ)^2 \quad \text{(نظرية فيثاغورث)}$$

$$RP = \sqrt{144 + 25} = 13\,cm$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

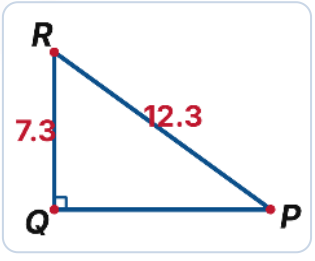
$$\tan\left(\hat{P}\right) = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$$

$$m\left(\hat{P}\right) \approx 67.38^\circ$$

$$m\left(\hat{R}\right) = 90^\circ - 67.38^\circ = 22.62^\circ$$

(4) في الشكل المقابل حل المثلث RQP

الحل



$$(RP)^2 = (RQ)^2 + (QP)^2 \quad \text{(نظرية فيثاغورث)}$$

$$QP = \sqrt{(12.3)^2 - (7.3)^2} = \sqrt{98} \approx 9.90$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

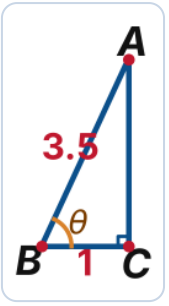
$$\sin\left(\hat{P}\right) = \frac{7.3}{12.3}$$

$$m\left(\hat{P}\right) \approx 36.41^\circ$$

$$m\left(\hat{R}\right) = 90^\circ - 36.41^\circ = 53.59^\circ$$

(5) يستند سلم $\bar{AB}$ طوله 3.5 مترًا بطرفه A على حائط عمودي وبطرفه B على الأرض أفقية ويبعد مترًا واحدًا عن الحائط ، فأوجد: ① بعد الطرف A عن الأرض ② قياس زاوية ميل السلم على الأرض ③ قياس زاوية ميل السلم على الحائط

الحل



$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$ ①

(نظرية فيثاغورث)

$AC = \sqrt{(3.5)^2 - (1)^2} = \sqrt{11.25} \approx 3.35\,m$

$\cos\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ②

$\cos\theta = \dfrac{1}{3.5}$

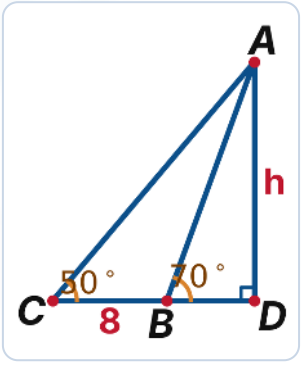
$\theta \approx 73.40^\circ$

$90^\circ - 73.40^\circ = 16.60^\circ$ ③

مهارات تفكير عليا

(1) في الشكل المقابل: أوجد مساحة المثلث ABC إلى أقرب جزء من عشرة علمًا بأن $CB = 8\,cm\ ,\ m\left(\hat{C}\right) = 50^\circ\ ,\ m\left(A\hat{B}D\right) = 70^\circ$

الحل



نفرض $AD = h$ (الارتفاع)

$\tan 70^\circ = \dfrac{h}{BD}$

$BD = \dfrac{h}{\tan 70^\circ}$

$\tan 50^\circ = \dfrac{h}{CD}$

$CD = \dfrac{h}{\tan 50^\circ}$

$CD - BD = CB = 8$

$h\left(\dfrac{1}{\tan 50^\circ} - \dfrac{1}{\tan 70^\circ}\right) = 8$

$h = \dfrac{8}{\dfrac{1}{\tan 50^\circ} - \dfrac{1}{\tan 70^\circ}} \approx 16.84$

المساحة $= \dfrac{1}{2} \times CB \times AD$

$= \dfrac{1}{2} \times 8 \times 16.84 \approx 67.4\,cm^2$

تحدي الأذكياء مستقيمان متقاطعان في نقطة: النقطة A تبعد $6\,cm$ عن نقطة التقاطع وتصنع قطعتها مع المستقيم $\overleftrightarrow{LM}$ زاوية 14° ، والنقطة B تبعد $3\,cm$ وتصنع قطعتها معه زاوية 28° . أيهما الأقرب إلى المستقيم $\overleftrightarrow{LM}$: النقطة A أم النقطة B ؟

الحل

البعد عن المستقيم = طول العمود = الوتر × $\sin$ الزاوية

بعد B عن المستقيم = $3 \sin 28^\circ \approx 1.41\,cm$

بعد A عن المستقيم = $6 \sin 14^\circ \approx 1.45\,cm$

∴ النقطة B هي الأقرب إلى المستقيم $\overleftrightarrow{LM}$

📋 خلاصة البند (3-2) — خطوات حل المثلث القائم

① حدّد العناصر المعلومة والمجهولة ② الزاوية الحادة المجهولة = 90° − الزاوية المعلومة ③ اختر النسبة المثلثية المناسبة أو نظرية فيثاغورث لإيجاد الأضلاع ④ تحقق من اتساق المعطيات (كما في «فكّر معي»)

🌟 أحسنت! 👏

البند (3-3): زاوية الارتفاع – زاوية الانخفاض

💡 فكرة الدرس

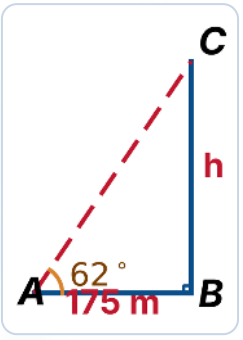
توظيف حل المثلث القائم في دراسة زاوية الارتفاع – زاوية الانخفاض.

📚 تعلمنا فيما سبق · 📝 المصطلحات

نظرية فيثاغورث – النسب المثلثية الأساسية ومقلوباتها · زاوية الارتفاع **Angle of Elevation** · زاوية الانخفاض **Angle of Depression** · 🔍 ملحوظة: يهمل طول الشخص الراصد في جميع الأسئلة.

📖 مسألة الدرس: قياس زاوية شموخ أبراج الكويت 🇰🇼 تخيل أنك تقف على شاطئ الخليج العربي ، وتحديدًا على مسافة $175\,m$ من قاعدة البرج الرئيسي (الأكبر) ، ورفعت رأسك لتنظر إلى قمة البرج ، فاستخدمت تطبيق قياس الزوايا من الهاتف ووجدت أن قياس الزاوية من مستوى الخط الأفقي وخط النظر المتجه إلى قمة البرج هي 62° . كيف نحسب ارتفاع البرج؟

الحل



$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 62^\circ = \frac{h}{175}$$

$$h = 175 \tan 62^\circ$$

$h \approx 329.13\,m$ (بإهمال طول الشخص وبحسب معطيات السؤال)

؟ ماذا لو كان شخصًا آخر في أعلى البرج ينظر إليك ، هل يوجد زاوية أخرى هناك؟

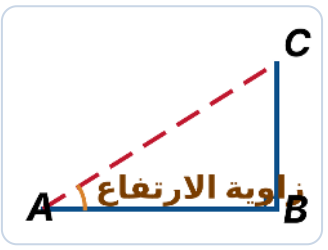
نعم ، زاوية الانخفاض وقياسها 62° أيضًا (بالتبادل)

ℹ️ معلومة: أبراج الكويت

أبراج الكويت هي من أبرز المعالم السياحية والحضارية في دولة الكويت وتتميز بتصميمها المعماري الفريد الذي يدمج بين العمارة الإسلامية التقليدية والتقنيات الحديثة ، افتُتحت رسميًا في **1** مارس **1979** ونالت الأبراج تقديرًا عالميًا وحصلت على جائزة آغا خان عام **1980** نظرًا للدمج الإبداعي بين الهندسة الحديثة والقيم الثقافية.

★ زاوية الارتفاع Angle of Elevation هي الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي وبين خط النظر المتجه إلى الأعلى نحو الشيء المراد رصده.

الحل



أمثلة حياتية: شخص ينظر إلى أعلى شجرة عالية · شخص يشاهد طائرة في السماء · شخص ينظر إلى قمة برج مرتفع.

⋆ زاوية الانخفاض Angle of Depression هي الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي وبين خط النظر المتجه إلى الأسفل نحو الشيء المراد رصده.

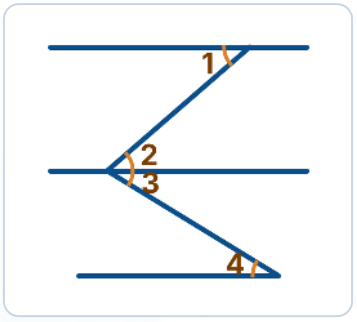
الحل



أمثلة حياتية: شخص ينظر من أعلى الدرج إلى شخص في الأسفل · شخص يقف على جبل وينظر إلى الوادي أسفله · شخص يقف على سطح مبنى وينظر إلى السيارة في الشارع.

تدرّب صنف الزوايا المبينة في الشكل (الخطوط الأفقية متوازية) من حيث كونها زاوية ارتفاع أو زاوية انخفاض.

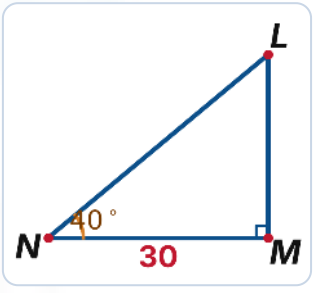
الحل



ⓐ $\hat{1}$: زاوية انخفاض
ⓑ $\hat{2}$: زاوية ارتفاع
ⓒ $\hat{3}$: زاوية انخفاض
ⓓ $\hat{4}$: زاوية ارتفاع

مثال (1) يقف أحد المشجعين في ساحة ملعب استاد جابر الأحمد الدولي ويشاهد شاشة الملعب المعلقة. إذا كانت المسافة الأفقية بينه وبين نقطة بُعد الشاشة عن الأرض $30\,m$ وكانت زاوية الارتفاع إلى أعلى الشاشة 40° . أوجد إلى أقرب متر ارتفاع الشاشة عن سطح الأرض.

الحل



نفرض أن LM هو ارتفاع الشاشة عن سطح الأرض.

نبحث عن النسبة المثلثية التي تجمع بين الضلع المعلوم (المجاور) والضلع المجهول (المقابل) للزاوية 40° :

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan(40^\circ) = \frac{LM}{MN} = \frac{LM}{30}$$

$$\leftarrow LM = 30\tan(40^\circ) \approx 25.17299$$

باستخدام الآلة الحاسبة

ارتفاع الشاشة عن سطح الأرض في تلك النقطة يساوي $25\,m$

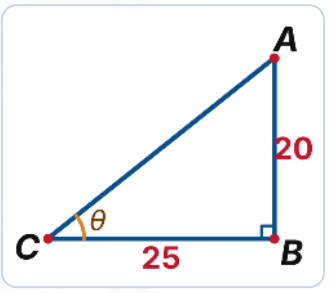
تحقق من فهمك (1) أثناء تحية العلم ينظر فهد إلى قمة سارية العلم بزاوية ارتفاع مقدارها 85° ، فإذا كان ارتفاع سارية العلم هي $5\,m$ كم يبلغ بعد فهد عن قاعدة السارية؟

الحل

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$
$$\tan 85^\circ = \frac{5}{d}$$
$$d = \frac{5}{\tan 85^\circ}$$
$$d \approx 0.44\,m$$

مثال (2) يقف زائر أمام مبنى المركز العلمي ، ويبعد $25\,m$ عن قاعدة هيكل «البوم» الخشبي الكبير. إذا كان ارتفاع قمة الشراع عن الأرض هو $20\,m$ احسب قياس زاوية الارتفاع التي يشكلها نظر الزائر إلى قمة الشراع.

الحل



لإيجاد قياس زاوية الارتفاع نستخدم النسبة المثلثية التي تجمع بين الضلعين المعلومين (المقابل والمجاور):

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$
$$\tan(\theta) = \frac{AB}{BC} = \frac{20}{25}$$
$$\theta = \tan^{-1}(0.8)$$
$$\theta \approx 38.65980825^\circ = 38^\circ 39' 35.31''$$

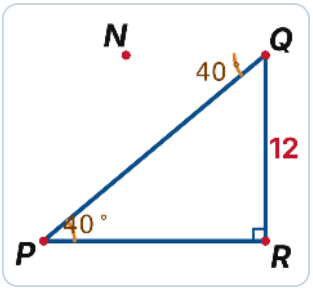
تحقق من فهمك (2) يقف شخص على مسافة $1000\,m$ من قاعدة مبنى ارتفاعه $300\,m$ ، ما قياس زاوية الارتفاع التي يكونها مع قمة المبنى؟

الحل

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$
$$\tan\theta = \frac{300}{1000} = 0.3$$
$$\theta = \tan^{-1}(0.3)$$
$$\theta \approx 16.70^\circ = 16^\circ 41' 57''$$

مثال (3) في محمية صباح الأحمد الطبيعية يقف موظف الرصد فوق برج مراقبة خشبي ارتفاعه $12\,m$ ، شاهد الموظف «أرنب عربي» يقترب من شجيرة صغيرة فوجد أن زاوية انخفاض موقع الأرنب تساوي 40° . أوجد بعد الأرنب لأقرب متر عن قاعدة برج المراقبة في تلك اللحظة.

الحل



$$m\left(N\hat{Q}P\right) = m\left(Q\hat{P}R\right) = 40^\circ$$
(بالتبادل والتوازي)

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$
$$\tan(40^\circ) = \frac{QR}{RP} = \frac{12}{RP}$$
$$RP = \frac{12}{\tan(40^\circ)} \approx 14.30104$$
يبعد الأرنب عن قاعدة البرج مسافة قدرها $14\,m$

معلومة: الأرنب العربي

الأرنب العربي أو أرنب الصحراء البري يتميز بجسم نحيل ، وهو صغير الحجم مقارنة بالأنواع الأوروبية ، يمتلك آذانًا طويلة جدًا تساعده على تبريد حرارة جسمه وتوزيعها عبر الأوعية الدموية في حر الصيف.

تحقق من فهمك (3) من أعلى برج ارتفاعه $45\,m$ عن سطح الأرض رصد شخص سيارة بزاوية انخفاض 55° ، احسب المسافة بين السيارة وقاعدة البرج لأقرب متر.

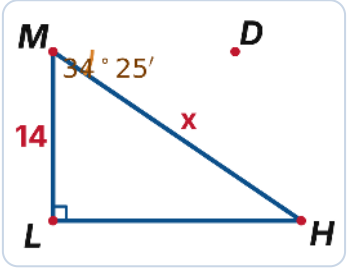
الحل

زاوية الارتفاع من السيارة = 55°
(بالتبادل والتوازي)

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$
$$\tan 55^\circ = \frac{45}{d}$$
$$d = \frac{45}{\tan 55^\circ} \approx 31.51$$
$$d \approx 32\,m$$

مثال (4) رصد قارب من قمة منارة جزيرة قاروه ارتفاعها $14\,m$ ، فوجد أن قياس زاوية انخفاضه $34^\circ 25'$. أوجد إلى أقرب متر البعد بين القارب وقمة المنارة.

الحل



$$m\left(D\hat{M}H\right) = m\left(M\hat{H}L\right) = 34^\circ 25'$$
(بالتبادل والتوازي)

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$
$$\sin(34^\circ 25') = \frac{ML}{MH} = \frac{14}{x}$$
$$x = \frac{14}{\sin(34^\circ 25')} \approx 24.76968636$$
بعد القارب عن قمة المنارة مسافة قدرها $25\,m$

تحقق من فهمك (4) قاس بحار زاوية انخفاض سفينة من أعلى نقطة على قمة منارة في جزيرة أم المرادم ارتفاعها $23\,m$ فوجد أنها 39° . أوجد بعد السفينة عن قمة المنارة لأقرب متر.

الحل

زاوية الارتفاع من السفينة = 39°

(بالتبادل والتوازي)

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin 39^\circ = \frac{23}{x}$$

$$x = \frac{23}{\sin 39^\circ} \approx 36.55$$

$$x \approx 37\,m$$

أتدرّب وأحل المسائل

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

1 من نقطة على سطح الأرض تبعد $40\,m$ عن قاعدة برج قيست زاوية ارتفاع قمة برج فكانت 63° ، فإن ارتفاع البرج لأقرب متر يساوي:

(a) $20.38\,m$ (b) $78.5\,m$ (c) $31\,m$ (d) $36\,m$

2 طائرة ورقية طول خيطها $34\,m$ وكانت زاوية ارتفاع الطائرة 70° فإن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب متر يساوي:

(a) $36.18\,m$ (b) $10\,m$ (c) $28\,m$ (d) $32\,m$

3 يسير شخص في طريق منحدر وعندما قطع الشخص مسافة $60\,m$ وصل الشخص لنقطة ارتفاعها عن سطح الأرض $6\,m$ ، فإن زاوية ارتفاع ميل الطريق على سطح الأرض يساوي تقريبًا:

(a) 5.74° (b) 89.43° (c) 7° (d) 9°

4 برج طوله $12\,m$ يلقي ظلًّا على الأرض طوله $8\,m$ فإن قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ لأقرب درجة تساوي:

(a) 33.69° (b) 51° (c) 48° (d) 56.30°

تعليل الإجابات

(1) $h = 40\tan 63^\circ \approx 78.5$ **(2)** $h = 34\sin 70^\circ \approx 31.95$ **(3)** $\sin\theta = \frac{6}{60} \Rightarrow \theta \approx 5.74^\circ$ **(4)** $\tan\theta = \frac{12}{8} \Rightarrow \theta \approx 56.31^\circ$

أسئلة المقال

(1) لقياس ارتفاع أحد المجمعات قام إبراهيم برصد قمة المجمع من خلال جهاز الرصد ، فوجد أن قياس زاوية الارتفاع 40° . إذا كان الجهاز يبعد عن قاعدة المجمع مسافة $18\,m$ احسب ارتفاع المجمع.

الحل

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$
$$\tan 40^\circ = \frac{h}{18}$$
$$h = 18\tan 40^\circ$$
$$h \approx 15.10\,m$$

(2) تحلق مروحية فوق محمية صباح الأحمد على ارتفاع $250\,m$ ، وتواكبها على الأرض سيارة من حرس المحمية ، شاهد طيار المروحية قطيعًا من الغزلان بزاوية انخفاض قياسها 48° ، ما المسافة بين المروحية والقطيع في تلك اللحظة؟ علمًا بأن السيارة تحت المروحية مباشرة.

الحل

زاوية الارتفاع من القطيع = 48° (بالتبادل والتوازي)

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$
$$\sin 48^\circ = \frac{250}{d}$$
$$d = \frac{250}{\sin 48^\circ} \approx 336.41\,m$$

(والمسافة الأفقية بين السيارة والقطيع =
$$\frac{250}{\tan 48^\circ} \approx 225.10\,m$$

(3) شخص يقف على برج ارتفاعه $60\,m$ في إحدى العمارات ، شاهد موكبًا بزاوية انخفاض قياسها 50° ، ما المسافة بين قاعدة العمارة والموكب لأقرب متر؟

الحل

زاوية الارتفاع من الموكب = 50° (بالتبادل والتوازي)

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$
$$\tan 50^\circ = \frac{60}{d}$$
$$d = \frac{60}{\tan 50^\circ} \approx 50.35$$
$$d \approx 50\,m$$

(4) من نقطة على سطح الأرض قيست زاوية ارتفاع طائرة فوجد أنها $54^\circ 12'$ ، إذا كان بعد النقطة عن موقع الطائرة $310\,m$ ، فما ارتفاع الطائرة؟

الحل

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$
$$\sin(54^\circ 12') = \frac{h}{310}$$
$$h = 310\sin(54^\circ 12')$$
$$h \approx 251.43\,m$$

(5) من نقطة على سطح الأرض تبعد $300\,m$ عن قاعدة برج عمودي وجد أن قياس زاوية ارتفاعه هي 40° . أوجد ارتفاع البرج عن سطح الأرض.

الحل

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$
$$\tan 40^\circ = \frac{h}{300}$$
$$h = 300\tan 40^\circ$$
$$h \approx 251.73\,m$$

(6) من نقطة على سطح الأرض وجد أن قياس زاوية ارتفاع طائرة ورقية $48^\circ 12'$ ، إذا كانت مربوطة بخيط مشدود طوله $18\,m$ أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب متر.

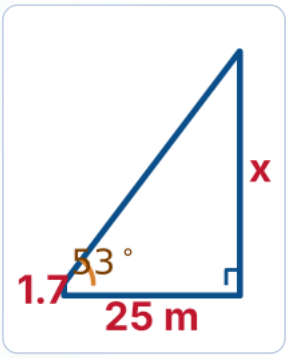
الحل

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$
$$\sin(48^\circ 12') = \frac{h}{18}$$
$$h = 18\sin(48^\circ 12') \approx 13.42$$
$$h \approx 13\,m$$

🚀 مهارات تفكير عليا

(1) في الشكل المقابل: رجل طوله $170\,cm$ يقف على بعد $25\,m$ من شجرة ويرصد قمتها بزاوية ارتفاع 53° . أوجد قيمة x مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة ثم أوجد ارتفاع الشجرة.

الحل



$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$
$$\tan 53^\circ = \frac{x}{25}$$
$$x = 25\tan 53^\circ \approx 33.2\,m$$
ارتفاع الشجرة = طول الرجل x +
$$= 33.2 + 1.7 = 34.9\,m$$

📋 خلاصة البند (3-3)

زاوية الارتفاع = زاوية الانخفاض (بالتبادل لأن الخطين الأفقيين متوازيان) ← نرسم مثلثًا قائمًا ونختار النسبة المثلثية التي تجمع المعلوم بالمجهول.

🌟 أحسنت! 👏

البند (3-4): الدوال المثلثية (الدوال الدائرية)

💡 فكرة الدرس

الزاوية الموجهة – الوضع القياسي للزاوية الموجهة – القياس الموجب والسالب للزاوية الموجهة – القياس الستيني والقياس الدائري – دائرة الوحدة – النقطة المثلثية.

📝 المصطلحات · 🧠 تذكّر

زاوية موجهة **Directed Angle** · القياس الستيني **Degree Measure** · زاوية ربعية **Quadrantal Angle** · القياس الدائري **Circular Measure** · النقطة المثلثية **Translated point** · دائرة الوحدة **Unit Circle** · وضع قياسي للزاوية الموجهة **Angle in standard position** · الزاوية: هي اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة.

(a-3-4) الزاوية الموجهة Directed Angle

📖 مسألة الدرس باستخدام المثلث القائم والخواص الهندسية والنسب المثلثية أوجد: ① $\sin(45^\circ)$ ② $\cos(30^\circ)$. هل يمكن إيجاد: $\sin(90^\circ)$ ؟

الحل

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ①}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ②}$$

لا يمكن إيجاد $\sin(90^\circ)$ باستخدام المثلث القائم ، لأن المثلث القائم لا يمكن أن يحتوي على زاوية قائمة أخرى ، فالنسب المثلثية في المثلث القائم معرّفة للزوايا الحادة فقط.
وهذا يجعلنا نلجأ إلى المسار الثاني الذي يعتمد على مفهوم (دائرة الوحدة).

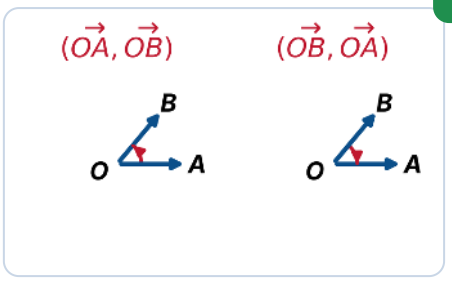
🕋 قال تعالى

﴿ وَمِنْ حَيْثُ خَرَجْتَ فَوَلِّ وَجْهَكَ شَطْرَ الْمَسْجِدِ الْحَرَامِ ۚ وَحَيْثُ مَا كُنتُمْ فَوَلُّوا وُجُوهَكُمْ شَطْرَهُ ﴾ سورة البقرة 150 · يتجه المسلمون في جميع أنحاء العالم نحو الكعبة المشرفة لأداء فريضة الصلاة. أيضًا نسمع في نشرة الأخبار عن حالة الطقس فيكون اتجاه الرياح شمالية غربية باردة أو جنوبية رطبة. نلاحظ أنه: في كل حالة من الحالات السابقة نذكر الاتجاه.

⋆ الزاوية الموجهة The Directed Angle

هي زاوية تتكون من اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية ، يسمى الشعاع الأول بالضلع الابتدائي ، ويسمى الشعاع الثاني بالضلع النهائي ، ويحدد قياسها واتجاهها بالدوران من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي.

الحل



$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$: العنصر الأول الضلع $\overrightarrow{OA}$ الابتدائي ، العنصر الثاني $\overrightarrow{OB}$ الضلع النهائي.

$\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)$: العنصر الأول الضلع $\overrightarrow{OB}$ الابتدائي ، العنصر الثاني $\overrightarrow{OA}$ الضلع النهائي.

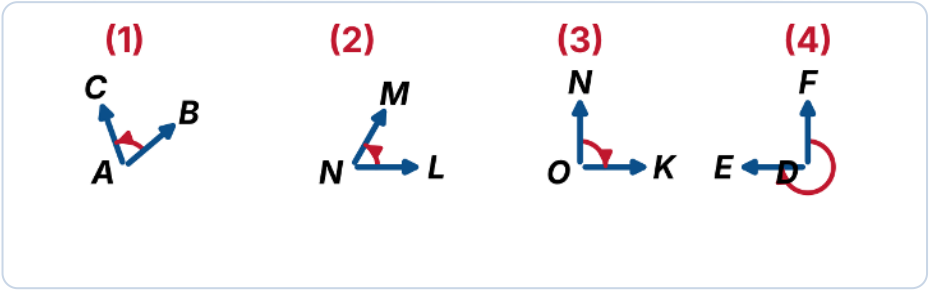
- يكون قياس الزاوية الموجهة موجبًا (Positive Measure) إذا كان اتجاه الدوران من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي عكس اتجاه عقارب الساعة.
- يكون قياس الزاوية الموجهة سالبًا (Negative Measure) إذا كان اتجاه الدوران من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي مع اتجاه عقارب الساعة.

هل ؟ $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ ؟ لا ؛

لأن الزوج مرتب: الضلع الابتدائي في الأولى $\overrightarrow{OB}$ وفي الثانية $\overrightarrow{OA}$ ، فاتجاه الدوران مختلف وقياس إحداهما موجب والأخرى سالب.

تدرّب: أكمل الجدول التالي

الحل



	الشكل (1)	الشكل (2)	الشكل (3)	الشكل (4)
الضلع الابتدائي	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{NL}$	$\overrightarrow{ON}$	$\overrightarrow{DF}$
الضلع النهائي	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{NM}$	$\overrightarrow{OK}$	$\overrightarrow{DE}$
الزوج المرتب	$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$	$\left(\overrightarrow{NL}, \overrightarrow{NM}\right)$	$\left(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OK}\right)$	$\left(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DE}\right)$
اتجاه الدوران	عكس عقارب الساعة	عكس عقارب الساعة	مع عقارب الساعة	مع عقارب الساعة
قياس الزاوية	70°	60°	-90°	-270°
القياس الآخر للزاوية	-290°	-300°	270°	90°

📌 نلاحظ أنه

$|x^+| + |x^-| = 360^\circ$ أي: | القياس الموجب للزاوية الموجهة x | + | القياس السالب للزاوية الموجهة x |

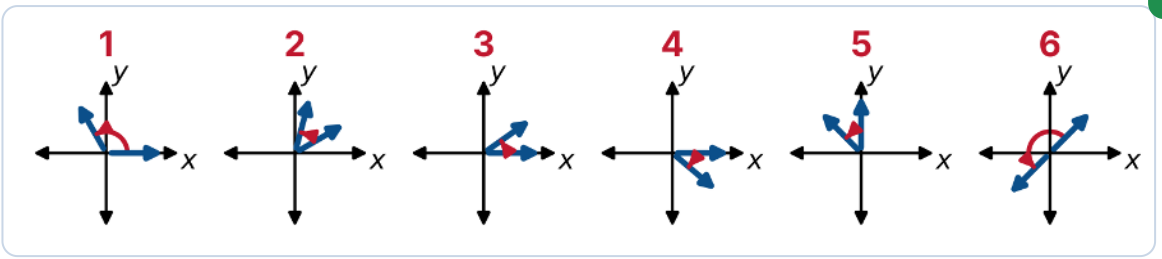
$0^\circ \le x < 360^\circ$ حيث $= 360^\circ$ ℹ️ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوي

⋆ الزاوية الموجهة في الوضع القياسي

هي زاوية رأسها نقطة الأصل وضلعها الابتدائي منطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

تدرّب في الأشكال من (1-6) حدّد أي من الزوايا الموجهة في وضع قياسي مع ذكر السبب.

الحل



(1) في وضع قياسي: رأسها O والضلع الابتدائي $\overrightarrow{OA}$ على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(2) ليست في وضع قياسي: الضلع الابتدائي $\overrightarrow{OA}$ لا ينطبق على محور السينات.

(3) في وضع قياسي: رأسها O والضلع الابتدائي على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(4) في وضع قياسي (قياسها سالب): رأسها O والضلع الابتدائي $\overrightarrow{OA}$ على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(5) ليست في وضع قياسي: الضلع الابتدائي $\overrightarrow{OA}$ على محور الصادات.

(6) ليست في وضع قياسي: الضلع الابتدائي $\overrightarrow{OA}$ لا ينطبق على محور السينات.

📌 الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة

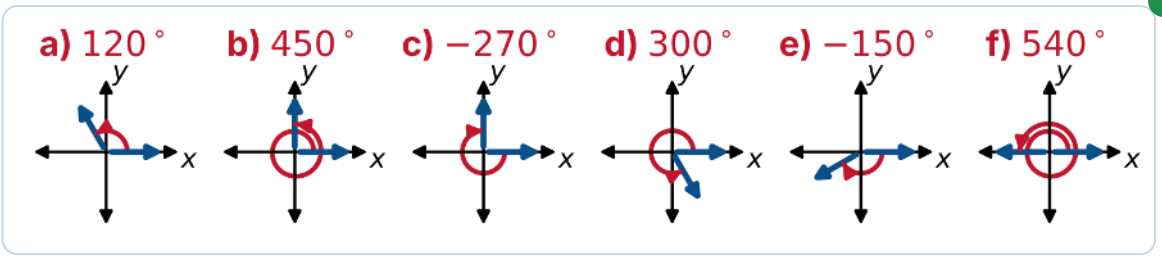
إذا رسمت الزاوية الموجهة في الوضع القياسي ، بحيث لا يقع ضلعها النهائي على أحد محاور الإحداثيات ، فإن وضع ضلعها النهائي يحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة: الربع الأول $0^\circ < x < 90^\circ$ ، الربع الثاني $90^\circ < x < 180^\circ$ ، الربع الثالث $180^\circ < x < 270^\circ$ ، الربع الرابع $270^\circ < x < 360^\circ$

⋆ الزاوية الربعية **Quadrantal Angle:** هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات ، مثل: 360° , 270° , 180° , 90°

ℹ️ معلومة: لتحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة يجب إيجاد أصغر قياس موجب للزاوية بإضافة دورات كاملة للزاوية أو طرح دورات كاملة للزاوية.

مثال (1) ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في الوضع القياسي التالي ، ثم حدد الزوايا الربعية منها أو حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية إن أمكن: ⓕ -150° ⓔ 300° ⓓ -270° ⓒ 450° ⓑ 120° ⓐ 540°

الحل

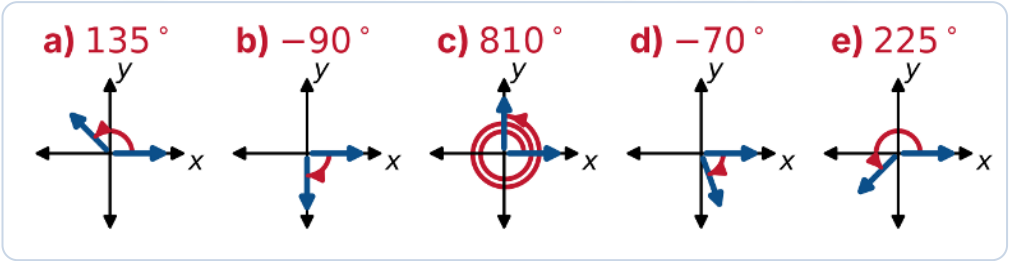


ⓐ 120° : تقع في الربع الثاني
ⓑ $450^\circ = 360^\circ + 90^\circ$: زاوية ربعية
ⓒ -270° : زاوية ربعية (تكافئ 90°)

ⓓ 300° : تقع في الربع الرابع
ⓔ -150° : تقع في الربع الثالث (تكافئ 210°)
ⓕ $540^\circ = 360^\circ + 180^\circ$: زاوية ربعية

تحقق من فهمك (1) ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في الوضع القياسي التالي ، ثم حدد الزوايا الربعية منها أو حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية إن أمكن: ⓔ -70° ⓓ 810° ⓒ -90° ⓑ 135° ⓐ 225°

الحل



ⓐ 135° : تقع في الربع الثاني
ⓑ -90° : زاوية ربعية
ⓒ $810^\circ = 2(360^\circ) + 90^\circ$: زاوية ربعية

ⓓ -70° : تقع في الربع الرابع (تكافئ 290°)
ⓔ 225° : تقع في الربع الثالث

(b-3-4) القياس الستيني – القياس الدائري Degree Measure – Circular Measure

أولًا: القياس الستيني

يوجد أنظمة مختلفة لقياس الزاوية منها القياس الستيني – القياس الدائري. في هذا القياس تقسم الزاوية التي تمثل دورة كاملة إلى 360 قسمًا متساويًا ، قياس كل منها يسمى درجة ، وقد اتخذت هذه الدرجة وحدة لقياس الزوايا ويرمز لها بالرمز $(^\circ)$ ، فمثلًا قياس الزاوية القائمة يساوي 90° وقياس الزاوية المستقيمة يساوي 180° . أجزاء الدرجة: 1° (درجة واحدة) = $60'$ (دقيقة) ، $1'$ (دقيقة واحدة) = $60''$ (ثانية)

الزاوية المركزية في دائرة

هي زاوية يقع رأسها على مركز الدائرة (O) وضلعاها يحمل نصفي قطر في الدائرة. إذا كانت θ_1, θ_2 زاويتين مركزيتين تحصران القوسين $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ فإن: ① $m\left(\overset{\frown}{AB}\right) = m(\theta_1)$, $m\left(\overset{\frown}{CD}\right) = m(\theta_2)$ ②

$$\frac{m(\theta_1)}{m(\theta_2)} = \frac{L\left(\overset{\frown}{AB}\right)}{L\left(\overset{\frown}{CD}\right)} \quad \text{(النسبة بين طولي القوسين)}$$

ℹ️ في الدائرة الواحدة النسبة بين قياسات الزوايا المركزية تساوي النسبة بين أطوال الأقواس المقابلة لها. – قياس القوس هو قياس الزاوية المركزية التي تحصر هذا القوس في الدائرة ويقاس بالدرجات أو الراديان. – طول القوس هو المسافة الواقعة على محيط القوس.

ثانيًا: القياس الدائري «التقدير الدائري»

ارسم دوائر متحدة المركز (مركزها O) بحيث يكون: طول نصف قطر الدائرة الصغرى وحدة واحدة ، والثانية ثلاث وحدات ، والثالثة أربع وحدات. إذا كان طول القوس في كل دائرة يساوي طول نصف قطرها فإن:

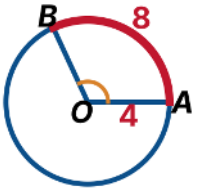
$$\frac{L\left(\overset{\frown}{AE}\right)}{r_1} = \frac{L\left(\overset{\frown}{BD}\right)}{r_2} = \frac{L\left(\overset{\frown}{CG}\right)}{r_3}$$ = نسبة ثابتة ، هذه النسبة تساوي (Radian 1) وهي وحدة القياس الدائري.

📌 استنتاج العلاقة بين طول نصف قطر الدائرة وطول القوس والزاوية المركزية بالقياس الدائري:

$\frac{\theta_1}{\theta} = \frac{L_1}{L} \Rightarrow \frac{1}{\theta} = \frac{r}{L} \Rightarrow L = r \cdot \theta$ حيث L : طول القوس المقابل للزاوية θ ، r : طول نصف قطر الدائرة ، θ : الزاوية المركزية بالراديان. يجب مراعاة: L, r لهما نفس وحدات قياس الطول ، والزاوية θ بالقياس الدائري.

مثال (2) في الشكل المقابل: أوجد قياس الزاوية المركزية $A\hat{O}B$ بالتقدير الدائري إذا كان طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ يساوي 8 وحدة طول وطول نصف القطر يساوي 4 وحدة طول.

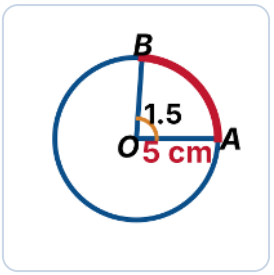
الحل



$$L = r \cdot \theta$$
$$\theta = \frac{L}{r}$$
$$\theta = \frac{8}{4} = 2$$
$$m\left(A\hat{O}B\right) = 2\,rad \therefore$$

تحقق من فهمك (2) في الشكل المقابل: إذا كان قياس الزاوية المركزية $B\hat{O}A$ يساوي $1.5\,rad$ ، أوجد طول القوس $\overset{\frown}{AB}$

الحل



$$L = r \cdot \theta$$
$$L = 5 \times 1.5$$
$$L = 7.5\,cm$$

استكشف: العلاقة بين القياس الدائري والقياس الستيني للزاوية إذا كان نصف قطر الدائرة المرسومة هو r وأن الزاوية المركزية التي تساوي دورة واحدة تقابل قوسًا طوله يساوي محيط الدائرة ويساوي $2\pi r$

الحل

$$L = r \cdot \theta$$
$$2\pi r = r \cdot \theta$$
$$\theta = 2\pi$$

ونحن نعلم بأن الدورة الواحدة عكس عقارب الساعة تساوي 360°

$\therefore 360^\circ = 2\pi\ radian$

$$180^\circ = \pi\ radian$$

بالقسمة على 180 : $1^\circ = \frac{\pi}{180}\ radian$

بالقسمة على π : $1\ radian = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ$

ومن خواص التناسب نستطيع القول إن: $\frac{x^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi}$

معلومة

توجد وحدة أخرى لقياس الزاوية وهي الجراد (Grade) وتساوي $\frac{1}{200}$ من قياس الزاوية المستقيمة ، وعلى هذا فإنه إذا كانت $\theta = x^\circ = G$ هي قياسات ثلاث زوايا على التوالي بوحدات راديان ، درجة ، الجراد فإن:

$$\frac{Grad}{200} = \frac{Degree}{180^\circ} = \frac{Radian}{\pi}$$

مثال (3) أوجد القياس الدائري للزاوية التي قياسها 120°

الحل

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{x^\circ}{180^\circ}$$
$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{120^\circ}{180^\circ}$$
$$\theta = \frac{120^\circ}{180^\circ}\pi$$
$$\theta = \frac{2}{3}\pi$$

تحقق من فهمك (3) أوجد القياس الدائري للزاوية التي قياسها: ⓑ 330° ⓐ 60°

الحل

ⓐ
$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{x^\circ}{180^\circ}$$
$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{60^\circ}{180^\circ}$$
$$\theta = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi$$
$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

ⓑ
$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{x^\circ}{180^\circ}$$
$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{330^\circ}{180^\circ}$$
$$\theta = \frac{330^\circ}{180^\circ}\pi$$
$$\theta = \frac{11\pi}{6}$$

مثال (4) أوجد القياس الستيني لكل مما يلي: ⓑ $\frac{3\pi}{4}$ ⓐ $2\,rad$

الحل

ⓐ
$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{x^\circ}{180^\circ}$$
$$\frac{\frac{3\pi}{4}}{\pi} = \frac{x^\circ}{180^\circ}$$
$$x^\circ = \frac{3}{4} \times 180^\circ$$
$$x^\circ = 135^\circ$$

ⓑ
$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{x^\circ}{180^\circ}$$
$$\frac{2}{\pi} = \frac{x^\circ}{180^\circ}$$
$$x^\circ = \frac{2}{\pi} \times 180^\circ = \frac{360^\circ}{\pi}$$
$$x^\circ \approx 114.59^\circ$$

تحقق من فهمك (4) أوجد القياس الستيني للزاوية التي قياسها: ⓒ $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ⓑ $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ⓐ $1.6\,rad$

الحل

$$x^\circ = \frac{\theta}{\pi} \times 180^\circ$$

ⓐ
$$x^\circ = \frac{3}{4} \times 180^\circ = 135^\circ$$

ⓑ
$$x^\circ = \frac{4}{3} \times 180^\circ = 240^\circ$$

ⓒ
$$x^\circ = \frac{1.6 \times 180^\circ}{\pi} = \frac{288^\circ}{\pi} \approx 91.67^\circ$$

(c-3-4) دائرة الوحدة Unit Circle

🔦 استكشف

في دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة ، إحداثيات النقاط: $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$. دائرة الوحدة تقطع: محور السينات في النقطتين $(1,0)$, $(-1,0)$ ، ومحور الصادات في النقطتين $(0,1)$, $(0,-1)$

⋆ دائرة الوحدة **Unit Circle**: هي دائرة مركزها نقطة الأصل ، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

⋆ النقطة المثلثية **Trigonometric Point**: هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة. نلاحظ: تكون النقطة $P(x,y)$ نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2=1$ ، وسوف نستخدم الرمز θ لنرمز إلى قياس الزاوية الموجهة في الوضع القياسي.

📌 الدوال المثلثية للزاوية التي قياسها θ

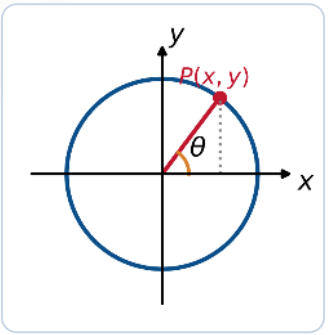
تذكر أن دائرة الوحدة هي دائرة نصف قطرها وحدة واحدة ومركزها نقطة الأصل وحيث أن محيط الدائرة هو $2\pi r$ وحيث أن $r=1$ ∴ محيط الدائرة = (طول القوس L) = 2π وهو يمثل دورة واحدة ، وهذا النقاش يمهد لتعريف الدوال المثلثية من خلال دائرة الوحدة. نفرض أننا تحركنا على محيط الدائرة من النقطة $A(1,0)$ في عكس حركة عقارب الساعة إلى $P(x,y)$ ، إذا فرضنا أن كل نقطة على القوس $\left(\overset{\frown}{AP}\right)$ يكون لها مسقط على محور السينات ، فهناك تناظرًا بين كل عدد والنقطة المثلثية $P(x,y)$ والتي تعبر أيضًا عن الزاوية θ الموجهة في الوضع القياسي ، فالإحداثي السيني للنقطة المثلثية يمثله $\cos\theta$ أي أن: $f:\ f(\theta)=\cos\theta$ ، وإذا تخيلنا أن النقطة $P(x,y)$ تتحرك على الدائرة دورة كاملة فإن مسقط هذه النقطة على المحور الصادي يمثل $\sin\theta$ أي أن $f:\ f(\theta)=\sin\theta$

ومن دائرة الوحدة يكون: **(1)** مجال $f(\theta)=\sin\theta$ هو $\mathbb{R}$ **(2)** مدى $f(\theta)=\sin\theta$ هو $[-1,1]$ **(3)** $|\sin\theta|\le 1$ (وكذلك $\cos\theta$) . وحيث أن الدالة $f(\theta)=\tan\theta$ تكون غير معرفة عندما ... $\theta=\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}$

(1) مجال $f(\theta)=\tan\theta$ هو $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$ حيث n عدد فردي $n\in\mathbb{Z}$ **(2)** مدى $\tan\theta$ هو $\mathbb{R}$

⋆ النقطة المثلثية $(x,y)=(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$ بفرض أن زاوية موجهة في الوضع القياسي θ ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P(x,y)$ ، في المثلث القائم الزاوية المظلل:

الحل



$$\cos\theta=\frac{x}{1}=x$$
$$\cos\theta=x$$

$$\sin\theta=\frac{y}{1}=y$$
$$\sin\theta=y$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ \therefore\ x^2+y^2=1\ \because$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}:\ x\neq 0$$
$$\csc\theta=\frac{1}{y}\ ,\ y\neq 0$$
$$\sec\theta=\frac{1}{x}\ ,\ x\neq 0$$
$$\cot\theta=\frac{x}{y}\ ,\ y\neq 0$$

📌 إشارة كل من دالة الجيب sine ودالة جيب التمام cosine

اعتبر الزاوية الموجهة $A\hat{O}P$ والمرسومة في الوضع القياسي والتي قياسها θ حيث $P(x, y)$ هي النقطة المثلثية للزاوية $A\hat{O}P$:

الربع	الفترة	cos	sin	tan
① الأول	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	موجبة	موجبة	موجبة
② الثاني	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	سالبة	موجبة	سالبة
③ الثالث	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	سالبة	سالبة	موجبة
④ الرابع	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$	موجبة	سالبة	سالبة

🧩 أكمل ما يلي قيم الدوال المثلثية للزوايا الربعية والزوايا الخاصة:

الحل

x Degrees	θ Radians	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$	$\cot\theta$
0°	0	0	1	0	1	غير معرف	غير معرف
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	غير معرف	غير معرف	1	0
180°	π	0	-1	0	-1	غير معرف	غير معرف
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	غير معرف	غير معرف	-1	0
360°	2π	0	1	0	1	غير معرف	غير معرف
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

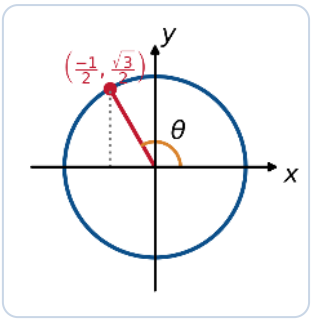
متى تكون $\sec\theta$ ، $\tan\theta$ غير معرفتين؟ ومتى تكون $\csc\theta$ ، $\cot\theta$ غير معرفتين؟

$\sec\theta$ ، $\tan\theta$ غير معرفتين عندما $\cos\theta = 0$
أي $\theta = 90^\circ$ ، 270°

$\csc\theta$ ، $\cot\theta$ غير معرفتين عندما $\sin\theta = 0$
أي $\theta = 0^\circ$ ، 180° ، 360°

مثال (5) إذا كانت النقطة $P\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ للزاوية θ في الوضع القياسي: ⓐ بيّن أن النقطة P نقطة مثلثية ⓑ أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ

الحل



ⓐ تكون النقطة P مثلثية يجب أن تحقق:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$L.H.S = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 = R.H.S$$

$\therefore$ تمثل نقطة مثلثية

ⓑ $\cos\theta = x = \frac{-1}{2}$

$$\sin\theta = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{-1}{2} = -\sqrt{3}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{x} = -2$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

تحقق من فهمك (5) إذا كانت النقطة $P\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ للزاوية θ في الوضع القياسي: ⓐ بيّن أن النقطة P نقطة مثلثية ⓑ أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ

الحل

ⓐ $x^2 + y^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{-4}{5}\right)^2$

$$= \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

$\therefore$ نقطة مثلثية

ⓑ $\cos\theta = x = \frac{3}{5}$

$$\sin\theta = y = \frac{-4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{3}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{x} = \frac{5}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{y} = \frac{-5}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4}$$

مثال (6) إذا كانت النقطة $P\left(\frac{1}{2}\ ,\ y\right)$ هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها θ أوجد: $\cos\theta\ ,\ \sin\theta$ حيث $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

الحل

$\because \left(\frac{1}{2}\ ,\ y\right)$ نقطة مثلثية $\therefore \cos\theta = x = \frac{1}{2}$

$x^2+y^2=1$

$\frac{1}{4}+y^2=1$

$y^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}$ تقع في الربع الأول $\therefore$

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

تحقق من فهمك (6) إذا كانت النقطة $P\left(x\ ,\ \frac{-1}{2}\right)$ هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها θ حيث $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ أوجد: $\sin\theta\ ,\ \cos\theta\ ,\ \tan\theta$

الحل

$\sin\theta = y = \frac{-1}{2}$

$x^2+y^2=1$

$x^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\because \theta$ تقع في الربع الثالث $\therefore x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-1}{2}\div\frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال (7) إذا كان: $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ أوجد $\tan\theta\ ,\ \cos\theta$ حيث $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

الحل

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\because \theta$ تقع في الربع الثاني $\therefore \cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\div\frac{-\sqrt{6}}{3}=\frac{-3}{\sqrt{18}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

تحقق من فهمك (7) إذا كانت: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ أوجد: $\tan x$, $\sin x$ حيث $90^\circ < x < 180^\circ$

الحل

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin^2 x = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

∵ x تقع في الربع الثاني ∴ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\tan x = -1$$

أتدرّب وأحل المسائل

صح أو خطأ (درجة لكل بند)

ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة ، و (b) إذا كانت خاطئة:

1	الزاوية الموجهة في وضعها القياسي يمكن أن ينطبق ضلعها الابتدائي على الاتجاه السالب لمحور السينات	a b
2	الزاوية 200° زاوية ربعية	a b
3	الزاوية الموجهة في وضع قياسي يمكن أن يكون قياسها سالبًا	a b
4	الزاوية الموجهة التي في وضع قياسي لها أكثر من نقطة مثلثية	a b
5	إذا كانت (x, y) نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي فإن $x > 1$	a b
6	$(-1, 0)$ نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي	a b
7	$\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي	a b
8	إذا كانت $\left(x, \frac{3}{5}\right)$ نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي تقع في الربع الثاني فإن $x = \frac{4}{5}$	a b
9	$\cos(-300^\circ) = \frac{1}{2}$	a b
10	$\sin(120^\circ) = \frac{1}{2}$	a b
11	$\tan(-150^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$	a b
12	$\sec(315^\circ) = \sqrt{2}$	a b

13 الزاوية التي قياسها $\frac{11\pi}{2}$ تقع في الربع الرابع

(a) (b)

14 الزاوية المركزية ABC قياسها (0.75) في دائرة طول قطرها $8\,cm$ ، فإن طول القوس $\overset{\frown}{AC}$ الذي تحصره هذه الزاوية يساوي $3\,cm$

(a) (b)

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

15 الزاوية التي قياسها 300° تقع في الربع:

(a) الأول (b) الثالث (c) الثاني (d) الرابع

16 الزاوية التي قياسها 730° تقع في الربع:

(a) الأول (b) الثالث (c) الثاني (d) الرابع

17 الزاوية التي تقع في الربع الثالث هي:

(a) 39° (b) 550° (c) 70° (d) 650°

18 الزاوية التي تقع في الربع الثاني هي:

(a) 200° (b) 510° (c) 560° (d) 260°

19 الزاوية التي قياسها 280° تقع في الربع:

(a) الأول (b) الثالث (c) الثاني (d) الرابع

20 النقطة المثلثية للزاوية الموجهة في الوضع القياسي يمكن أن تكون:

(a) $(0, 0)$ (b) $(3, 0)$ (c) $(-1, 1)$ (d) $(0, 1)$

21 إذا كانت $\sin\theta = 1$ فإن النقطة المثلثية للزاوية θ هي:

(a) $(1, 1)$ (b) $(3, 0)$ (c) $(0, 1)$ (d) $(-1, 1)$

22 إذا كانت $\left(x\ ,\ \frac{5}{13}\right)$ نقطة مثلثية لزاوية حادة موجهة في وضع قياسي فإن x :

(a) $\frac{12}{13}$ (b) $\frac{8}{13}$ (c) $\frac{5}{12}$ (d) $\frac{-12}{13}$

23 إذا كانت $\left(\frac{1}{2}\ ,\ y\right)$ نقطة مثلثية للزاوية θ في وضع قياسي $0^\circ < \theta < 90^\circ$ فإن y تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $-\sqrt{3}$

24 الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(a) $\frac{7\pi}{4}$ (b) 135° (c) $\frac{3\pi}{4}$ **(d)** 215°

25 الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{3}$ هي:

(a) $\frac{11\pi}{6}$ (b) 225° (c) $\frac{7\pi}{8}$ **(d)** $\frac{5\pi}{3}$

26 النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها $-\frac{1}{2}$ هي:

(a) $\sin(-330^\circ)$ **(b)** $\cos(-240^\circ)$
(c) $\cot(-1500^\circ)$ (d) $\tan(765^\circ)$

27 النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي:

(a) $\cos\frac{31\pi}{6}$ (b) $\sin\frac{-35\pi}{3}$ (c) $\tan\frac{17\pi}{6}$ (d) $\sec\frac{13\pi}{3}$

تعليل الإجابات

صح أو خطأ: **(1)** الضلع الابتدائي على الاتجاه الموجب دائمًا · **(2)** تقع في الربع الثالث · **(4)** لها نقطة مثلثية واحدة · **(5)** $-1 \le x \le 1$ · **(6)** $(-1)^2 + 0^2 = 1$ · **(7)** $\frac{1}{25} + \frac{16}{25} = \frac{17}{25} \neq 1$ · **(8)** $x = -\frac{4}{5}$ · **(9)** $\cos(-300^\circ) = \cos 60^\circ$ · **(10)** $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ · **(11)** -150° في الربع الثالث والظل موجب · **(12)** $\cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ · **(13)** $\frac{11\pi}{2} = 4\pi + \frac{3\pi}{2}$ زاوية ربعية · **(14)** $L = r \cdot \theta = 4 \times 0.75 = 3$

الاختيار من متعدد: **(2)** $730^\circ = 720^\circ + 10^\circ$ · **(3)** $550^\circ = 360^\circ + 190^\circ$ · **(4)** $510^\circ = 360^\circ + 150^\circ$

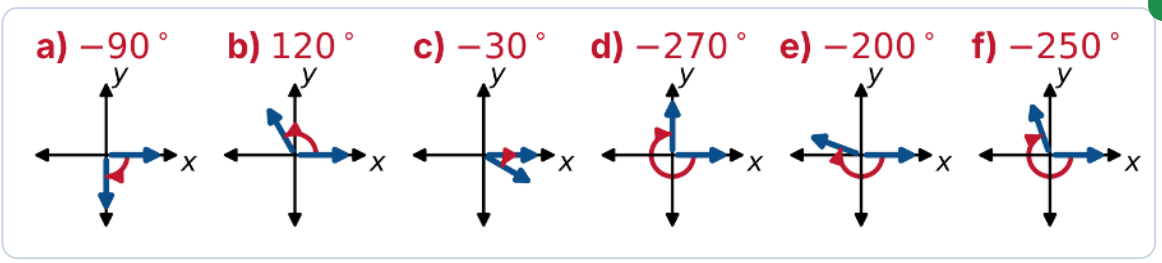
(10) زوايا الإسناد: $45^\circ, 45^\circ, 45^\circ, 35^\circ$ · **(12)** $\cos(-240^\circ) = \cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$ · **(13)**

$$\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ، } \frac{31\pi}{6} - 4\pi = \frac{7\pi}{6}$$

أسئلة المقال

(1) ارسم كل زاوية من الزوايا الموجهة التالية في الوضع القياسي مع توضيح الضلع الابتدائي والضلع النهائي مع ذكر الربع الذي تقع فيه الزاوية: ⓐ $\theta_1 = \frac{-\pi}{2}$ ⓑ $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$ ⓒ $\theta_3 = -30^\circ$ ⓓ $\theta_4 = -270^\circ$ ⓔ $\theta_5 = -200^\circ$ ⓕ $\theta_6 = -250^\circ$

الحل



ⓐ $\frac{-\pi}{2} = -90^\circ$: زاوية ربعية

ⓑ $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$: الربع الثاني

ⓒ -30° : الربع الرابع

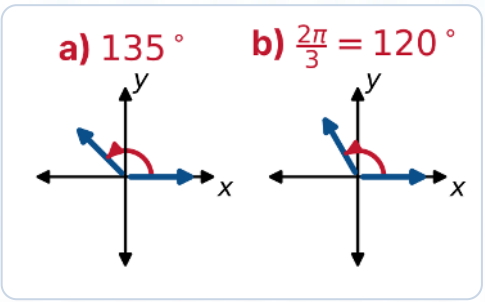
ⓓ -270° : زاوية ربعية

ⓔ -200° : الربع الثاني (تكافئ 160°)

ⓕ -250° : الربع الثاني (تكافئ 110°)

(2) ارسم كل زاوية من الزوايا الموجهة التالية في الوضع القياسي: ⓐ $\theta_1 = 135^\circ$ ⓑ $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$

الحل



(3) اكتب بالقياس الدائري كل من الزوايا التالية:

الحل

الزاوية	30°	60°	90°	40°	120°	135°	150°	240°
القياس الدائري	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$

القانون: $\theta = \frac{x^\circ}{180^\circ}\pi$

(4) اكتب بالقياس الستيني قياسات الزوايا التالية:

الحل

الزاوية	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
القياس الستيني	45°	270°	120°	135°	$\frac{540^\circ}{\pi} \approx 171.89^\circ$	$\frac{270^\circ}{\pi} \approx 85.94^\circ$	330°

القانون: $x^\circ = \frac{\theta}{\pi} \times 180^\circ$

(5) زاوية قياسها $(5\ radian)$ أوجد القياس الستيني لهذه الزاوية لأقرب دقيقة.

الحل

$$x^\circ = \frac{\theta}{\pi} \times 180^\circ$$
$$x^\circ = \frac{5 \times 180^\circ}{\pi}$$
$$x^\circ \approx 286.4789^\circ \approx 286^\circ 29'$$

(6) زاوية قياسها $58^\circ 18' 23''$ أوجد القياس الدائري لهذه الزاوية مقربًا الناتج إلى أقرب رقمين عشريين.

الحل

$$58^\circ 18' 23'' \approx 58.3064^\circ$$
$$\theta = \frac{x^\circ}{180^\circ}\pi$$
$$\theta = 58.3064 \times \frac{\pi}{180}$$
$$\theta \approx 1.02\,rad$$

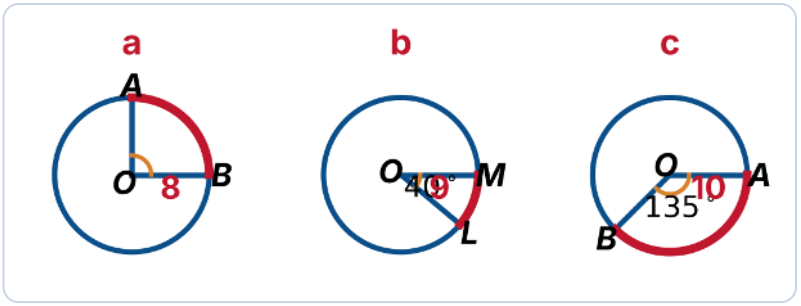
(7) أوجد القياس الدائري للزاويتين التاليتين مقربًا الناتج لأقرب جزء من مئة: ⓐ $52^\circ 16' 24''$ ⓑ $101^\circ 4' 13''$

الحل

$$\theta = \frac{x^\circ}{180^\circ}\pi$$
$$52^\circ 16' 24'' \approx 52.2733^\circ \text{ ⓐ}$$
$$\theta = 52.2733 \times \frac{\pi}{180} \approx 0.91\,rad$$
$$101^\circ 4' 13'' \approx 101.0703^\circ \text{ ⓑ}$$
$$\theta = 101.0703 \times \frac{\pi}{180} \approx 1.76\,rad$$

(8) في كل من الأشكال التالية دائرة مركزها O ، أوجد طول القوس في كل منها: ⓐ $\overset{\frown}{AB}$ (الزاوية المركزية قائمة ، $r = 8$) ⓒ ($r = 9$ ، 40°) ⓑ $\overset{\frown}{ML}$ القوس المقابل للزاوية 135° ($r = 10$)

الحل



(بالراديان θ) $L = r \cdot \theta$

$$L = 8 \times \frac{\pi}{2} = 4\pi \approx 12.57$$ ⓐ

$$L = 9 \times \frac{40\pi}{180} = 2\pi \approx 6.28$$ ⓑ

$$L = 10 \times \frac{135\pi}{180} = 7.5\pi \approx 23.56$$ ⓒ

(9) زاوية مركزية تقابل قوسًا طوله $8\,cm$ في دائرة طول نصف قطرها $6\,cm$. أوجد قياسها بالتقدير الستيني.

الحل

$$L = r \cdot \theta$$
$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}\,rad$$
$$x^\circ = \frac{4}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$
$$x^\circ \approx 76.39^\circ$$

(10) أوجد طول القوس الذي يقابل زاوية مركزية قياسها $\left(\frac{3}{4}\right) rad$ في دائرة طول نصف قطرها $10\,cm$

الحل

$$L = r \cdot \theta$$
$$L = 10 \times \frac{3}{4}$$
$$L = 7.5\,cm$$

(11) افتراض أن ذراع مساحة المياه على الزجاج الأمامي لإحدى السيارات يساوي تقريبًا $56\,cm$ وأثناء حركتها على الزجاج تصنع قوسًا يقابل زاوية قياسها 110° . أوجد طول القوس.

الحل

$$\theta = \frac{110^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{110\pi}{180}$$
$$L = r \cdot \theta$$
$$L = 56 \times \frac{110\pi}{180}$$
$$L \approx 107.51\,cm$$

(12) إذا كانت $\left(x\ ,\ \frac{-2\sqrt{6}}{5}\right)$ نقطة مثلثية للزاوية التي قياسها θ ، حيث θ تقع في الربع الثالث أوجد:

$\sin\theta\ ,\quad \cos\theta\ ,\quad \tan\theta\ ,\quad \csc\theta\ ,\quad \cot\theta$

الحل

$$x^2+y^2=1$$
$$x^2=1-\frac{24}{25}=\frac{1}{25}$$
$$x=\pm\frac{1}{5}$$

∵ θ في الربع الثالث ∴ $x=-\frac{1}{5}$

$$\sin\theta=y=\frac{-2\sqrt{6}}{5}$$
$$\cos\theta=x=-\frac{1}{5}$$
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=2\sqrt{6}$$
$$\csc\theta=\frac{1}{y}=-\frac{5}{2\sqrt{6}}=-\frac{5\sqrt{6}}{12}$$
$$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}$$

(13) إذا كانت $\left(\frac{7}{25}\ ,\ y\right)$ نقطة مثلثية للزاوية التي قياسها θ ، حيث $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ أوجد:

$\sin\theta\ ,\quad \tan\theta\ ,\quad \csc\theta\ ,\quad \cot\theta$

الحل

$$x^2+y^2=1$$
$$y^2=1-\frac{49}{625}=\frac{576}{625}$$
$$y=\pm\frac{24}{25}$$

∵ θ في الربع الأول ∴ $y=\frac{24}{25}$

$$\sin\theta=\frac{24}{25}$$
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{24}{7}$$
$$\csc\theta=\frac{1}{y}=\frac{25}{24}$$
$$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{7}{24}$$

(14) إذا كانت $\sin\theta = \frac{3}{5}$ ، حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ أوجد:
$\cos\theta$ ، $\tan\theta$ ، $\sec\theta$ ، $\csc\theta$

الحل

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$
$$\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$$
$\because \theta$ في الربع الثاني $\therefore \cos\theta = -\frac{4}{5}$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{3}{4}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{5}{4}$$
$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{5}{3}$$

(15) إذا كانت $\cos\theta = -\frac{3\sqrt{3}}{13}$ ، حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ أوجد:
$\sin\theta$ ، $\tan\theta$ ، $\cot\theta$ ، $\sec\theta$ ، $\csc\theta$

الحل

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sin^2\theta = 1 - \frac{27}{169} = \frac{142}{169}$$
$$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{142}}{13}$$
$\because \theta$ في الربع الثالث $\therefore \sin\theta = -\frac{\sqrt{142}}{13}$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{142}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{426}}{9}$$
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{142}} = \frac{3\sqrt{426}}{142}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{13}{3\sqrt{3}} = -\frac{13\sqrt{3}}{9}$$
$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = -\frac{13}{\sqrt{142}} = -\frac{13\sqrt{142}}{142}$$

مهارات تفكير عليا

(1) زاويتان مجموع قياسيهما $\frac{3\pi}{5}$ والفرق بينهما 30° ، أوجد قياسيهما بالتقدير الستيني.

الحل

$$\frac{3\pi}{5} = \frac{3}{5} \times 180^\circ = 108^\circ$$
$$x + y = 108^\circ$$
$$x - y = 30^\circ$$
بالجمع: $2x = 138^\circ$
$$x = 69^\circ$$
$$y = 108^\circ - 69^\circ = 39^\circ$$

(2) مثلث قياس إحدى زواياه $\frac{2\pi}{5}$ وقياس الزاوية الأخرى تساوي $\frac{\pi}{6}$ ، أوجد القياس الدائري للزاوية الثالثة.

الحل

مجموع قياسات زوايا المثلث = π
الزاوية الثالثة = $\pi - \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{6}$
$$= \frac{30\pi - 12\pi - 5\pi}{30}$$
$$= \frac{13\pi}{30}$$

(3) أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية التي قياسها θ في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة: ⓐ $P(x\ ,\ -x)\ ,\ x>0$ ⓑ $P(-y\ ,\ -y)\ ,\ y>0$

الحل

ⓐ $x^2+(-x)^2=1$

$2x^2=1$

$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$P\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \tan\theta=-1$

$\csc\theta=-\sqrt{2}\ ,\ \sec\theta=\sqrt{2}\ ,\ \cot\theta=-1$

ⓑ $(-y)^2+(-y)^2=1$

$2y^2=1$

$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$P\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\text{n}\ \theta=\ \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \tan\theta=\ \cot\theta=1$

$\csc\theta=\ \sec\theta=-\sqrt{2}$

📋 خلاصة البند (3-4)

الزاوية الموجهة: زوج مرتب (ضلع ابتدائي ، ضلع نهائي) ← عكس عقارب الساعة موجب ، مع عقارب الساعة سالب · **الوضع القياسي:** الرأس عند الأصل والضلع الابتدائي على الاتجاه الموجب لمحور السينات · **الزاوية الربعية:** ضلعها النهائي على أحد المحورين · $L=r\cdot\theta$ (θ بالراديان) · $180^\circ=\pi\,rad$ · $\dfrac{x^\circ}{180^\circ}=\dfrac{\theta}{\pi}$ · $1\,rad=\dfrac{180^\circ}{\pi}\approx57.3^\circ$ · **النقطة المثلثية** $(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$ **على دائرة الوحدة** ← $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ · **الإشارات:** الأول الكل موجب ، الثاني sin ، الثالث tan ، الرابع cos

🌟 أحسنت! 👏

البند (3-5): العلاقات بين الدوال المثلثية

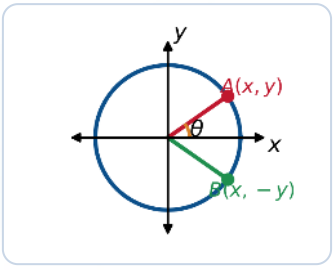
💡 فكرة الدرس
إيجاد العلاقات بين الدوال المثلثية.

📚 فيما سبق تعلمنا · 📝 المصطلحات
نقطة مثلثية – تحويلات هندسية · زاوية الإسناد **Reference Angle**

① العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta\ ,\ -\theta)$

⋆ لأي زاوية θ استكشف على دائرة الوحدة: ارسم زاوية موجهة θ في الوضع القياسي ضلعها النهائي في الربع الأول ثم اذكر إحداثي النقطة A ، وارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي $(-\theta)$ ثم اذكر إحداثي النقطة B . من هندسة الشكل: نجد أن النقطة المثلثية B هي صورة للنقطة المثلثية A بالانعكاس في محور السينات: $A(x, y) \to B(x, -y)$

الحل



$$\cos(-\theta) = \cos\theta \ ①$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \ ②$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \ ③$$

استنتج:

$$\sec(-\theta) = \sec\theta$$
$$\csc(-\theta) = -\csc\theta$$
$$\cot(-\theta) = -\cot\theta$$

ℹ️ تذكّر: إذا كانت θ تقع في الربع الأول ، فإن $-\theta$ تقع في الربع الرابع.

🏋 تدرّب: أكمل ما يلي

الحل

(1) إذا كان $\cos\theta = 0.7$ فإن $\cos(-\theta) = 0.7$

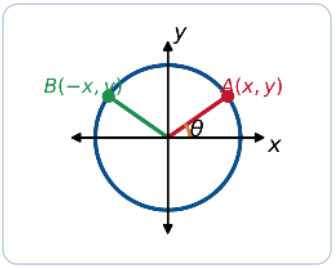
(2) إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}$ فإن $\sin(-\theta) = -\frac{3}{5}$

(3) إذا كان $\tan\theta = 3$ فإن $\tan(-\theta) = -3$

② العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta\ ,\ \pi-\theta)$

⋆ لأي زاوية θ من هندسة الشكل: نجد أن النقطة المثلثية B هي صورة للنقطة المثلثية A بالانعكاس في محور الصادات: $A(x,y)\to B(-x,y)$

الحل



$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta\ ①$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\ ②$$
$$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta\ ③$$

استنتج:

$$\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$$
$$\csc(\pi-\theta)=\csc\theta$$
$$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$$

ℹ️ **إذا كانت θ تقع في الربع الأول ، فإن $(\pi-\theta)$ تقع في الربع الثاني.**

مثال (1) **1.** اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية: ⓐ $\cos(\pi-\theta)$ ⓑ $\tan(180^\circ-x)$ ⓒ $\sin(180^\circ-x)$ **.2** إذا كان $\sec\theta=2$ أوجد $\cos(\pi-\theta)$

الحل

.1

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta\ ⓐ$$

$$\tan(180^\circ-x)=-\tan x\ ⓑ$$
$$\sin(180^\circ-x)=\sin x\ ⓒ$$

.2

$$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$
$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$
$$\cos(\pi-\theta)=-\frac{1}{2}$$

(في الربع الثاني:

$$(\sin>0\ ,\ \cos<0\ ,\ \tan<0$$

تحقق من فهمك (1) إذا كان $\sin\theta=0.2$ أوجد $\sin(\pi-\theta)$ ، إذا كان $\cos\theta=0.6$ أوجد $\cot(\pi-\theta)$ أوجد $\tan\theta=\frac{1}{3}$ إذا كان ، $\cos(\pi-\theta)$

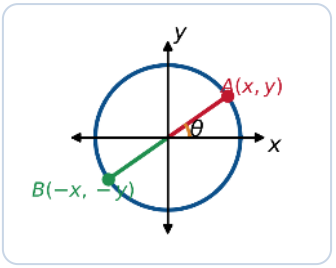
الحل

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=0.2$$
$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-0.6$$
$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=3$$
$$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta=-3$$

③ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta\ ,\ \pi+\theta)$

⋆ لأي زاوية θ من هندسة الشكل: نجد أن النقطة المثلثية B هي صورة للنقطة المثلثية A بالانعكاس في نقطة الأصل: $A(x,y)\to B(-x,-y)$

الحل



$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta\ ①$$

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta\ ②$$
$$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta\ ③$$

استنتج:

$$\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$$
$$\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$$
$$\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$$

ℹ️ **إذا كانت θ تقع في الربع الأول ، فإن $(\pi+\theta)$ تقع في الربع الثالث.**

مثال (2) ⓐ إذا كان $\tan\theta=3$ أوجد $\tan(\pi+\theta)$ ⓑ إذا كان $\cos\theta=\frac{1}{2}$ أوجد $\sec(\pi+\theta)$

ⓒ إذا كان $\sin\theta=\frac{1}{5}$ أوجد $\csc(\pi+\theta)$

الحل

$$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta=3\ ⓐ$$
$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=-\frac{1}{2}\ ⓑ$$
$$\sec(\pi+\theta)=\frac{1}{\cos(\pi+\theta)}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=-\frac{1}{5}\ ⓒ$$
$$\csc(\pi+\theta)=\frac{1}{\sin(\pi+\theta)}=\frac{1}{-\frac{1}{5}}=-5$$

تحقق من فهمك (2) ① إذا كان $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ أوجد $\sin(\pi+\theta)$ ② إذا كان $\tan\theta=3.2$ أوجد $\tan(\pi+\theta)$

③ إذا كان $\cos\theta=\frac{2}{3}$ أوجد $\sec(\pi+\theta)$

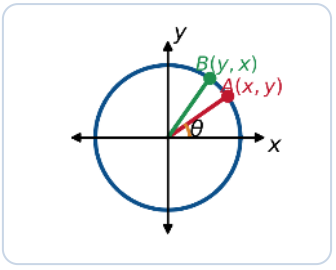
الحل

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ①$$
$$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta=3.2\ ②$$
$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=-\frac{2}{3}\ ③$$
$$\sec(\pi+\theta)=\frac{1}{\cos(\pi+\theta)}=-\frac{3}{2}$$

④ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\ ,\ \theta\right)$

★ لأي زاوية θ من هندسة الشكل: $\triangle Ox_1A \cong \triangle Oy_2B$ لماذا؟ وتراهما $OA = OB = 1$ نصفا قطر في دائرة الوحدة) والزاويتان الحادتان المتناظرتان متساويتان ، فيكون $B(y, x)$

الحل



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta \ ①$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta \ ②$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta \ ③$$

استنتج:

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \csc\theta$$
$$\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sec\theta$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta$$

ℹ️ إذا كانت θ تقع في الربع الأول ، فإن $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ تقع في الربع الأول.

مثال (3) إذا كان $\cos\theta = \frac{7}{25}$ أوجد $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ ، $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$

الحل

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2 = \frac{576}{625}$$
$$\sin\theta = \pm\frac{24}{25}$$
$$\because \theta \text{ تقع في الربع الأول} \quad \therefore \sin\theta = \frac{24}{25}$$
$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{24}{25}$$

تحقق من فهمك (3) إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$ أوجد $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ ، $\frac{\pi}{2} \le \theta < \pi$

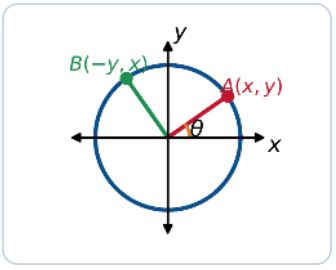
الحل

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\because \theta \text{ في الربع الثاني} \quad \therefore \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

⑤ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $\left(\frac{\pi}{2}+\theta\ ,\ \theta\right)$

★ لأي زاوية θ من هندسة الشكل: $\triangle Ox_1A \cong \triangle Oy_2B$ لماذا؟ $OA = OB = 1$ والزاويتان المتناظرتان متساويتان ، فيكون $B(-y, x)$

الحل



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta \ ①$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta \ ②$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta \ ③$$

استنتج:

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\csc\theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \sec\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\tan\theta$$

ℹ️ إذا كانت θ تقع في الربع الأول ، فإن $\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ تقع في الربع الثاني.

مثال (4) إذا كان $\tan\theta = \sqrt{3}$ أوجد $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ ، $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$

الحل

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) &= -\cot\theta \\ &= -\frac{1}{\tan\theta} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

تحقق من فهمك (4) إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{5}$ أوجد $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ ، $\frac{3\pi}{2} \le \theta < 2\pi$

الحل

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

$$\sin\theta = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$\because \theta$ في الربع الرابع $\therefore \sin\theta = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

ملخص: العلاقات بين الدوال المثلثية

الحل

الربع	cos	sin	tan
الأول $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cot\theta$
الثاني $\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$-\cot\theta$
الثاني $(\pi-\theta)$	$-\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\tan\theta$
الثالث $(\pi+\theta)$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\tan\theta$
الرابع $(-\theta)$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	$-\tan\theta$

تذكر أن: لدراسة العلاقات بين الدوال المثلثية يجب اتباع التالي: 1. تحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة في الوضع القياسي 2. تحديد الإشارة الخاصة بالدالة المثلثية خلال هذا الربع.

هل يمكن استنتاج الدوال المثلثية للزوايا $\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$ ، $\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$ ؟

$$-\theta\Big)=-\cos\theta\,,\quad \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$
$$\theta\Big)=-\cos\theta\,,\quad \tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$$

مثال (5) بسّط التعبيرات التالية: ⓐ

$$\cos(\pi-\theta)-\cos(\theta)+\sin(\pi+\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$ ⓑ

$$\sin x+\sin(90^\circ+x)+\sin(180^\circ+x)+\sin(90^\circ-x)$$ ⓒ

$$\cos(\pi+\theta)+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\theta-\pi)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

الحل

ⓐ
$$=-\cos\theta-\cos\theta+(-\sin\theta)+\sin\theta$$
$$=-2\cos\theta$$

ⓑ
$$=\sin x+\cos x+(-\sin x)+\cos x$$
$$=2\cos x$$

ⓒ
$$\sin(-(\pi-\theta))=-\sin(\pi-\theta)=-\sin\theta$$
$$=-\cos\theta+\cos\theta+(-\sin\theta)-(-\sin\theta)$$
$$=-\cos\theta+\cos\theta-\sin\theta+\sin\theta$$
$$=0$$

تحقق من فهمك (5) بسّط التعبيرات التالية:

① $\cos(\theta-\pi)-\cos(\pi-\theta)+\sin(\pi+\theta)$

② $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\theta-\pi)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\pi+\theta)$

③ $\cos(-\theta)+\cos(\pi-\theta)-\sin(\pi+\theta)$

$\cos x-\sin(90^\circ-x)+\sin(180^\circ-x)+\cos(90^\circ+x)$

الحل

① $\cos(\theta-\pi)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$=\cos\theta-\cos\theta-(-\sin\theta)+(-\sin\theta)$

$=\cos\theta-\cos\theta+\sin\theta-\sin\theta$

$=0$

② $=\cos\theta+(-\cos\theta)-(-\sin\theta)$

$=\cos\theta-\cos\theta+\sin\theta$

$=\sin\theta$

③

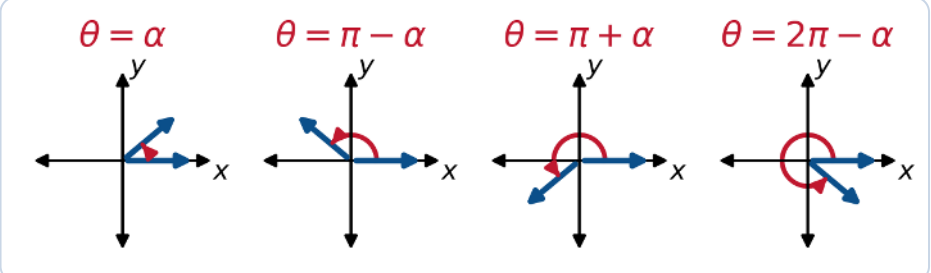
$=\cos x-\cos x+\sin x+(-\sin x)$

$=0$

⋆ زاوية الإسناد Reference Angle

⋆ زاوية الإسناد نحتاج أحيانًا إلى معرفة النسب المثلثية للزاوية θ ، θ قد تقع في أي ربع من الأرباع الأربعة ولتسهيل إيجاد القيم المثلثية للزوايا المختلفة نستخدم زاوية الإسناد. زاوية الإسناد للزاوية الموجهة θ التي في الوضع القياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات حيث $0^\circ<\alpha<90^\circ$ ، وتكون العلاقة بين الزاوية θ وزاوية الإسناد α كالتالي:

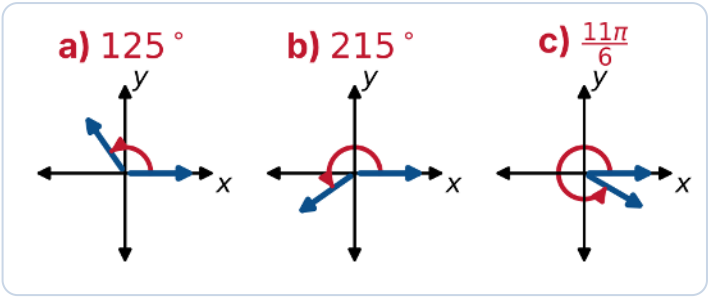
الحل



الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
$\theta=\alpha$	، $\theta=\pi-\alpha$ $x=180^\circ-\alpha$	، $\theta=\pi+\alpha$ $x=180^\circ+\alpha$	، $\theta=2\pi-\alpha$ $x=360^\circ-\alpha$

مثال (6) أوجد زاوية الإسناد للزوايا التالية: ⓒ $x = 215^\circ$ ⓑ $x = 125^\circ$ ⓐ $x = \frac{11\pi}{6}$

الحل



ⓐ الربع الثاني: $x = 180^\circ - \alpha$
$\alpha = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$
ⓑ الربع الثالث: $x = 180^\circ + \alpha$
$\alpha = 215^\circ - 180^\circ = 35^\circ$
ⓒ الربع الرابع: $\theta = 2\pi - \alpha$
$\alpha = 2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

تحقق من فهمك (6) أوجد زاوية الإسناد للزوايا التالية: ⓒ $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ⓑ $x = 215^\circ$ ⓐ $x = 300^\circ$

الحل

ⓐ الربع الثالث: $\alpha = 215^\circ - 180^\circ = 35^\circ$
ⓑ الربع الثاني: $\alpha = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$
ⓒ الربع الرابع: $\alpha = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$

مثال (7) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد: ⓒ $\cos 225^\circ$ ⓑ $\sin \frac{5\pi}{6}$ ⓐ $\tan 315^\circ$

الحل

ⓐ $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
$= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
ⓑ $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ)$
$= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
ⓒ $\tan 315^\circ = \tan(360^\circ - 45^\circ)$
$= -\tan 45^\circ = -1$

تحقق من فهمك (7) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد: ⓒ $\tan 330^\circ$ ⓑ $\sin \frac{7\pi}{6}$ ⓐ $\cos(-150^\circ)$

الحل

ⓐ $\cos(-150^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ)$
$= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
ⓑ $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$
$= -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
ⓒ $\tan 330^\circ = \tan(360^\circ - 30^\circ)$
$= -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

أتدرّب وأحل المسائل

صح أو خطأ (درجة لكل بند)

ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة ، و (b) إذا كانت خاطئة:

1. إذا كانت $\sin\theta = 0.2$ فإن $\sin(\pi+\theta) = 0.2$ — **b**
2. إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$ فإن $\sec(\pi+\theta) = \frac{3}{2}$ — **b**
3. إذا كان $\tan\theta = 3$ فإن $\cot(\pi+\theta) = 3$ — **b**
4. إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{5}$ فإن $\csc(\pi+\theta) = -5$ — **a**
5. إذا كان $\cos x = \frac{1}{2}$ فإن $x = \frac{\pi}{3}$ — **b**
6. إذا كان $x = \frac{\pi}{6}$ فإن $\sin x = \frac{1}{2}$ — **a**

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

7. الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي:
   (a) 315° (b) 60° (c) 45° (d) 135°

8. الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة المثلثية $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:
   (a) 45° (b) 225° (c) 135° (d) 330°

9. إذا كانت $\cos x$ سالبة و $\sin x$ موجبة ، فإن الضلع النهائي للزاوية x يقع في الربع:
   (a) الأول (b) الثاني (c) الثالث (d) الرابع

تعليل الإجابات

صح أو خطأ: **(1)** $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta = -0.2$ **(2)** · $\sec(\pi+\theta) = -\sec\theta = -\frac{3}{2}$ **(3)** · $\cot(\pi+\theta) = \cot\theta = \frac{1}{3}$ **(4)** · $\csc(\pi+\theta) = -\csc\theta = -5$ **(5)** ليس بالضرورة: قد تكون $x = \frac{5\pi}{3}$ أيضًا · الاختيار: **(1)** زوايا الإسناد $45^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ **(2)** · $\cos < 0$ و $\sin > 0$ ← الربع الثاني وزاوية الإسناد 45° · **(3)** الربع الثاني

أسئلة المقال

(1) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة:

الحل

البند	النسبة	الحل	القيمة
ⓐ	$\sin 150^\circ$	$\sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$	$\frac{1}{2}$
ⓑ	$\tan(-225^\circ)$	$-\tan 225^\circ = -\tan(180^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ$	-1
ⓒ	$\cos(-135^\circ)$	$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
ⓓ	$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$	$\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
ⓔ	$\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$	$-\sin\frac{2\pi}{3} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
ⓕ	$\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)$	$\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
ⓖ	$\sin 330^\circ$	$\sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ$	$-\frac{1}{2}$
ⓗ	$\csc 135^\circ$	$\frac{1}{\sin 135^\circ} = \frac{1}{\sin 45^\circ}$	$\sqrt{2}$
ⓘ	$\sec\left(\frac{7\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}$	$\sqrt{2}$

(2) بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة: ⓐ

$$\cos(\pi - \theta) - \cos(-\theta) + \sin(\pi + \theta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$ ⓑ

$$\cos(\pi + \theta) + \cos\theta - \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$ ⓒ

$$\sec(\pi - \theta) - \csc\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \sin\theta$$

الحل

ⓐ
$$= -\cos\theta - \cos\theta + (-\sin\theta) + \sin\theta$$
$$= -2\cos\theta$$

ⓑ
$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$$
$$= -\cos\theta + \cos\theta - (-\cos\theta) - \cos\theta$$
$$= -\cos\theta + \cos\theta + \cos\theta - \cos\theta$$
$$= 0$$

ⓒ
$$= -\sec\theta - \sec\theta + (-\sin\theta) + \sin\theta$$
$$= -2\sec\theta$$

🚀 مهارات تفكير عليا

(1) أثبت صحة المتطابقة: ⓐ $\dfrac{\sin^2(-\theta)-\cos^2(-\theta)}{\sin(-\theta)-\cos(-\theta)}=\cos\theta-\sin\theta$ ⓑ $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

الحل

ⓐ
$$L.H.S=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{-\sin\theta-\cos\theta}$$
$$=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)}{-(\sin\theta+\cos\theta)}$$
$$=-(\sin\theta-\cos\theta)$$
$$\checkmark\ =\cos\theta-\sin\theta=R.H.S$$

ⓑ بالضرب التقاطعي:
$$(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)=1-\sin^2\theta$$
$$=\cos^2\theta$$
$$\checkmark\ =\cos\theta\cdot\cos\theta$$
∴ الطرفان متساويان

🌟 أحسنت! 👏

البند (3-6): حل المعادلات المثلثية — Solving Trigonometric Equation

💡 فكرة الدرس

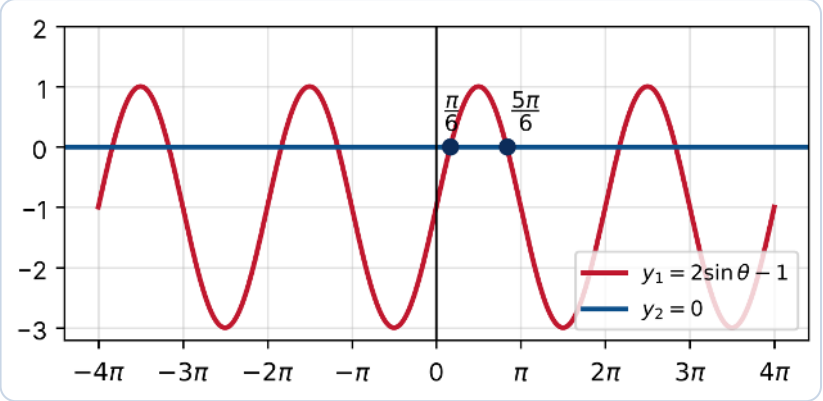
حل المعادلات المثلثية.

📚 فيما سبق تعلمنا · 📝 المصطلحات

زاوية الإسناد – تحديد إشارة الدوال المثلثية طبقًا لأي ربع · معادلة مثلثية **Trigonometric Equation**

📖 مسألة الدرس استخدم أحد البرامج الخاصة بالرسم لرسم بيان دالة كل من: $y_1 = 2\sin\theta - 1$ ، $y_2 = 0$ (محور السينات)

الحل



- المقصود بحل المعادلة المثلثية هندسيًا: هو إيجاد نقاط تقاطع منحنى الدالة $y_1 = 2\sin\theta - 1$ مع محور السينات.
- المقصود بحل المعادلة المثلثية جبريًا: هو البحث عن الأعداد الحقيقية (قيم θ) التي تجعل $2\sin\theta - 1 = 0$

في هذا البند سوف نقوم بحل المعادلة المثلثية على الصورة:
$\tan\theta = a$ ، $\cos\theta = a$ ، $\sin\theta = a$
وسوف نكتفي بحل المعادلات المثلثية خلال الفترة $[0\ ,\ 2\pi)$

🔍 ملحوظة · 🧠 تذكّر

$|\tan\theta| = |\tan\alpha|$ ، $|\cos\theta| = |\cos\alpha|$ ، $|\sin\theta| = |\sin\alpha|$

إذا كان α هي زاوية الإسناد للزاوية θ فإن: الأول $\theta = \alpha$ ، الثاني $\theta = \pi - \alpha$ ، الثالث $\theta = \pi + \alpha$ ، الرابع $\theta = 2\pi - \alpha$

مثال (1) أوجد مجموعة حل المعادلة: $2\sin\theta - 1 = 0$ حيث $\theta \in [0\ ,\ 2\pi)$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\sin\theta = a$

$$2\sin\theta - 1 = 0$$
$$2\sin\theta = 1$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2} > 0$$

(θ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\sin\alpha = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$
$$\because \sin\theta > 0 \ ③$$

θ تقع في الربع الأول

$$\theta = \alpha$$
$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

θ تقع في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \alpha$$
$$= \pi - \frac{\pi}{6}$$
$$\theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$S.S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

تحقق من فهمك (1-1) أوجد مجموعة حل المعادلة: $2\cos\theta - \sqrt{2} = 0$ حيث $\theta \in [0\ ,\ 2\pi)$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\cos\theta = a$

$$2\cos\theta - \sqrt{2} = 0$$
$$2\cos\theta = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

(θ تقع في الربع الأول أو الربع الرابع)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\cos\alpha = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$
$$\because \cos\theta > 0 \ ③$$

θ تقع في الربع الأول

$$\theta = \alpha$$
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

θ تقع في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \alpha$$
$$= 2\pi - \frac{\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$S.S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

تحقق من فهمك (2-1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2\sin\theta+\sqrt{3}=0$ حيث $\theta\in[0\ ,\ 2\pi)$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\sin\theta=a$

$$2\sin\theta+\sqrt{3}=0$$
$$2\sin\theta=-\sqrt{3}$$
$$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$$

(θ تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\sin\alpha=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\alpha=\frac{\pi}{3}$$

$\because \sin\theta<0$ ③

θ تقع في الربع الثالث	θ تقع في الربع الرابع
$\theta=\pi+\alpha$	$\theta=2\pi-\alpha$
$=\pi+\frac{\pi}{3}$	$=2\pi-\frac{\pi}{3}$
$\theta=\frac{4\pi}{3}$	$\theta=\frac{5\pi}{3}$

$$S.S=\left\{\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$$

تذكّر!

عند حل المعادلة المثلثية يجب تحويل الآلة الحاسبة إلى نظام الراديان (radian).

مثال (2)

أوجد حل المعادلة: $2\cos\theta+\sqrt{3}=0$ حيث $0\le\theta<2\pi$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\cos\theta=a$

$$2\cos\theta+\sqrt{3}=0$$
$$2\cos\theta=-\sqrt{3}$$
$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$$

(θ تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\cos\alpha=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\alpha=\frac{\pi}{6}$$

$\because \cos\theta<0$ ③

θ تقع في الربع الثاني	θ تقع في الربع الثالث
$\theta=\pi-\alpha$	$\theta=\pi+\alpha$
$=\pi-\frac{\pi}{6}$	$=\pi+\frac{\pi}{6}$
$\theta=\frac{5\pi}{6}$	$\theta=\frac{7\pi}{6}$

$$S.S=\left\{\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right\}$$

تحقق من فهمك (2) أوجد حل المعادلة: $2\cos\theta+1=0$ حيث $\theta\in[0\ ,\ 2\pi)$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\cos\theta=a$

$$2\cos\theta+1=0$$
$$2\cos\theta=-1$$
$$\cos\theta=-\frac{1}{2}<0$$

(θ تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\cos\alpha=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$
$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\alpha=\frac{\pi}{3}$$
$$\because\cos\theta<0\ ③$$

θ تقع في الربع الثاني	θ تقع في الربع الثالث
$\theta=\pi-\alpha$	$\theta=\pi+\alpha$
$=\pi-\frac{\pi}{3}$	$=\pi+\frac{\pi}{3}$
$\theta=\frac{2\pi}{3}$	$\theta=\frac{4\pi}{3}$

$$S.S=\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}$$

مثال (3) أوجد حل المعادلة: $\sqrt{2}\ \csc\theta+2=0$ حيث $0\le\theta<2\pi$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\sin\theta=a$

$$\sqrt{2}\ \csc\theta+2=0$$
$$\sqrt{2}\ \csc\theta=-2$$
$$\csc\theta=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$
$$\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}$$
$$\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}<0$$

(θ تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\sin\alpha=\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\alpha=\frac{\pi}{4}$$
$$\because\sin\theta<0\ ③$$

θ تقع في الربع الثالث	θ تقع في الربع الرابع
$\theta=\pi+\alpha$	$\theta=2\pi-\alpha$
$=\pi+\frac{\pi}{4}$	$=2\pi-\frac{\pi}{4}$
$\theta=\frac{5\pi}{4}$	$\theta=\frac{7\pi}{4}$

$$S.S=\left\{\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$$

تذكّر!

$$-1\le\sin\theta\le1\ ,\quad -1\le\cos\theta\le1$$

تحقق من فهمك (3) أوجد حل المعادلة: $\sec\theta - 2 = 0$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\cos\theta = a$

$$\sec\theta - 2 = 0$$
$$\sec\theta = 2$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2} > 0$$

(θ تقع في الربع الأول أو الربع الرابع)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\cos\alpha = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

③ $\because \cos\theta > 0$

θ تقع في الربع الأول	θ تقع في الربع الرابع
$\theta = \alpha$	$\theta = 2\pi - \alpha$
$\theta = \frac{\pi}{3}$	$= 2\pi - \frac{\pi}{3}$
	$\theta = \frac{5\pi}{3}$

$$S.S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

مثال (4) أوجد مجموعة حل المعادلة: $\tan\theta + \sqrt{3} = 0$ حيث $\theta \in [0\ ,\ 2\pi)$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\tan\theta = a$

$$\tan\theta + \sqrt{3} = 0$$
$$\tan\theta = -\sqrt{3} < 0$$

(θ تقع في الربع الثاني أو الربع الرابع)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\tan\alpha = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$
$$\alpha = \tan^{-1}(\sqrt{3})$$
$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

③ $\because \tan\theta < 0$

θ تقع في الربع الثاني	θ تقع في الربع الرابع
$\theta = \pi - \alpha$	$\theta = 2\pi - \alpha$
$= \pi - \frac{\pi}{3}$	$= 2\pi - \frac{\pi}{3}$
$\theta = \frac{2\pi}{3}$	$\theta = \frac{5\pi}{3}$

$$S.S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

تحقق من فهمك (1-4) أوجد مجموعة حل المعادلة: $\sqrt{3}\ \tan\theta + 1 = 0$ حيث $\theta \in [0\ ,\ 2\pi)$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\tan\theta = a$

$$\sqrt{3}\ \tan\theta + 1 = 0$$
$$\sqrt{3}\ \tan\theta = -1$$
$$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$$

(θ تقع في الربع الثاني أو الربع الرابع)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\tan\alpha = \left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

③ $\because \tan\theta < 0$

θ تقع في الربع الثاني	θ تقع في الربع الرابع
$\theta = \pi - \alpha$	$\theta = 2\pi - \alpha$
$= \pi - \frac{\pi}{6}$	$= 2\pi - \frac{\pi}{6}$
$\theta = \frac{5\pi}{6}$	$\theta = \frac{11\pi}{6}$

$$S.S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

تحقق من فهمك (2-4)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $\cot\theta - 1 = 0$ حيث $\theta \in [0\ ,\ 2\pi)$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\tan\theta = a$

$$\cot\theta - 1 = 0$$
$$\cot\theta = 1$$
$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$
$$\tan\theta = 1 > 0$$

(θ تقع في الربع الأول أو الربع الثالث)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\tan\alpha = |1| = 1$$
$$\alpha = \tan^{-1}(1)$$
$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

③ $\because \tan\theta > 0$

θ تقع في الربع الأول	θ تقع في الربع الثالث
$\theta = \alpha$	$\theta = \pi + \alpha$
$\theta = \frac{\pi}{4}$	$= \pi + \frac{\pi}{4}$
	$\theta = \frac{5\pi}{4}$

$$S.S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$$

فكّر ؟

هل يمكن إيجاد حل المعادلات المثلثية التالية؟ **(1)** $\sin\theta = \frac{3}{2}$ **(2)** $\cos\theta = -3$ **(3)** $\sec\theta = 0.5$

الحل

لا يوجد حل لأي منها:

(1) $-1 \le \sin\theta \le 1$ و $\frac{3}{2} > 1$

(2) $-1 \le \cos\theta \le 1$ و $-3 < -1$

(3) $\sec\theta = 0.5$

$$\cos\theta = 2 > 1$$

$$S.S = \varnothing$$

📋 ملخص حل المعادلة المثلثية جبريًا

لإيجاد حل المعادلة المثلثية $\tan\theta = a$, $\cos\theta = a$, $\sin\theta = a$ نتبع التالي: **1.** نوجد قياس الزاوية α وهي زاوية الإسناد للزاوية θ التي تحقق أن: $\tan\alpha = |a|$, $\cos\alpha = |a|$, $\sin\alpha = |a|$ **2.** نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية θ حسب إشارة الدالة المثلثية **3.** نوجد قيمة الزاوية θ حيث العلاقة بين θ, α هي:

الربع	الأول	الثاني	الثالث
θ	$\theta = \alpha$	$\theta = \pi - \alpha$	$= \pi + \alpha$
الإشارات	$\sin > 0,\ \cos > 0,\ \tan > 0$	$\sin > 0,\ \cos < 0,\ \tan < 0$	$\cos < 0,\ \tan > 0$

أتدرّب وأحل المسائل

صح أو خطأ (درجة لكل بند)

ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة ، و (b) إذا كانت خاطئة:

1 إذا كانت $\sin x = \sqrt{3}$ فإن حل المعادلة يساوي $\varnothing$ — (a) (b)

2 إذا كانت $x = \frac{\pi}{3}$ فإن $\cos x = \frac{1}{2}$

(a) (b)

3 إذا كانت $\sin x = \frac{1}{2}$ فإن $x = \frac{\pi}{6}$

(a) (b)

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

4 إذا كانت $\frac{\pi}{2} \le \theta < \pi$ وكانت $2 \sin \theta = 1$ ، فإن قياس الزاوية θ بالقياس الستيني تساوي:

(a) 30° (b) 120° (c) 135° (d) 150°

5 إذا كانت $\pi \le \theta < 2\pi$ وكانت $2 \cos \theta - 1 = 0$ فإن قياس الزاوية θ بالقياس الستيني تساوي:

(a) 60° (b) 120° (c) 300° (d) 315°

6 حل المعادلة $\sqrt{3} \tan \theta - 1 = 0$ حيث $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ بالقياس الستيني تساوي:

(a) 30° (b) 150° (c) 240° (d) 45°

تعليل الإجابات

صح أو خطأ: **(1)** $\sqrt{3} > 1$ · **(3)** ليس بالضرورة: قد تكون $x = \frac{5\pi}{6}$ · الاختيار: **(1)** $\sin \theta = \frac{1}{2}$ في الربع الثاني ← $\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ · **(2)** $\cos \theta = \frac{1}{2}$ في الفترة $[\pi, 2\pi)$ ← $\theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

(صُحّح البديل ⓒ إلى 300° لأن الحل الصحيح لم يكن ضمن البدائل) · **(3)** $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30^\circ$

أسئلة المقال

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات المثلثية التالية خلال دورة

(1) $\theta \in [0\ ,\ 2\pi)$ حيث $\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\cos\theta = a$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

(θ تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\cos\alpha = \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$\because \cos\theta < 0$ ③

θ تقع في الربع الثاني	θ تقع في الربع الثالث
$\theta = \pi - \alpha$	$\theta = \pi + \alpha$
$= \pi - \frac{\pi}{4}$	$= \pi + \frac{\pi}{4}$
$\theta = \frac{3\pi}{4}$	$\theta = \frac{5\pi}{4}$

$$S.S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$$

(2) $x \in [0\ ,\ 2\pi)$ حيث $2\sin x + \sqrt{3} = 0$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\sin x = a$

$$2\sin x + \sqrt{3} = 0$$

$$2\sin x = -\sqrt{3}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

(x تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\sin\alpha = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

because $\sin x < 0$ ③

x تقع في الربع الرابع	x تقع في الربع الثالث
$x = 2\pi - \alpha$	$x = \pi + \alpha$
$= 2\pi - \frac{\pi}{3}$	$= \pi + \frac{\pi}{3}$
$x = \frac{5\pi}{3}$	$x = \frac{4\pi}{3}$

$$S.S = \left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

(3) $\theta \in [0\ ,\ 2\pi)$ حيث $\tan\theta = -1$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\tan\theta = a$

$$\tan\theta = -1 < 0$$

(θ تقع في الربع الثاني أو الربع الرابع)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\tan\alpha = |-1| = 1$$

$$\alpha = \tan^{-1}(1)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$\because \tan\theta < 0$ ③

θ تقع في الربع الثاني	θ تقع في الربع الرابع
$\theta = \pi - \alpha$	$\theta = 2\pi - \alpha$
$= \pi - \frac{\pi}{4}$	$= 2\pi - \frac{\pi}{4}$
$\theta = \frac{3\pi}{4}$	$\theta = \frac{7\pi}{4}$

$$S.S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

(4) $\theta \in [0\ ,\ 2\pi)$ حيث $\cot\theta = \sqrt{3}$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\tan\theta = a$

$$\cot\theta = \sqrt{3}$$
$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$
$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$$

(θ تقع في الربع الأول أو الربع الثالث)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\tan\alpha = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

③ $\because \tan\theta > 0$

θ تقع في الربع الأول	θ تقع في الربع الثالث
$\theta = \alpha$	$\theta = \pi + \alpha$
$\theta = \frac{\pi}{6}$	$= \pi + \frac{\pi}{6}$
	$\theta = \frac{7\pi}{6}$

$$S.S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$$

(5) $\theta \in [0\ ,\ 2\pi)$ حيث $2\sin\theta + \sqrt{2} = 0$

الحل

① نضع المعادلة على الصورة $\sin\theta = a$

$$2\sin\theta + \sqrt{2} = 0$$
$$2\sin\theta = -\sqrt{2}$$
$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

(θ تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع)

② نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\sin\alpha = \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

③ $\because \sin\theta < 0$

θ تقع في الربع الثالث	θ تقع في الربع الرابع
$\theta = \pi + \alpha$	$\theta = 2\pi - \alpha$
$= \pi + \frac{\pi}{4}$	$= 2\pi - \frac{\pi}{4}$
$\theta = \frac{5\pi}{4}$	$\theta = \frac{7\pi}{4}$

$$S.S = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

(6) $\theta \in [0\ ,\ 2\pi)$ حيث $\csc\theta + 2 = 2$

الحل

$$\csc\theta + 2 = 2$$
$$\csc\theta = 2 - 2$$
$$\csc\theta = 0$$

مستحيل لأن $|\csc\theta| \geq 1$ (أي $\frac{1}{\sin\theta} \neq 0$)

$$S.S = \varnothing$$

مهارات تفكير عليا

أوجد مجموعة حل المعادلات المثلثية التالية

$\theta \in [0\ ,\ 2\pi)$

$2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$ **(1)**

الحل

$$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 1) = 0$$

إما
$2\sin\theta - 1 = 0$
$\sin\theta = \frac{1}{2}$
$\theta = \frac{5\pi}{6}$ أو $\theta = \frac{\pi}{6}$

أو
$\sin\theta - 1 = 0$
$\sin\theta = 1$
$\theta = \frac{\pi}{2}$

$$S.S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

$2\cos\theta\sin\theta - \cos\theta = 0$ **(2)**

الحل

$$\cos\theta\,(2\sin\theta - 1) = 0$$

إما
$\cos\theta = 0$
$\theta = \frac{3\pi}{2}$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}$

أو
$2\sin\theta - 1 = 0$
$\sin\theta = \frac{1}{2}$
$\theta = \frac{5\pi}{6}$ أو $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$S.S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

$$\sin 4\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ **(3)**

الحل

$$\theta \in [0, 2\pi)$$
$$4\theta \in [0, 8\pi)$$

زاوية الإسناد $\alpha = \frac{\pi}{3}$ **و** $\sin 4\theta > 0$ **(الربع الأول أو الثاني)**

إما
$$4\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$
$$\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$$

أو
$$4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$
$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$
$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3$

$$S.S = \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}, \frac{13\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}, \frac{19\pi}{12}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

$$\sin^2\theta - \sin\theta + 1 = 0$$ **(4)**

الحل

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$$

لا يوجد قيمة حقيقية لـ $\sin\theta$

$$S.S = \varnothing$$

$$\sin^2\theta - 2\sin\theta + 1 = 0$$ **(5)**

الحل

$$(\sin\theta - 1)^2 = 0$$
$$\sin\theta - 1 = 0$$
$$\sin\theta = 1$$
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$S.S = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

اختيار من متعدد (درجة لكل بند)

ظلّل رمز الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة:

1 **إذا كان** $\sin\theta - \cos\theta = 0.8$ **حيث** θ **زاوية حادة فإن قيمة** $\sin\theta\cos\theta$ **تساوي:**

(a) 0.8 (b) 1.8 (c) 0.18 (d) 1.6

2 إذا كانت $\theta \in [0\ ,\ 2\pi)$ فإن مجموعة حل المعادلة $(2\cos\theta - 1)(2\sin\theta - \sqrt{3}\ ) = 0$ بالقياس الستيني:

(a) $\{120^\circ, 240^\circ\}$

(b) $\{60^\circ, 300^\circ\}$

(c) $\{60^\circ, 300^\circ, 120^\circ\}$

(d) $\{60^\circ, 120^\circ\}$

💬 تعليل الإجابات

(1) بالتربيع:

$$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 0.64 \Rightarrow 1 - 2\sin\theta\cos\theta = 0.64 \Rightarrow \sin\theta\cos\theta = 0.18$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 60^\circ, 120^\circ\ ،\ \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 60^\circ, 300^\circ\ \textbf{(2)}\cdot$$

🌟 أحسنت! أنهيت الوحدة الثالثة 🏆